Calculeu les següents integrals definides.

$$\int_{1}^{4} 2\,dx$$

$$\int_{-1}^{2} (x+2)\,dx$$

$$\int_{1}^{2} x^2\,dx$$

$$\int_{2}^{4} \left(x^2-4\right)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)dx$$

$$\int_{-1}^{1} (x+2)^5\,dx$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$\int_{0}^{1} e^x\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} 2^x\,dx$$

$$\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int_{3}^{6} \sqrt{x-2}\,dx$$

$$\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$$

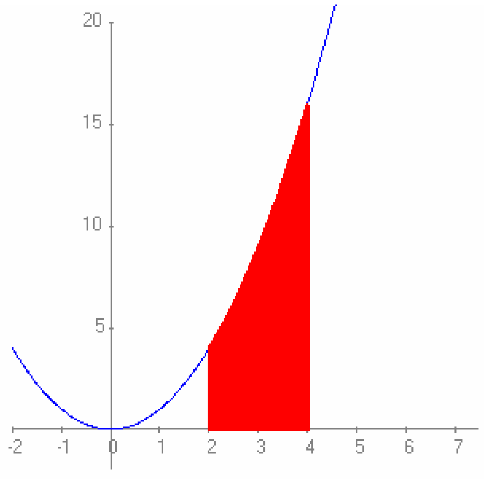
$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Problema:
Calculeu l'àrea limitada per la paràbola d'equació $f(x) = x^2$ l'eix d'abscisses i les rectes $x = 2$, $x = 4$.

Solució:
La funció és positiva en aquest interval.
L'àrea és la integral definida de la funció $f(x) = x^2$ en l'interval $[2,4]$:

$$\int_2^4 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}u^2.$$



Problemes de càlcul d'àrees

Problema
Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -1$, $x = 2$.

Problema
Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ i l'eix d'abscisses.

Problema
Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = \cos x$, l'eix d'abscisses en l'interval $[0,2\pi]$

Problema
Calculeu l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 2$

Problema
Calculeu l'àrea del cercle de radi R.

Problema
Calculeu l'àrea afitada per les corbes $f(x) = \frac{x^3}{4}$ i $g(x) = x$.

Problema
Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

Problema

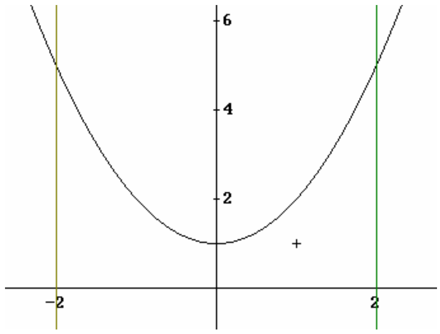
Calculeu el volum de revolució de la corba $y = x^2 + 1$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses en l'interval $]-2,2[$

Solució:

El volum de revolució és:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 1\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Bigg]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{412\pi}{15} u^3$$



Problemes de càlcul de volums

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $f(x) = x$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[2,4]$. Quin és el cos resultant.

Problema

Determineu el volum de revolució de la regió afitada per la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i la recta $x = 4$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses.

Problema

Determineu el volum de l'el·lipsoide de revolució de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses.

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $y = xe^x$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[0,1]$. Quin és el cos resultant.

Problema

Calculeu el volum del cilindre de radi R i altura h.

Problema

Calculeu el volum de l'esfera de radi R.

Problema

Calculeu el volum del con de radi de la base R i altura h.

Solucions

Calculeu les següents integrals definides.

$$\int_1^4 2\,dx = 6 \qquad \int_{-1}^2 (x+2)dx = \frac{15}{2} \qquad \int_1^2 x^2\,dx \qquad \int_2^4 \left(x^2-4\right)dx = \frac{32}{3} \qquad \int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)dx = \frac{4}{3}$$

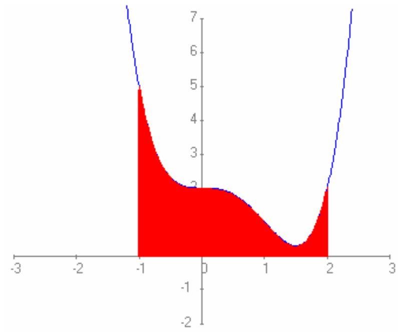
$$\int_{-1}^1 (x+2)^5\,dx = \frac{364}{3} \qquad \int_0^\pi \sin x\,dx = 2 \qquad \int_0^1 e^x\,dx = e-1 \qquad \int_{-1}^1 2^x\,dx = \frac{3}{2\cdot\ln 2} \qquad \int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$$

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,dx = \frac{14}{3} \qquad \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \frac{2}{3} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{6}$$

Problemes de càlcul d'àrees

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -1,\ x = 2$.

