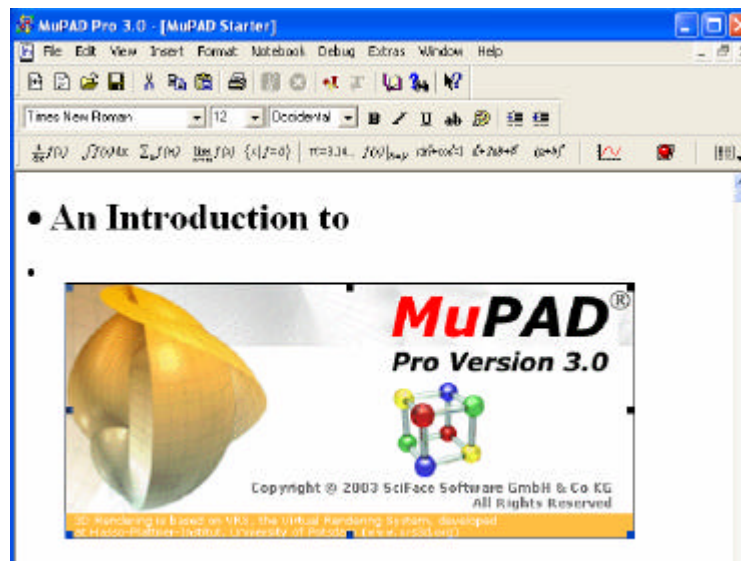


# Introducció al MuPAD



Ricard Peiró



# Índex

	Pàg.
Activitats inicials .....	6
Nombres .....	9
Polinomis .....	14
Equacions, sistemes i inequacions .....	20
Representació gràfica de funcions. Operacions amb funcions .....	25
Límits de funcions. Derivades. Integrals .....	36
Representació de superfícies en 3D .....	42
Matrius .....	48
Problemes per a resoldre amb MuPAD.....	54
Calaix de sastre.....	56
Menús MuPAD .....	61
Com inserir plantilla MuPAD en un document Word .....	63



**MuPAD:** (*Multi Processing Algebra Data Tool*) és un assistent matemàtic de càlcul simbòlic que permet realitzar tot tipus de càlculs (operacions amb nombres i polinomis, derivades, integrals, resolució d'equacions i sistemes) representar gràfiques en 2D i 3D.

Inclou a més a més, següents característiques:

- Disposa d'un entorn d'edició molt còmode. Les ordres és manipulen senzillament.
- Els gràfics s'integren en el mateix document o bé en una finestra a banda.
- Es combina amb fitxers Word.
- En el mateix document es poden combinar text, ordres i gràfics.
- Disposa d'una excel·lent ajuda.

Al guardar el fitxer MuPAD l'extensió és \*.mnb

Idiomes: anglés, alemany.

**Adreça web:** <http://www.sciface.com>

## Activitats inicials

La finestra principal del programa MuPAD:

The screenshot shows the MuPAD Pro 3.0 interface. The title bar reads 'MuPAD Pro 3.0 - [MuPAD Starter]'. The menu bar includes File, Edit, View, Insert, Format, Notebook, Debug, Extras, Window, and Help. Below the menu bar is a toolbar with icons for file operations and editing. The next toolbar contains text formatting options like font face (Times New Roman), size (24), and style (bold, italic, underline). The command bar features mathematical symbols and formulas such as  $\frac{d}{dx} f(x)$ ,  $\int f(x) dx$ ,  $\sum_n f(n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\{x | f=0\}$ ,  $\pi \approx 3.14...$ ,  $f(x)|_{x=y}$ ,  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ,  $a^2 + 2ab + b^2$ ,  $(a+b)^2$ , and a graph icon. The main workspace displays 'An Introduction to MuPAD Pro Version 3.0' with a 3D sphere. A copyright notice at the bottom reads 'Copyright © 2003 SciFace Software All Rights Reserved. 3D Rendering is based on VRS, the Virtual Rendering System, developed at Hasso-Plattner-Institut, University of Potsdam (www.vrs3d.org)'.

Labels pointing to the interface elements:


- Títol
- Barra de menús
- Barra de ferramentes d'edició
- Barra d'edició
- Barra de ferramentes de comandaments
- Finestra de treball
- Calcula derivades
- Calcula integrals
- Calcula sumatoris
- Calcula límits
- Resol equacions, sistemes
- Aproximar
- Substituir
- Simplificar
- Factoritzar
- Desenvolupar
- Introduir matrius, vectors
- Dibuixar funcions 3D
- Dibuixar funcions 2D

You are reading a **Notebook** for the computer algebra system **MuPAD Pro**. A Notebook allows you to make mathematical computations with **MuPAD**. You can enter expressions and commands, evaluate them, view the results and make annotations. A Notebook can be considered as an electronic worksheet, which combines input and output of computations, mathematical formulas, graphics, text and external objects in a single document. External objects can be audio and video files to mention a few. Any kind of OLE objects. for

## Activitats inicials

1. Obrir un nou fitxer MuPAD (NoteBooks), per a fer-ho escollir:

File/New Notebooks en la barra de menús (amb el teclat podríem obrir el fitxer petjant

Ctrl+N) o bé fer un clic sobre la icona .

2.- Efectueu les operacions:

$$3 + 4$$

$$4 * 5 + 2$$

$$4^3$$


$$\sqrt{16}$$

- $3+4$   
 $7$
- $4*5+2$   
 $22$
- $4^3$   
 $64$
- $\text{sqrt}(16)$   
 $4$

2.-Calculeu la derivada de la funció  $f(x) = \sin(x^2-1)$ .

a. Definiu la funció, és a dir escriviu l'expressió  $f(x):=\sin(x^2-1)$  i petgeu intro.  
Notes: Per a assignar una expressió a un objecte s'utilitza :=.


b. Escriviu l'expressió per a calcular derivades (podem escriure directament

$\text{diff}(f(x),x)$  o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús extras/calculus/differentiate).

- $f(x):=\sin(x^2-1)$   
 $\sin(x^2-1)$
- $\text{diff}(f(x),x)$   
 $2 \cdot x \cdot \cos(x^2-1)$


3.- Calculeu la suma dels 100 primers termes de la successió 3, 6, 9, 12, ....

a) El terme general de la successió és  $a_n = 3n$ .

b) Escriviu l'expressió `sum(3*n, n=1..100)` o bé fer clic en la icona .

• `sum(3*n, n=1..100)`  
15150


4.- Resoleu el sistema  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$ .

a) Escriviu l'expressió `solve({x+y=1,x^2+y=2}, {x,y})` o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús *extras/solve/exact*).

