

Envolupants

El món de les corbes és fascinant per als matemàtics per la seua bellesa i per l'estudi de les seues propietats.

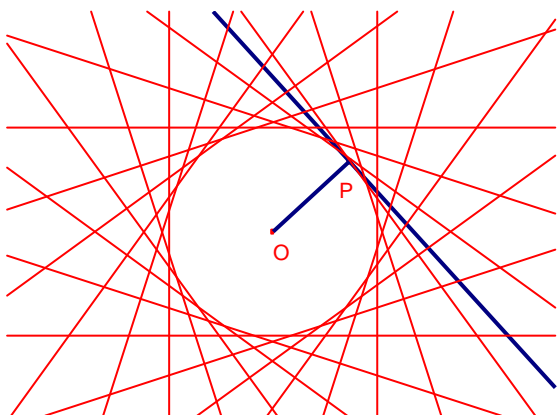
Mostrarem l'estudi de corbes clàssiques (les còniques, la cardioide, la nefroide, el deltoide, l'astroide) con envolupants. L'estudi ha estat elaborat amb ajut dels programes informàtics Cabri Géomètre i MuPAD.

Una corba envolupant és una corba tangent a totes les d'una família de corbes donada. Espanyol: envolvente, francès: enveloppante, anglés: envelope.

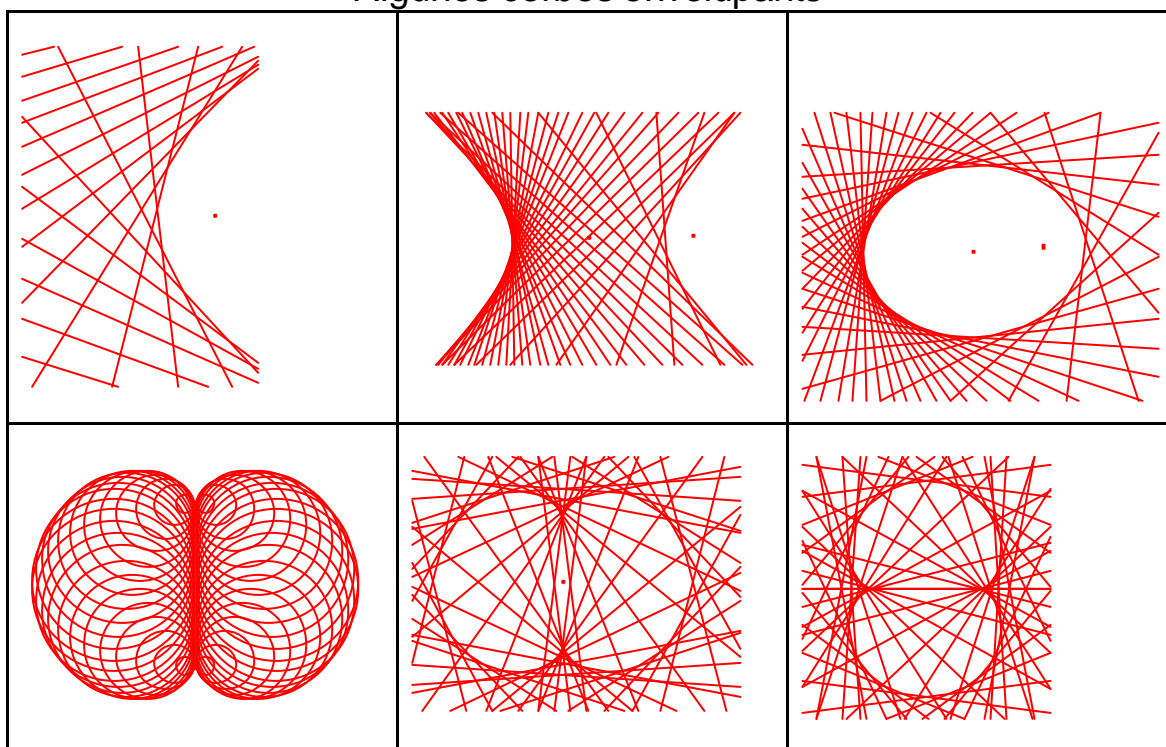
La circumferència.