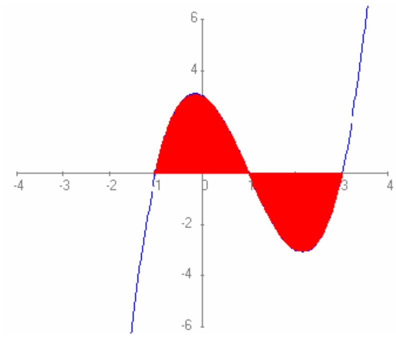


Solució:

$$S = \int_{-1}^2 \left(x^4 - 2x^3 + 2\right)dx = \frac{51}{10}u^2\,.$$

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ i l'eix d'abscisses.



Solució:

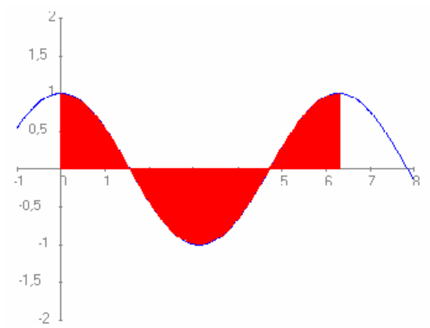
$$S = \int_{-1}^1 \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx - \int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx = 8u^2$$

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = \cos x$, l'eix d'abscisses en l'interval $[0,2\pi]$

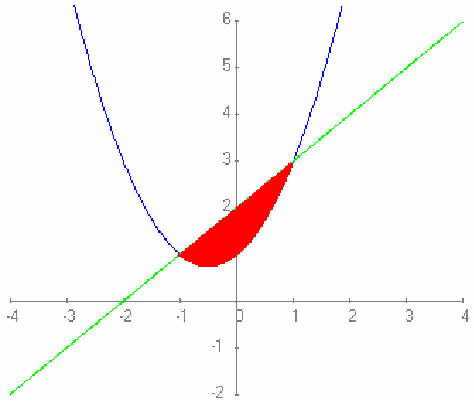
Solució:

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 4u^2$$



Problema

Calculeu l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + x + 1,\ g(x) = x + 2$

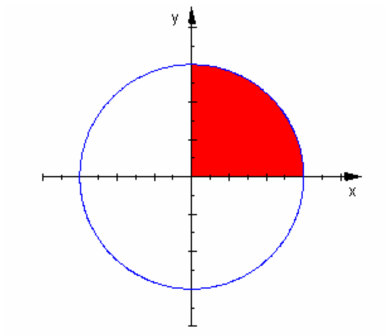


Solució:

$$S = \int_{-1}^{1} \left((x+2) - \left(x^2 + x + 1\right) \right) dx = \frac{4}{3} u^2$$

Problema

Calculeu l'àrea del cercle de radi R.

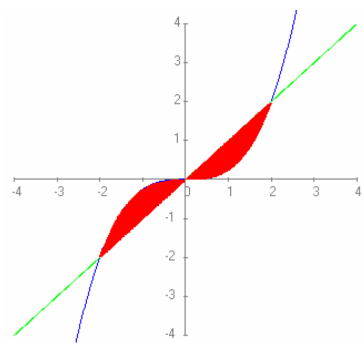


Solució:

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \pi R^2$$

Problema

Calculeu l'àrea afitada per les corbes $f(x) = \frac{x^3}{4}$ i $g(x) = x$.

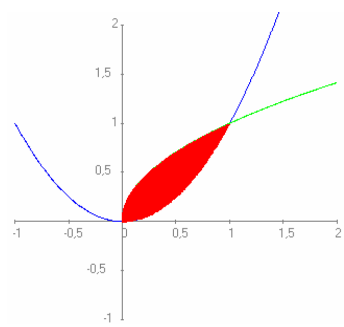


Solució:

$$S = 2 \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx = 2u^2$$

Problema

Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$



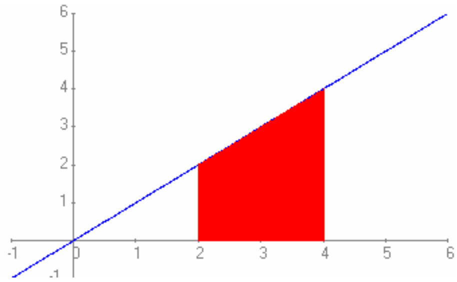
Solució:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \frac{1}{3} u^2$$

Problemes de càlcul de volums

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $f(x) = x$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[2,4]$. Quin és el cos resultant.