• `solve({x+y=1,x^2+y=2}, {x,y})`  
 $\left\{ \left[ x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right], \left[ x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right] \right\}$

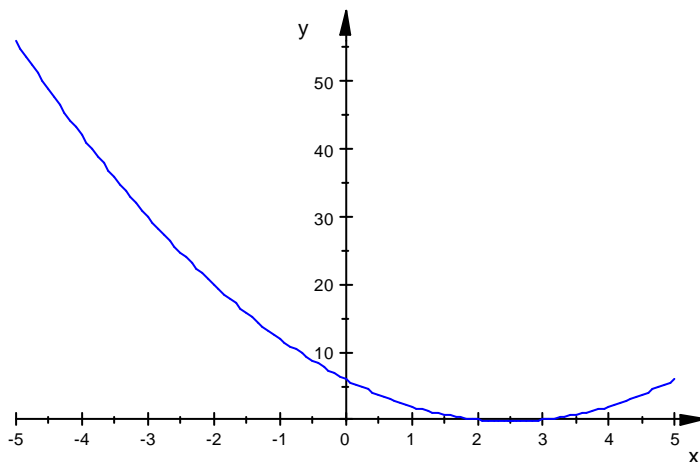
5.- Representeu gràficament la funció  $g(x) = x^2 - 5x + 6$ .

a) Definiu la funció, és a dir escriviu l'expressió `f(x):=x^2-5x+6` i petgeu intro.

b) Escriviu l'expressió `plotfunc2d(g(x))` o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús *extras/plot 2D funtion*).

• `g(x) := x^2 - 5*x + 6`  
 $x^2 - 5 \cdot x + 6$

• `plotfunc2d(g(x))`



## Nombres

### Constats de MuPAD

	<i>Expressió en MuPAD</i>
El nombre e	<b>E</b> <b>exp(1)</b>
infinít	<b>infinity</b>
Pi	<b>PI</b>
Unitat imaginària	<b>I</b>

### Operacions aritmètiques:

Símbol	Operació
<b>+</b>	Suma
<b>-</b>	Restes
<b>*</b>	Multiplicació
<b>/</b>	Divisió
<b>^</b>	Potència
<b>!</b>	Factorial d'un nombre

### Algunes funcions aritmètiques

EXPRESSIÓ	DESCRIPCIÓ	EXEMPLE
<b>gcd()</b>	Calcula el màxim comú divisor	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>gcd(600, 264, 396)</b></li> <li>12</li> </ul>
<b>lcm()</b>	Calcula el mínim comú múltiple	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>lcm(600, 264, 396)</b></li> <li>19800</li> </ul>
<b>sqrt()</b>	Calcula l'arrel quadrada d'una expressió.	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>sqrt(12), sqrt(12.0)</b></li> <li><math>2 \cdot \sqrt{3}</math>, 3.464101615</li> <li>12.0 fa que la sortida siga en coma flotant (decimal).</li> </ul>
<b>ln()</b> <b>log(a,b)</b>	Calcula el ln. Calcula el $\log_a b$	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>ln(exp(1)), float(ln(3))</b></li> <li>1, 1.098612289</li> <li><b>log(2,4), log(2,16)</b></li> <li>2, 4</li> </ul>
<b>binomial(n,m)</b>	Calcula les combinacions de n elements agafats de m en $\binom{n}{m}$ m.	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>binomial(7,2)=7*6/2!</b></li> <li>21 = 21</li> </ul>
<b>n!, fact()</b>	Calcula el factorial de n	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>7!, 0!, 12!</b></li> <li>5040, 1, 479001600</li> </ul>
<b>factor()</b>	Realitza la descomposició factorial d'un nombre	<ul style="list-style-type: none"> <li><b>factor(12345)</b></li> <li>3 · 5 · 823</li> </ul>

<b>isprime()</b>	Comprova si un nombre és primer o no	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>isprime(65677), isprime(12453211)</code> <code>true, false</code></li> </ul>
<b>nextprime(n)</b>	Nombre primer següent a n	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>nextprime(10)</code> <code>11</code></li> </ul>
<b>float()</b>	Expressa un nombre en notació decimal (coma flotant).	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>PI=float(PI)</code> <code><math>\pi = 3.141592654</math></code></li> </ul>
<b>DIGITS:=n</b>	Canvia la sortida d'un nombre a "n" dígit.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>DIGITS:=20; PI=float(PI)</code> <code>20</code> <code><math>\pi = 3.1415926535897932385</math></code></li> <li>• <code>PI*10=float(PI*10);</code> <code>PI*100=float(PI*100)</code> <code><math>10 \cdot \pi = 31.415926535897932385</math></code> <code><math>100 \cdot \pi = 314.15926535897932385</math></code></li> </ul>

### L'operador d'assignació %

Fa referència a l'última sortida realitzada, a l'executar una ordre.

### L'operador d'assignació :=

S'utilitza per a assignar una expressió a una variable.

Exemple:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>x:=5; x+3</code> <code>5</code> <code>8</code></li> </ul>
--

### L'operador \$

Crea una seqüència d'expressions:

**\$ a..b** Crea la seqüència d'enters des de "a" fins a "b".

**g \$ n** Crea la seqüència de "n" còpies de "g".

**g(i) \$ i=a..b** Crea una seqüència  $g(a), g(a+1), \dots, g(b)$

Exemple:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <code>\$-5..15</code> <code>-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15</code></li> <li>• <code>g \$ 10</code> <code>g, g, g, g, g, g, g, g, g, g</code></li> <li>• <code>g(i) \$ i=5..15</code> <code>g(5), g(6), g(7), g(8), g(9), g(10), g(11), g(12), g(13), g(14), g(15)</code></li> </ul>
---

## Exercicis d'aritmètica.

### a) NOMBRES NATURALS I ENTERS.

1.- Efectueu les següents operacions amb enters:

$$-4 - 3 \cdot 5 + 12 : 3 - 2(5 - 2) =$$

$$(-2)^3 + 3(4 - 18 : 6)(6 - 2 - (-5)^2 \cdot 4) =$$

$$2 - 3(5 - 4(4 - 6)) + 8^2 : 4 =$$

$$6 : 2 : 3 + 5 \cdot 2 \cdot 3^5 - 6(5 - 2 + 4 - 3^4 \cdot 2) =$$

2.- Trobeu la descomposició factorial dels següents nombres naturals:

$$20250 =$$

$$52 =$$

$$53 =$$

$$1260 =$$

$$960 =$$

$$500 =$$

$$503 =$$

3.- Trobeu el màxim comú divisor de:

$$\text{mcd}(3960, 5808) =$$

$$\text{mcd}(32, 24) =$$

$$\text{mcd}(100, 120) =$$

$$\text{mcd}(96, 64) =$$

$$\text{mcd}(12, 18, 24) =$$

$$\text{mcd}(1750, 1000) =$$

$$\text{mcd}(800, 3500) =$$

$$\text{mcd}(270, 2268) =$$

$$\text{mcd}(990, 1260, 960) =$$

4.- Trobeu el mínim comú múltiple de:

$$\text{mcm}(3960, 5808)$$

$$\text{mcm}(32, 24) =$$

$$\text{mcm}(100, 120) =$$

$$\text{mcm}(96, 64) =$$

$$\text{mcm}(12, 18, 24) =$$

$$\text{mcm}(1750, 1000) =$$

$$\text{mcm}(800, 3500) =$$

$$\text{mcm}(270, 2268) =$$

$$\text{mcm}(990, 1260, 960) =$$

5.- Determineu el primer nombre primer següent a:

n	Primer següent a n
10	
20	
50	
100	
700	
1000	
5555	
1000000	

### b) NOMBRES RACIONALS.

1.- Simplifiqueu les següents fraccions:

$$\frac{1200}{210} =$$

$$\frac{180}{8100} =$$

$$\frac{800}{640} =$$

$$\frac{1024}{1280} =$$

$$\frac{360000}{9000000} =$$

$$\frac{2048}{10000} =$$

$$\frac{30}{45} =$$

$$\frac{256}{144} =$$

$$\frac{6600}{1320} =$$

$$\frac{28}{70} =$$

$$\frac{4550}{2860} =$$

$$\frac{1802}{2074} =$$

2.- Operacions amb fraccions, simplifiqueu el resultat:

$$\frac{21}{26} + \frac{40}{39} - \frac{7}{130} =$$

$$2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{7}{3} - 4 \left( \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \right) =$$

$$\frac{3}{4} - 7 : \frac{35}{8} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} : \frac{1}{8} =$$

$$-\frac{1}{2} - \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \right) =$$

$$2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{7}{8} : \frac{4}{7} =$$

$$\left( 32 : \frac{8}{5} \right) + \left( \frac{9}{2} : 6 \right) =$$

$$\left( -\frac{8}{3} - 1 \right) : \left( -\frac{7}{4} - 1 \right) =$$

$$8 : \left( \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \right) =$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{4}} + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{5}} =$$

$$4 + \frac{6}{5} =$$

$$5 + \frac{4}{7} =$$

$$\frac{\frac{7}{15} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{35} - \frac{2}{7}} =$$

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} =$$

3.- Convertiu en decimals les següents fraccions (utilitzeu una aproximació de 60 decimals).

Classifiquen-los (decimals exactes, periòdics purs, periòdics mixtos).

$$\frac{7}{30} =$$

$$\frac{5}{24} =$$

$$\frac{8}{9} =$$

$$\frac{3}{8} =$$

$$\frac{6}{13} =$$

$$\frac{23}{7} =$$

$$\frac{4}{17} =$$

$$\frac{3}{625} =$$

### c) NOMBRES REALS.

1. - Calculeu  $2\sqrt{20} + 5\sqrt{125} =$

•  $2*\text{sqrt}(20)+5*\text{sqrt}(125)$   
 $29 \cdot \sqrt{5}$

2. - Racionalitzeu  $\frac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} =$

•  $(\text{sqrt}(2))/(5-\text{sqrt}(2))$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-5}$$

•  $\text{simplify}(\%, \text{sqrt})$

$$\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{23} + \frac{2}{23}$$

1.- Calculeu:

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} =$$

$$\sqrt{5} + 3\sqrt{45} - \sqrt{20} =$$

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{25x} - 4\sqrt{9x} =$$

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{20} =$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}}$$

$$3\sqrt{12} + \sqrt{192} - 2\sqrt{180} + \sqrt{147} - \sqrt{5} =$$

$$\frac{4 + \sqrt{12}}{8} =$$

$$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

2.- Racionalitzeu:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{5}{2-\sqrt{3}} =$$

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{9}} =$$

## Polinomis

### L'operador ->

S'utilitza per definir funcions.

Exemple:

Definiu la funció  $f(x) = (x^2 - 3)^2$ .

Calculeu  $f(2)$ ,  $f(-3)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(1)$

- $f := x \rightarrow (x^2 - 3)^2$

$$x \rightarrow (x^2 - 3)^2$$

- $f(2); f(-3)$

$$1$$

$$36$$

- $f'(x); f'(1)$

$$4 \cdot x \cdot (x^2 - 3)$$

$$-8$$

Exemple:

Donats  $p(x) = x^3 + 2x + 5$ ,  $q(x) = x^2 + 7x - 1$ , calculeu:

$p(x) + q(x)$ ,  $p(x)q(x)$ ,  $p(x) - q^2(x)$ .

- $p := x^3 + 2 \cdot x + 5; q := x^2 + 7 \cdot x - 1$

$$2 \cdot x + x^3 + 5$$

$$7 \cdot x + x^2 - 1$$

- $p + q$

$$9 \cdot x + x^2 + x^3 + 4$$

- $p \cdot q$

$$(2 \cdot x + x^3 + 5) \cdot (7 \cdot x + x^2 - 1)$$

- $p - q^2$

$$2 \cdot x - (7 \cdot x + x^2 - 1)^2 + x^3 + 5$$

- $\text{expand}(\%)$

$$16 \cdot x - 47 \cdot x^2 - 13 \cdot x^3 - x^4 + 4$$

Exemple:

Donats  $p(x) = x^3 + 2x + 5$ ,  $q(x) = x^2 + 7x - 1$ , calculeu el quocient i el residu de la divisió de polinomis:

$p(x) : q(x)$

a) Definiu els polinomis  $p := x^3 + 2x + 5$ ;  $q := x^2 + 7x - 1$

b) Escriviu l'expressió **divide(p,q)**, o bé en la barra de menús *extras/polynomials/divide*).

- $p := x^3 + 2x + 5$ ;  $q := x^2 + 7x - 1$

$$2 \cdot x + x^3 + 5$$

$$7 \cdot x + x^2 - 1$$

- divide(p,q)**

$$x - 7, 52 \cdot x - 2$$

- divide(p,q,Quo)**

$$x - 7$$

- divide(p,q,Rem)**

$$52 \cdot x - 2$$

Exemple:

Factoritzeu el polinomi  $p(x) = 2x^{11} - 4x^{10} + 2x^9 - 8x^3 + 16x^2 - 8x$ .

a) Definiu el polinomi  $p := 2x^{11} - 4x^{10} + 2x^9 - 8x^3 + 16x^2 - 8x$ .

b) Escriviu l'expressió **factor(p)**, o bé la icona  $(a+b)^2$  o bé en la barra de menús *extras/polynomials/factor*).

- $p := 2x^{11} - 4x^{10} + 2x^9 - 8x^3 + 16x^2 - 8x$

$$16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 8 \cdot x^3 + 2 \cdot x^9 - 4 \cdot x^{10} + 2 \cdot x^{11}$$

- factor(%)**

$$2 \cdot x \cdot (x^4 - 2) \cdot (x^4 + 2) \cdot (x - 1)^2$$

Exemple:

Calculeu el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple dels polinomis

$a(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2$ ,  $b(x) = x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x$

comproveu que el mínim comú múltiple és:

$$\text{mcm}(a(x), b(x)) = \frac{a(x) \cdot b(x)}{\text{MCD}(a(x), b(x))}$$

- $a:=x^5-3\cdot x^3-2\cdot x^2;b:=x^4+5\cdot x^3+8\cdot x^2+4\cdot x$

$$x^5 - 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$$

$$4 \cdot x + 8 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + x^4$$

- $\text{gcd}(a,b)$

$$x + x^2$$

- $\text{lcm}(a,b)$

$$x^5 - 20 \cdot x^3 - 14 \cdot x^4 - 8 \cdot x^2 + 4 \cdot x^6 + x^7$$

- $\text{factor}(\%)$

$$x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x + 1)^2$$

- $a \cdot b / \text{gcd}(a,b)$

$$\frac{(2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 - x^5) \cdot (4 \cdot x + 8 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + x^4)}{x + x^2}$$