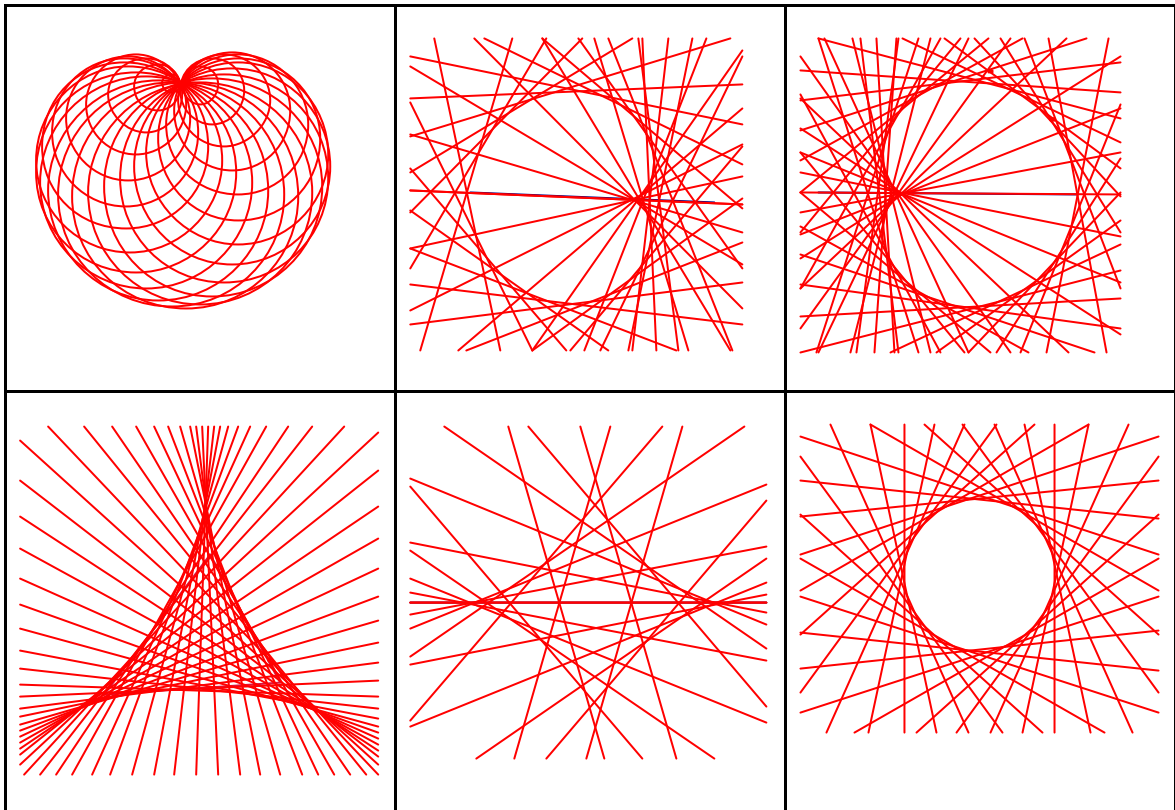
Donat el segment \overline{OP} de longitud constant, O fix i P variable.

L'envolupant formada per les rectes perpendiculars sobre els segments \overline{OP} en el punt P, és la circumferència de centre O.