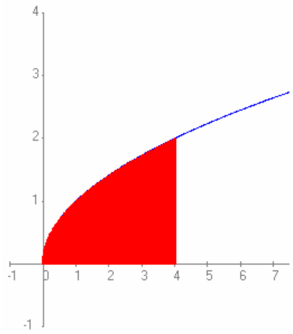
Solució:

$$V = \pi \int_2^4 x^2 \, dx = \frac{56\pi}{3} u^3$$

El cos resultant és un tron de con de radis 4 i 2 i altura 2.

Problema

Determineu el volum de revolució de la regió afitada per la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i la recta $x = 4$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses.

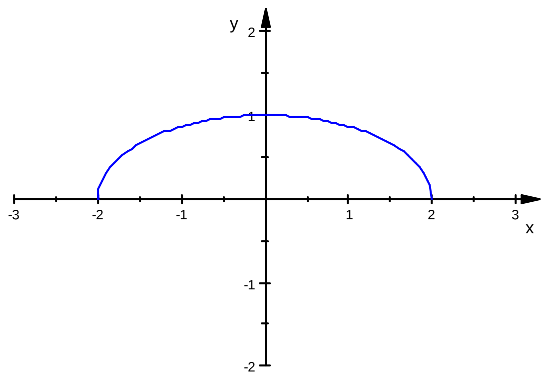


Solució:

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = 8\pi \, u^3$$

Problema

Determineu el volum de l'el·lipsoide de revolució de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses.

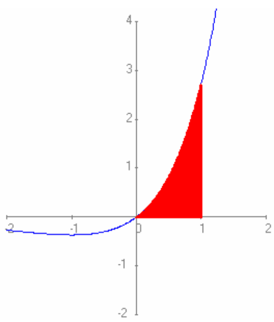


Solució:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{8}{3} \pi \, u^3$$

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $y = xe^x$ al girar 360º sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[0,1]$. Quin és el cos resultant.

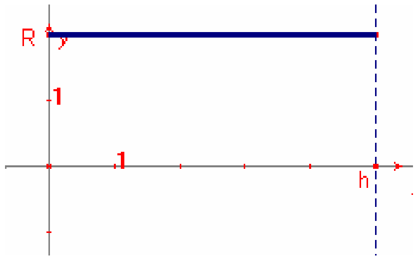


Solució:

$$V = \pi \int_0^1 \left(xe^x\right)^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \pi \, u^3$$

Problema

Calculeu el volum del cilindre de radi R i altura h.

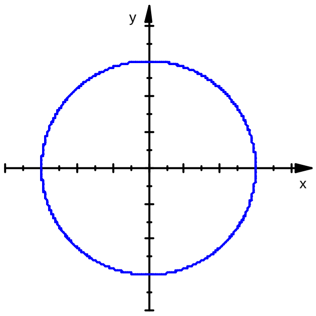


Solució:

$$V = \pi \int_0^h R^2 dx = \pi R^2 h \; u^3$$

Problema

Calculeu el volum de l'esfera de radi R.

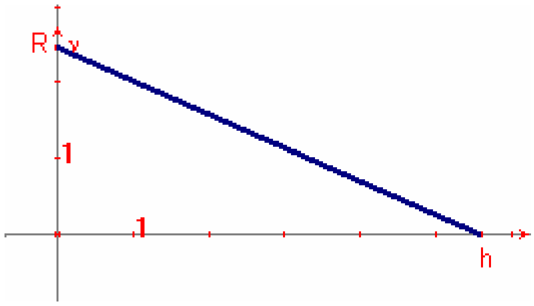


Solució:

$$V = 2\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{4\pi R^3}{3} u^3$$

Problema

Calculeu el volum del con de radi de la base R i altura h.



Solució:

La recta és $y = \frac{-R}{h} x + R$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x + R \right)^2 dx = \frac{\pi R^2 h}{3} u^3$$