- $\text{simplify}(\%)$

$$x^2 \cdot (x - 2) \cdot (3 \cdot x + x^2 + 2)^2$$

- $\text{factor}(\%)$

$$x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x + 1)^2$$

## Exercicis de polinomis i fraccions Algebraiques

1

a) Definiu els següents polinomis:

$$f(x) = 4x^5 - 7x^3 + x - 5$$

$$g(x) = 7x^3 + x^2 - 7x + 3$$

$$h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$$

b) Calculeu els següents valors dels polinomis:

$$f(-2) =$$

$$f(2) =$$

$$g(1) =$$

$$g(-3) =$$

$$h(2) =$$

c) Efectueu les següents operacions:

$$f(x) + g(x) =$$

$$f(x) \cdot (g(x) - h(x)) =$$

$$f(x) - g(x) + h(x) =$$

$$2 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x) - 4h(x) =$$

$$f(x) \cdot g(x) =$$

$$f^2(x) =$$

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) =$$

$$f^2(x) - g^2(x) =$$

$$f(x) + g(x) \cdot h(x) =$$

$$(f(x) + g(x)) \cdot (f(x) - g(x)) =$$

$$f(x) - g(x) \cdot h(x) =$$

$$f(x) \cdot (g(x) + h(x)) =$$

2.- Calculeu  $A_i(x) : B_i(x)$  (determineu el quocient i el residu).

a)  $A_1(x) = 5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x - 5$ ,  $B_1(x) = x^2 + x - 1$

b)  $A_2(x) = 3x^3 + 5x^2 + x - 5$ ,  $B_2(x) = 3x - 1$

c)  $A_3(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$ ,  $B_3(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

d)  $A_4(x) = x^4 - x^2 + 1$ ,  $B_4(x) = x^2 + 2x - 1$ ,  $A_6(x) = x^7 + 1$ ,  $B_6(x) = x^3 - 1$

e)  $A_7(x) = x^9 + 2x^6$ ,  $B_7(x) = x^4 + x$

f)  $A_8(x) = \sqrt{6}x^3 - x^2 - 2\sqrt{6}x + 3$ ,  $B_8(x) = \sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{3}$

g)  $A_5(x) = 2x^5 - x^3$ ,  $B_5(x) = x^2 + 1$

3.- Problemes:

a) Determineu el valor de  $m$  a fi que el residu de la divisió

$$(x^3 - 7x^2 + 3x + m) : (x^2 - x + 2)$$
 siga  $-5x + 2$

b) Determineu el valor de  $m$  a fi que el residu de la divisió

$$(x^5 + x^4 + 2x^3 + mx^2 - 5) : (x^3 - x + 2)$$
 siga un polinomi de primer grau.

4.- Factoritzeu els següents polinomis:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 =$$

$$x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 2x^2 =$$

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x =$$

$$x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2 =$$

$$x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 51x^2 - 36x =$$

$$x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 =$$

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2 =$$

$$x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 12x - 8 =$$

5.- Calculeu el mcd(Ai(x), Bi(x)) i el mcm(Ai(x), Bi(x))

$$A1(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12, \quad B1(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$A2(x) = x^2 - 2x - 3, \quad B2(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$$

$$A3(x) = x^2 - 7x + 12, \quad B3(x) = x^3 - 10x^2 + 33x - 36$$

$$A4(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2, \quad B4(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$A5(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \quad B5(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

$$A6(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12, \quad B6(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$$

$$A7(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad B7(x) = x^3 - 1$$

$$A8(x) = x^6 - 1, \quad B8(x) = x^4 - 1$$

$$A9(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x - 4, \quad B9(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 8$$

$$A10(x) = x^3 + 5x^2 + x + 1, \quad B10(x) = x^2 + 5x - 2$$

6.- Simplifiqueu:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6} =$$

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 15} =$$

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} =$$

$$\frac{2x^3 - 2}{x^3 - x^2 - x - 2} =$$

$$\frac{x^2 + 5x - 14}{2x^2 + 20x + 50} =$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} =$$

$$\frac{x^5 - x^2}{x^4 + x^3 + x^2} =$$

$$\frac{7x^2 + 35}{3x^3 - 6x^2 + 15x - 30} =$$

7.- Efectueu les següents operacions, simplificant el resultat.

$$\frac{1-x^2}{x^2-4x} + \frac{3x-x^2}{4x-x^2} + \frac{x^2-x-1}{x^2-4x} =$$

$$\frac{x-4}{x+2} + \frac{x-1}{x+3} =$$

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} =$$

$$\frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2+5x+6} =$$

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-x^2}{x^2-4} =$$

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x-3} =$$

$$\frac{4x-20}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x}{6x^3-150x} =$$

## Equacions, sistemes i inequacions

Exemple 1:

Resoleu l'equació  $3(x+1) = x+5$ .

a) Escriviu l'expressió **solve(3\*(x+1)=x+5)** o bé fer clic en la icona  $\{x|f=0\}$ , o bé en la barra de menús *extras/solve/exact*).

• `solve(3*(x+1)=x+5)`  
`{[x = 1]}`

Nota: Si l'equació no té solució la resposta és  $\emptyset$  o **FAIL**.

Exercici 2:

Resoleu el sistema d'equacions  $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ .

a) Escriviu l'expressió **solve({x+y=3, x^2+y^2=5}, {x, y})** o bé fer clic en la icona  $\{x|f=0\}$ , o bé en la barra de menús *extras/solve/exact*).

• `solve({x+y=3, x^2+y^2=5}, {x, y})`  
`{[x = 1, y = 2], [x = 2, y = 1]}`

Exercici 3:

Resoleu la inequació  $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} \geq 0$ .

a) Escriviu l'expressió **solve(1/x+4/(x-3)>=0, x)** o bé fer clic en la icona  $\{x|f=0\}$ , o bé en la barra de menús *extras/solve/exact*).

• `solve(1/x+4/(x-3)>=0, x)`  
`(3, infinity) union (0, 3/5]`

Exercici 4:

Resoleu el sistema  $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases}$ .

a) Escriviu l'expressió **linsolve({x+y+z=1, x-y+z=2, 2\*x+2\*z=3})** o bé en la barra de menús *extras/solve/Linear System*).