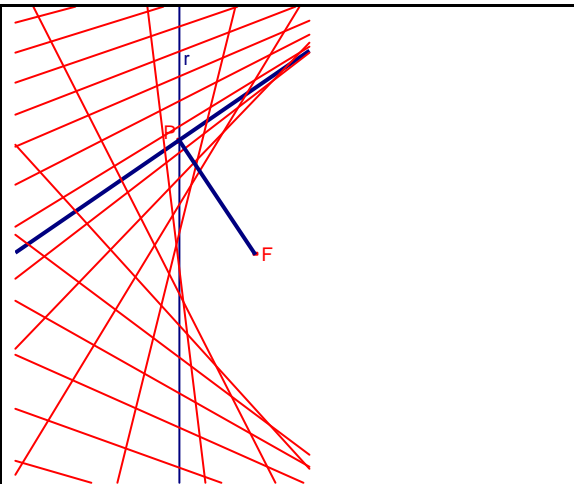
Algunes corbes envolupants





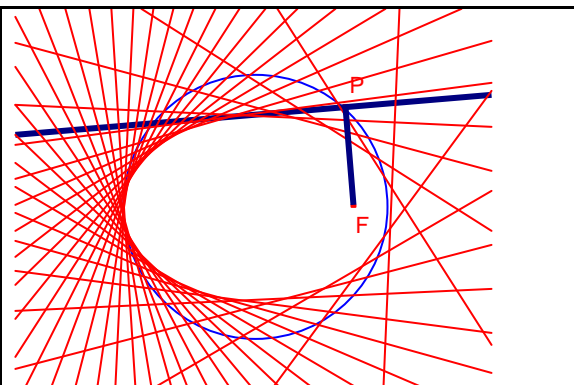
La paràbola

Siga una recta r
 Siga F un punt fix exterior a la recta r
 Siga P un punt de la recta r
 Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P . La paràbola de focus F simètrica a la recta perpendicular a r que passa per F és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



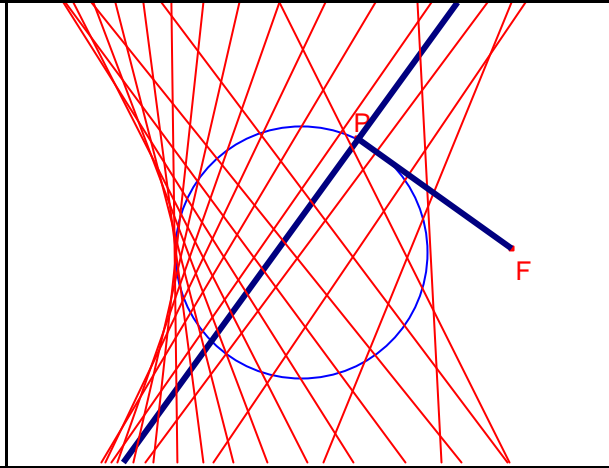
L'el·lipse

Siga una circumferència C .
 Siga F un punt interior a la circumferència.
 Siga P un punt de la circumferència C .
 Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P . L'el·lipse de focus F i eix major el diàmetre la circumferència C és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



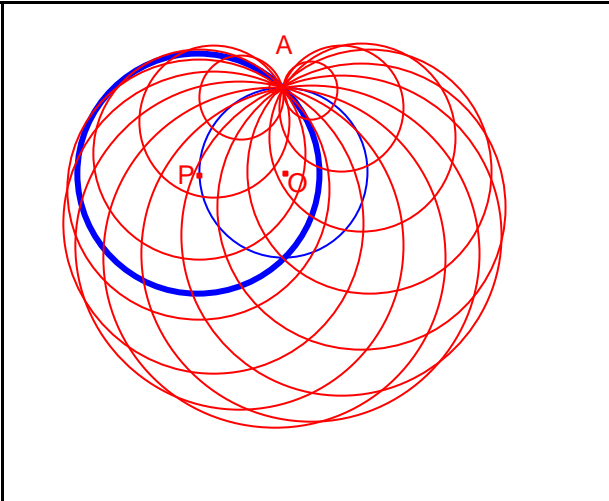
La hipèrbola.

Siga una circumferència C.
Siga F un punt exterior a la circumferència.
Siga P un punt de la circumferència C.
Siga el conjunt de rectes perpendiculars a FP en P. La hipèrbola de focus F i eix major el diàmetre la circumferència C és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