• `linsolve({x+y+z=1, x-y+z=2, 2*x+2*z=3})`  
`[x = 3/2 - z, y = -1/2]`

## Equacions de primer grau amb una incògnita.

1.- Resoleu les següents equacions:

$$3x + 5 - x = 9 - 4x + 8$$

$$7 - 5x + x = 3x + 5 - 4$$

$$25x + 3x - 4 + x - 5x = 6 - 3x + 6 - 1 - x$$

$$0'32x - 3'5x + 8 = 2'86 - 1'3x + 4'2$$

$$8(4x - 3) + 5(7 + x) = (-x - 4) - 2x - 25$$

$$9 - (x + 4) - 7(25 - x + 5) = 6 - 2x - 4(x - 1)$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 10\left(\frac{3x}{5} + \frac{7}{2}\right) = 3\left(\frac{4}{3} - 8x\right) - 2$$

$$4 - 6\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) - 5x = -9(x + 3) - 4\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{5x}{3} + \frac{15}{2} - \frac{5x}{6} = \frac{25}{12} - \frac{x}{4}$$

$$\frac{8x}{45} + 2 - \frac{61}{45} + 3x = \frac{72}{90} + \frac{53}{15}x - 3$$

$$\frac{9x + 5}{14} + \frac{8x}{21} = 2x - \frac{33}{6}$$

$$\frac{x - 4}{32} - \frac{5x + 3}{4} = \frac{-7}{8} - \frac{9x}{16}$$

$$\frac{8x + 9}{25} + \frac{103x}{50} = \frac{x + 3}{10} - \frac{9}{2}$$

$$\frac{9 - 5x}{20} - \frac{7x + 3}{25} = \frac{4x + 1}{5} + \frac{13x - 25}{10}$$

2.- Resoleu les equacions en funció de a, (o de a, b)

$$7x - 4a - 3x = 25 - x + a$$

$$\frac{2x - 1}{a} + \frac{x - 2}{b} = \frac{ax - b}{ab}$$

$$\frac{3x - 7a}{2} = \frac{5x + 1 + 3a}{3}$$

$$\frac{x - 2a}{2} + \frac{2x + 5b}{5} = 9 - \frac{ax - bx}{10}$$

## Equacions de segon grau.

1.- Resoleu les següents equacions:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x^2 - 5x - (2x - 3)^2 + 15 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$3(x - 3) + (x - 3)^2 = 5x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\frac{x^2 - x}{2} - \frac{x - 2}{5} = \frac{x + 2}{15}$$

$$3x^2 + 4x = 0$$

$$9x^2 + 24x + 16 = 0$$

$$x\left(\frac{x}{3} - 3\right) - 5\left(\frac{1}{6} - x\right) = x - \frac{3}{2}$$

$$x^2 + 9 = 0$$

2.- Resoleu les següents equacions biquadrades:

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

$$16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 10 = 0$$

3.- Resoleu les següents equacions amb fraccions algebraiques:

$$\frac{2x}{x+1} + x = \frac{3x+4}{x+1}$$

$$\frac{3}{x-1} + 1 = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{7}{x} = \frac{5x+2}{4}$$

$$\frac{6}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+8x+6}{x^2+x}$$

$$\frac{3x+5}{x-9} = \frac{5-8x}{x+2}$$

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{x-2}{x+4} = \frac{x^2+14x-2}{x^2+x-12} - 3$$

4.- Resoleu les següents equacions irracionals:

$$\sqrt{x^2-5} = 2x+8$$

$$\sqrt{3x+4} - x = -2$$

$$x - \sqrt{2x+5} = \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{x^2+5x+2} = \sqrt{x-4}$$

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 9$$

Sistemes d'equacions lineals.

5.- Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 8x+7y=5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x-5y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-6y=5 \\ -6x+9y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-5y=4 \\ 2x+9y=0 \end{cases}$$

6.- Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals.

$$\begin{cases} 4x-8y+5=3x-6y+3 \\ 3x+2y-1=-2x+6y-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+3)-9=2(7x-3)+5 \\ x-4(x-3y)-(8+y)+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y+5=7y-6x+17 \\ x+4y=7x-8 \end{cases}$$

$$6x+15y=1$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{x-y}{3} = \frac{3x+8}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{2y-7}{3}$$

$$x + \frac{2x+3y}{2} = y - \frac{9-9x}{4}$$

$$x - \frac{10-13y}{6} = y + \frac{x+y}{3}$$

7.- Resoleu els següents sistemes d'equacions lineals.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

$$x-y+4z=4$$

$$3x+2y-5z=-4$$

$$4x+3y-6z=-4$$

$$5x+4y+3z=6$$

$$x-2y+z=5$$

$$x+y-4z=3$$

$$x-8y+11z=10$$

$$x+y-5z=1$$

$$x+2y-15z=-7$$

$$2x+y=10$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + 7y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z - t = 6 \\ x - y + z - t = 2 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z - t = 0 \\ 3x + y + 2z + t = -3 \\ x + 4y - z - 2t = 5 \\ 2y + 3z + t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z - 2t = 2 \\ 2x + y - z + t = 2 \\ x + 2y + z + t = 2 \\ x - y + 2z - t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z - t = 3 \\ x + 3y - 2z + t = -2 \\ -x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 6 \end{cases}$$

## Sistemes d'equacions de segon grau.

8.- Resoleu els següents sistemes d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ 2x - 3y = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 6 \\ y - x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y^2 = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3xy = 8 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - x = 8 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = x + y \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

## Inequacions amb una incògnita

9.- Resoleu les següents inequacions:

$$3x - 2 < 5x + 5$$

$$6x - 8 + x \geq -9 + 3x + 13$$

$$4 - 3x + 1 \leq 9 - 8x + 6$$

$$-1 - x - 6x + 7 > 4x + 6$$

$$(3 - 4x) - (5x - 4) > 6x - (3x - 4)$$

$$x \leq x - 15$$

$$2x \leq 2(x + 3)$$

$$\frac{x-1}{3} - \frac{x+2}{18} > \frac{5x-3}{6}$$

$$\frac{-5x}{21} < -\frac{x-2}{7} + \frac{x+3}{3}$$

$$\frac{4-x}{2} + \frac{5x+2}{6} \leq 1 - \frac{8x-4}{3}$$

10.- Resoleu les següents inequacions:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$x^2 - 4x + 7 \leq 0$$

$$-x^2 + 8x - 16 \geq 0$$

$$3 - 8x + 3x^2 > 2x^2 - 6x + 3$$

$$-x(x-10) \geq 2x-9$$

$$10x - 6x^2 - 7 < 9 + 3x^2 - 14x$$

$$\frac{x+7}{25} \geq \frac{x^2-7}{5}$$

11.- Resoleu les següents inequacions:

$$\frac{x-2}{x+2} > 0$$

$$\frac{x-1}{x+3} < 1$$

$$\frac{7}{2x-1} < 3$$

$$\frac{x}{3-x} > \frac{1}{3-x}$$

$$\frac{7-x}{x} \leq \frac{4}{3}$$

$$\frac{5x-4}{x+2} - 2 \geq \frac{2x}{x+2} + 1$$

12.- Resoleu els següents sistemes d'inequacions:

$$\begin{cases} 5x - 4 \geq 2x + 2 \\ 3x - 8 \leq x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + x < 8 \\ 1 + 3x > 2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5 < 7x - 2 \\ x - 1 < 3x - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2 \geq x - 4 \\ 5 - x > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 15 \leq x - 5 \\ -x + 12 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 10 > -x + 2 \\ 12 - 4x < -3x + 2 \end{cases}$$