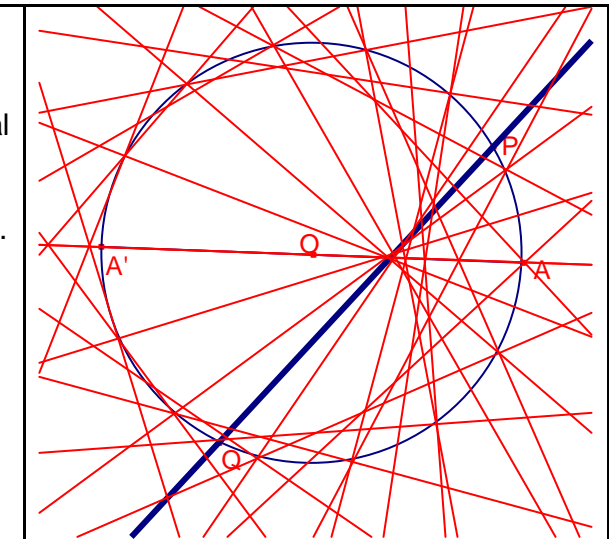
La cardioide 1

Siga la circumferència de centre O i radi \overline{OA} .
Siga P un punt de la circumferència anterior.
Siga la circumferència de centre P que passa per A.
Siga conjunt de les circumferències de centre P que passen per A. La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de circumferències.



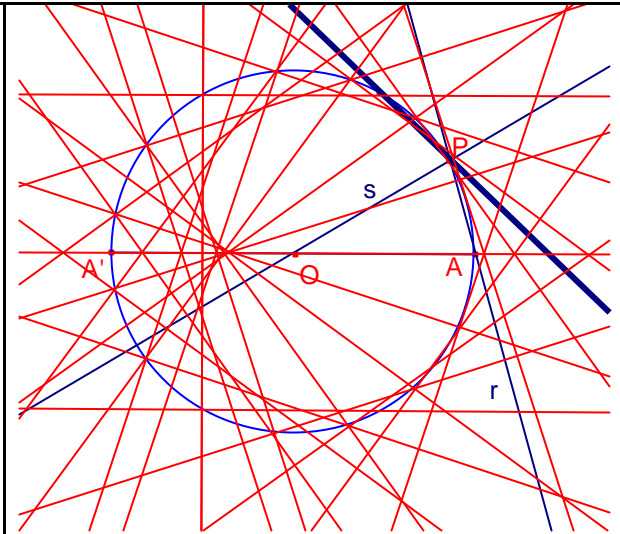
La cardioide 2

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O.
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga un punt Q sobre la circumferència tal que es té la igualtat dels arcs:
 $A'Q = 2 \cdot PA$.
Siga la recta r que passa pels punts P, Q.
Siga el conjunt de rectes que passa per P, Q al variar P sobre la circumferència.
La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



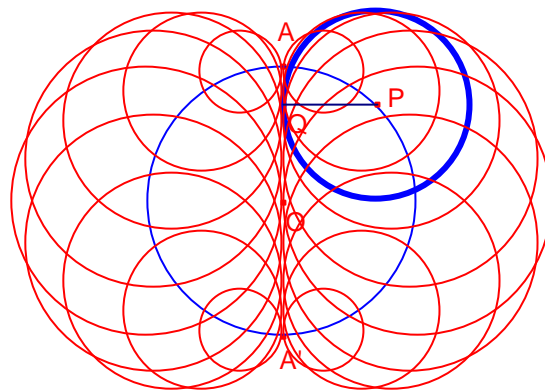
La cardioide 3

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O .
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga la recta r que passa per P, A .
Siga la recta s que passa per P, O .
Siga la recta t simètrica de la recta r respecte de la recta s .
Siga el conjunt de rectes t al variar P sobre la circumferència. La cardioide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



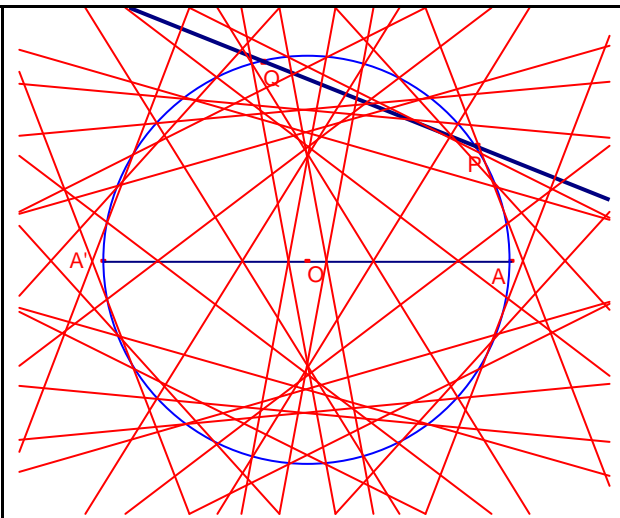
La nefroide 1

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O .
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga Q la projecció de P sobre el diàmetre AA' .
Siga conjunt de les circumferències de centre P que passen per Q . La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de circumferències.