13.- Resoleu les següents inequacions:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 \leq 11x + 6$$

$$x^4 + 6x^3 > -9x^2 + 4x + 12$$

$$x^4 + x^3 - 19x^2 \geq +49x + 30$$

$$x^4 + 10x^3 + 37x^2 < -60x - 36$$

$$x^4 - 2x^2 > -1$$

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4 \leq 0$$

$$x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 > 0$$

$$x^5 + 6x^4 + 5x^3 \geq +24x^2 + 36x$$

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 4x < 0$$

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 > 0$$


## Representació gràfica de funcions Operacions amb funcions

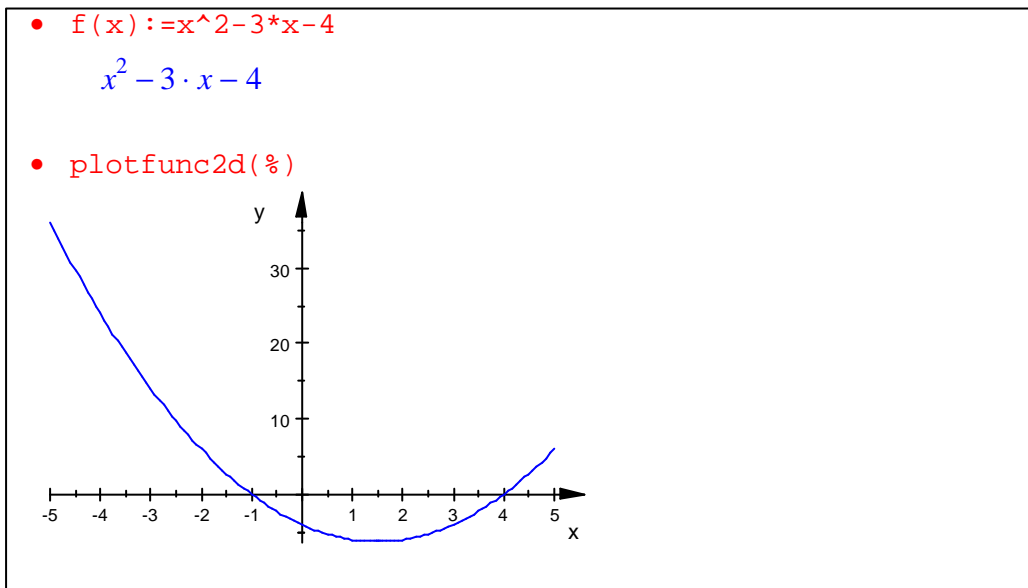
### Exercici 1

Dibuixeu la funció  $f(x) = x^2 - 3x - 4$ .

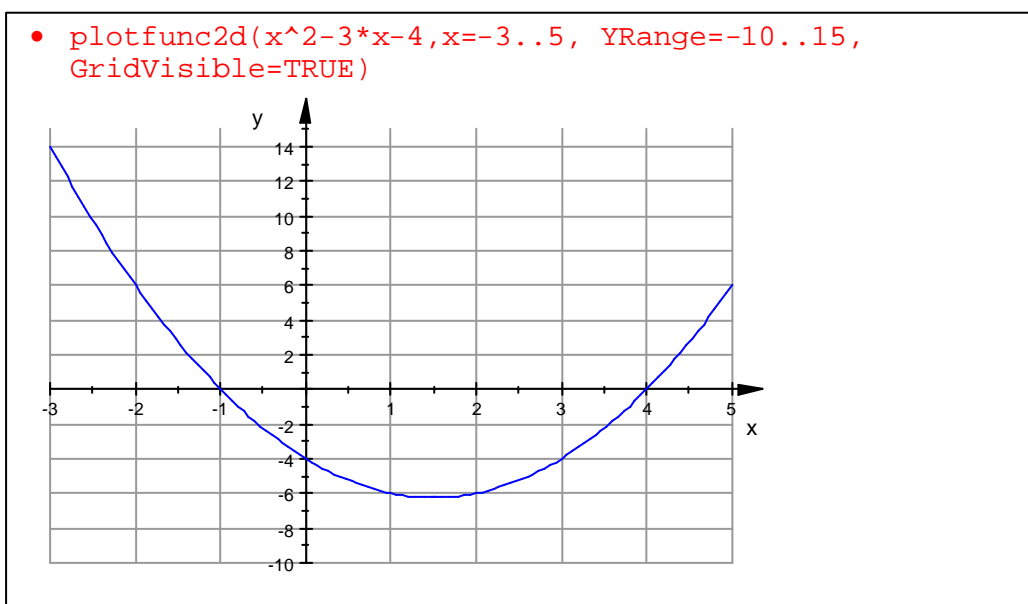
Notem que la funció està escrita en forma explícita.

a) Definir la funció  $f(x) := x^2 - 3 \cdot x - 4$

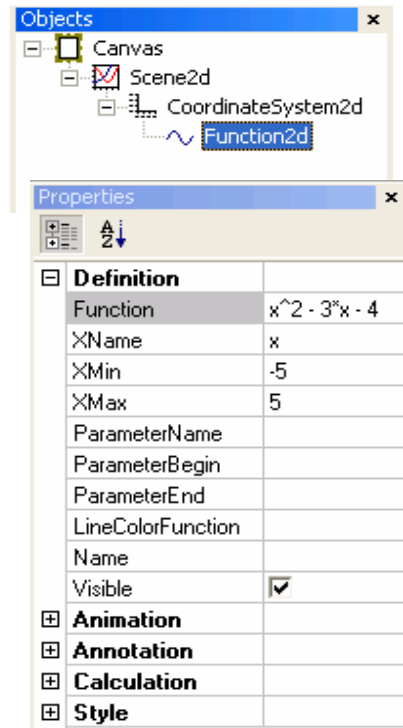
b) Escriviu l'expressió `plotfunc2d(%)` o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús *extras/Plot 2D Function*.



L'expressió més completa de comandament `plotfunc2d(%)` és:

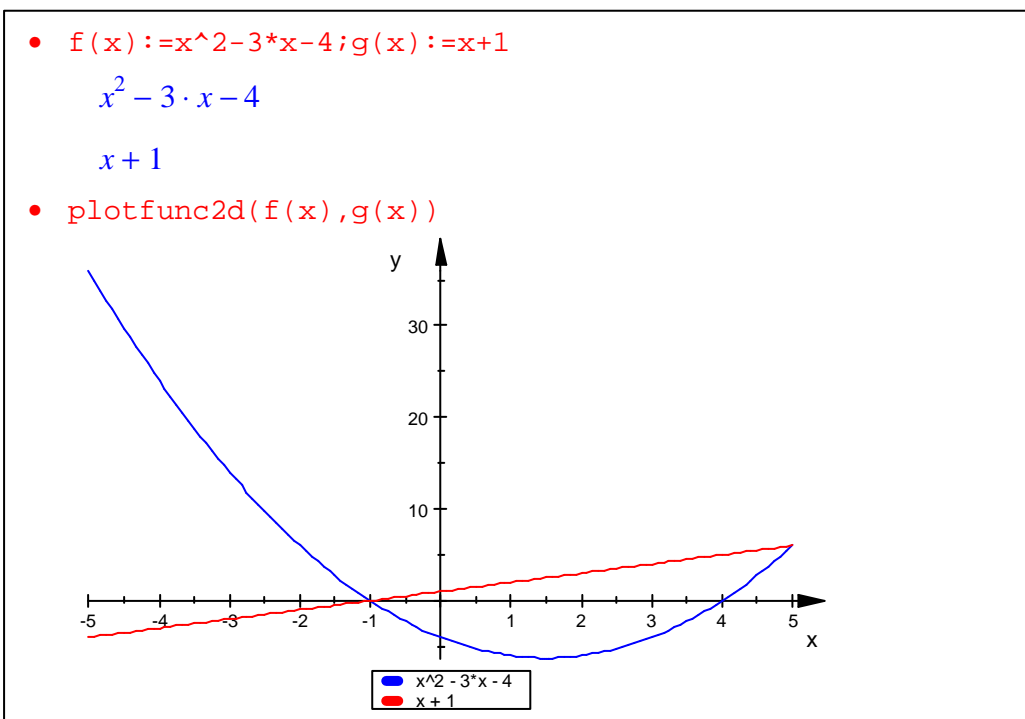


Efectuant doble clic en la finestra gràfica s'obri una finestra amb els valors de la qual es poden canviar els paràmetres de la gràfica.



### Exemple 2

Dibuixar les funcions  $f(x) = x^2 - 3x - 4$ ,  $g(x) = x + 1$ .

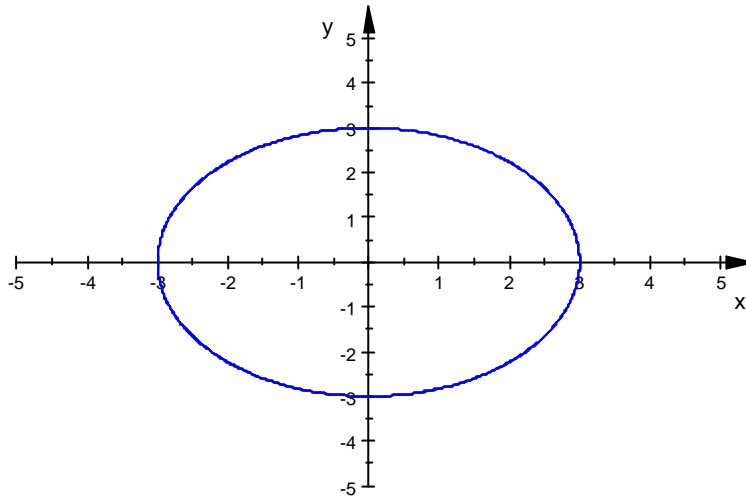


### Exercici 3

Dibuixar la gràfica de la corba  $x^2 + y^2 = 9$ .

La funció està expressada en forma implícita.

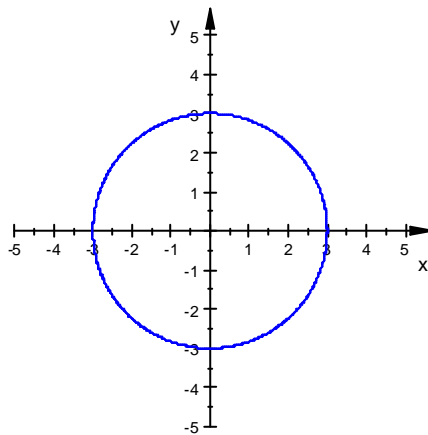
• `plot(plot::Implicit2d(x^2+y^2-9,x=-5..5,y=-5..5))`



Si volem que l'escala dels eixos siga 1:1

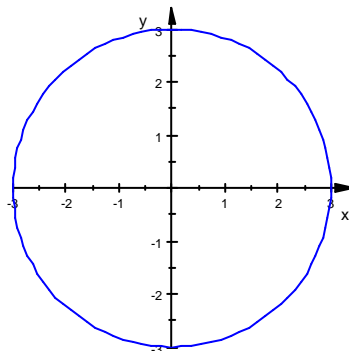
Fer doble clic en la gràfica i escollir *CoordinateSystem2d/Definition/Scaling/Constrained*

• `plot(plot::Implicit2d(x^2+y^2-9,x=-5..5,y=-5..5))`



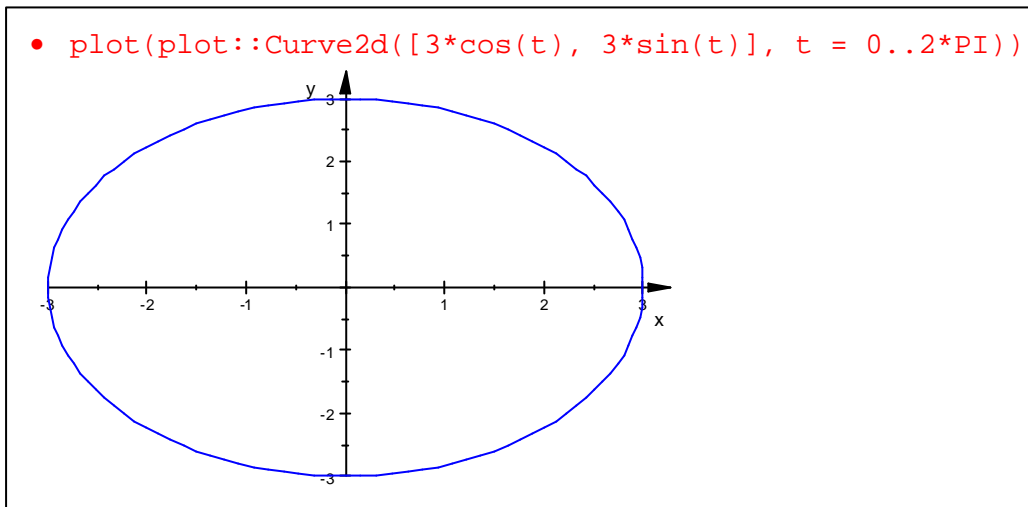
També hauríem pogut utilitzar:

• `plot(plot::Circle2d(3))`



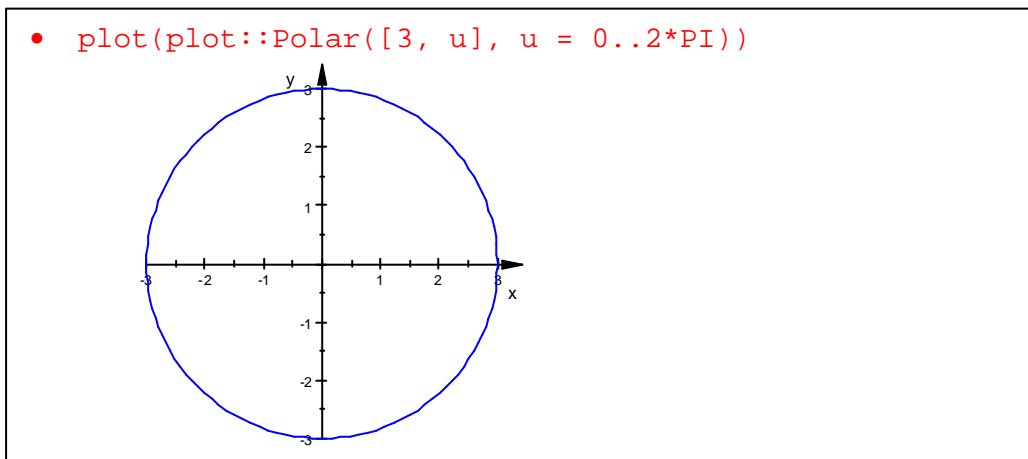
Exercici 4:

Dibuixeu la circumferència d'equacions paramètriques  $\begin{cases} x = 4 \cos x \\ y = 4 \sin x \end{cases}$ .