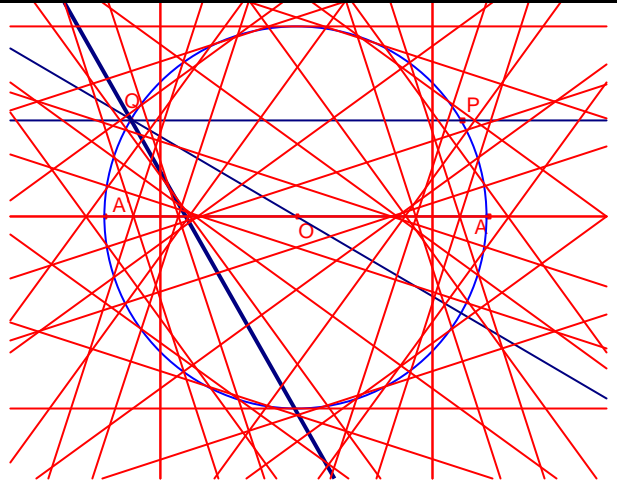
La nefroide 2

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O .
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga un punt Q sobre la circumferència tal que es té la igualtat d'arcs:
 $PQ = 2 \cdot AP$.
Siga la recta r que passa pels punts P, Q .
Siga el conjunt de rectes que passa per P, Q al variar P sobre la circumferència. La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



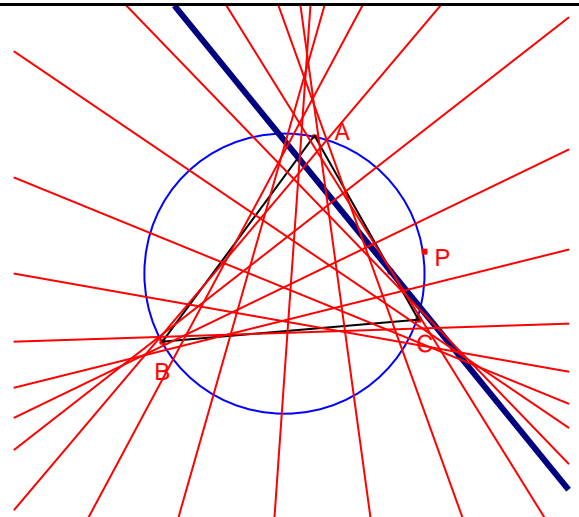
La nefroide 3

Siga la circumferència de diàmetre AA' i centre O .
Siga P un punt sobre la circumferència.
Siga la recta r que passa per P Q (Q de la circumferència) i és paral·lela al diàmetre AA' .
Siga la recta s simètrica de la recta r respecte de OQ .
Siga el conjunt de rectes r al variar P sobre la circumferència. La nefroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



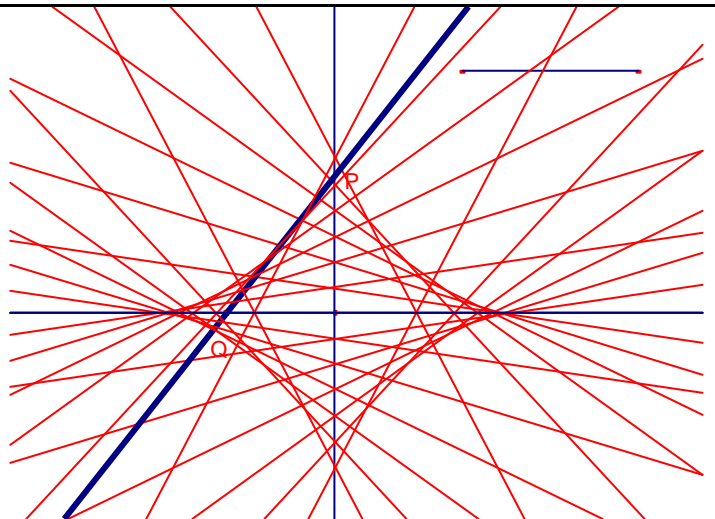
El deltoide

Siga el triangle $\triangle ABC$
Siga C la seua circumferència circumscriu.
Siga P un punt de la circumferència C .
Siga r la recta de Simson de P respecte del triangle $\triangle ABC$.
Siga el conjunt de rectes r al variar P sobre la circumferència. El deltoide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.

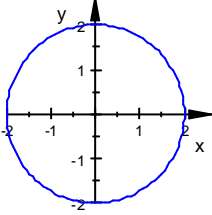
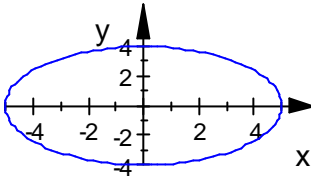
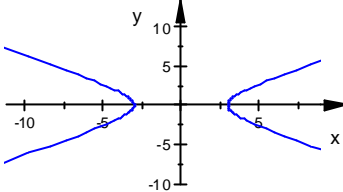
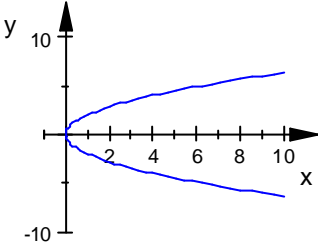
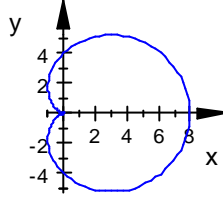
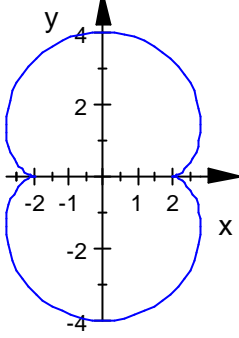
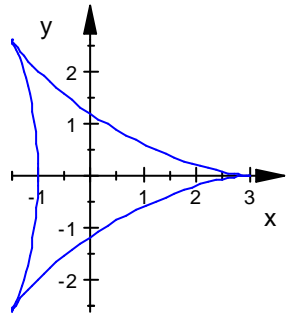
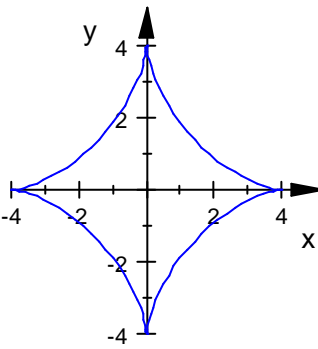


L'astroide

Siga PQ un segment constant
 P sobre l'eix d'ordenades i Q sobre l'eix d'abscisses.
Siga la recta r que passa per P, Q .
Siga el conjunt de rectes r al variar P l'eix d'abscisses.
L'astroide és l'envolupant d'aquest conjunt de rectes.



Fórmules de les corbes:

		
<p>Circumferència $x^2 + y^2 = 4$ $\rho = 2$ (polar) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$</p>	<p>El·lipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$</p>	<p>Hipèrbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$</p>
		
<p>Paràbola $x = \frac{1}{4}y^2$</p>	<p>Cardioide $\rho = 4(1 + \cos t)$ (polar)</p>	<p>Nefroide. Epicicloide de 2 voltes. $\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$</p>
		
<p>Deltoide Hipocicloide de 3 voltes $\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$</p>	<p>Astroide Hipocicloide de 4 voltes $\begin{cases} x = 3 \cos t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$</p>	

Bibliografia:

- BOLTIANSKI, V.G. La envolvente. Ed. Mir. Moscou. 1977.
 VASÍLIEV, N.B. GTENMÁJER, V.L. Rectas y curvas. Ed. Mir. Moscou. 1980.
 PEDOE, D. La geometría en el arte. Ed. Gustavo Gili. Barcelona. 1979.
 REDÓN GÓMEZ, A. Geometría paso a paso. Ed. Tébar. Madrid. 2000.