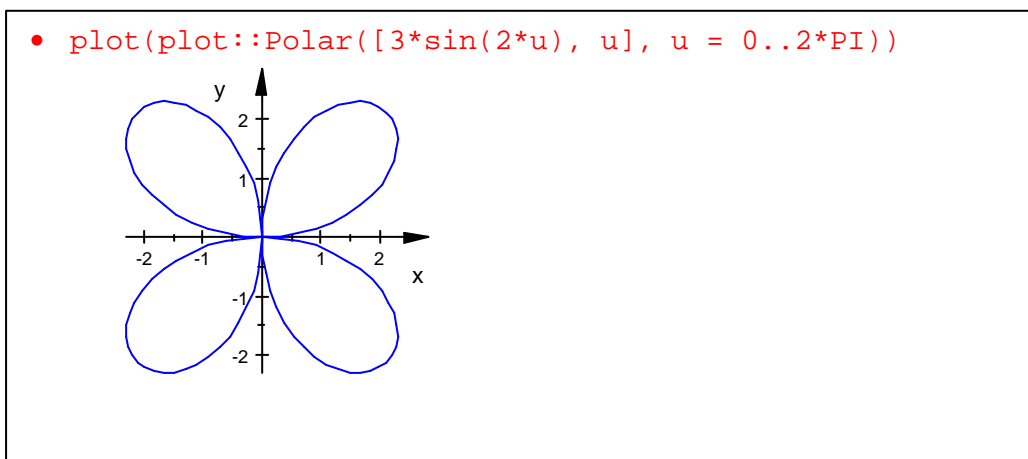
Exercici 5:

Dibuixeu la circumferència d'equació polar  $r = 3$



Exercici 6:

Dibuixeu la corba d'equació polar  $r = 3 \sin 2\theta$



Exercici 7

Dibuixeu la funció definida a trossos  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ .

Per definir la funció a trossos `piecewise([x<=0, 3],[x>0 and x<2, x^2],[x>=2, 1/x])`

- `f(x) := piecewise([x<=0, 3],[x>0 and x<2, x^2],[x>=2, 1/x])`

$$\begin{cases} 3 & \text{if } x \leq 0 \\ x^2 & \text{if } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{if } 2 \leq x \end{cases}$$

- `plotfunc2d(f(x))`

**Algunes funcions**

Funcions de part entera

	x = 2.8	x = -2.8	x = 2.2	x = -2.2
<b>ceil(x)</b>	3	-2	3	-2
<b>floor(x)</b>	2	-3	2	-3
<b>round(x)</b>	3	-3	2	-2
<b>trunc(x)</b>	2	-2	2	-2

Funcions trigonomètriques

EXPRESSIÓ	
<b>sin()</b>	sinus d'un angle
<b>cos()</b>	cosinus d'un angle
<b>tan()</b>	tangent d'un angle
<b>csc()</b>	cosecant d'un angle
<b>sec()</b>	secant d'un angle
<b>cot()</b>	cotangent d'un angle
<b>arcsin()</b>	arcsinus
<b>arccos()</b>	arccosinus
<b>arctan()</b>	arctangent
<b>arcsec()</b>	arcsecant
<b>arccsc()</b>	arccosecant
<b>arccot()</b>	arccotangent

Funcions hiperbòliques

EXPRESSIÓ	
<b>sinh()</b>	sinus hiperbòlic
<b>cosh()</b>	cosinus hiperbòlic
<b>tanh()</b>	tangent hiperbòlica
<b>arcsinh()</b>	argument sinus hiperbòlic
<b>arccosh()</b>	argument cosinus hiperbòlic
<b>arctanh()</b>	argument tangent hiperbòlica

Altres funcions

EXPRESSIÓ	
<b>sign()</b>	signe d'un nombre real
<b>abs()</b>	valor absolut d'un nombre real
<b>sqrt()</b>	arrel quadrada
<b>ln()</b>	logaritme neperià
<b>log(a,x)</b>	logaritme base a de x
<b>E^(x)</b>	funció exponencial

Operadors lògics

Símbol	Operació
<b>and</b>	producte lògic
<b>or</b>	suma lògica
<b>xor</b>	or exclusiu
<b>not</b>	negació
<b>==&gt;</b>	implica
<b>&lt;=&gt;</b>	equivalència

Taula de veritat dels operadors:

A	b	not a	a and b	a or b	a xor b	a ==> b	a <=> b
<b>TRUE</b>	<b>TRUE</b>	false	true	true	false	true	true
<b>TRUE</b>	<b>FALSE</b>	false	false	true	true	false	false
<b>FALSE</b>	<b>TRUE</b>	true	false	true	true	true	false
<b>FALSE</b>	<b>FALSE</b>	true	false	false	false	true	true

### Exercici 8

Siga  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x + 1$

- Calculeu  $f(2)$ ,  $g(-1)$ .
- $f + g$ ,  $fg$ .
- $f \circ g$ ,  $g \circ f$
- $f^2$ ,  $(f^{-1})$ , no és la funció inversa, és la recíproca)

Definim les operacions amb l'operador  $\rightarrow$ .  $f := x \rightarrow x^2$ ,  $g := x \rightarrow x + 1$   
Les operacions s'efectuen de la forma més natural

- $f := x \rightarrow x^2$

$$x \rightarrow x^2$$

- $g := x \rightarrow x + 1$

$$x \rightarrow x + 1$$

- $f(2)$ ;  $g(-1)$

$$4$$

$$0$$

- $(f+g)(x)$

$$x + x^2 + 1$$

- $(f \cdot g)(x)$

$$x^2 \cdot (x + 1)$$

- $f(g(x))$

$$(x + 1)^2$$

- $g(f(x))$

$$x^2 + 1$$

- $(f^2)(x)$

$$x^4$$

- $(f^{-1})(x)$

$$\frac{1}{x^2}$$

## Exercicis de representació gràfica de funcions Exercicis d'operacions amb funcions

1.- Representeu la gràfica de les següents funcions.

a)  $f(x) = 3x - 2$

b)  $g(x) = x^2 - 5x + 6$

c)  $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$

d)  $k(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

e)  $m(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

f)  $n(x) = x^2 \cdot e^x$

g)  $p(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

h)  $q(x) = \sin(x^2)$

i)  $r(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

j)  $s(x) = |x - 3|$

k)  $t(x) = |x^2 - 5x + 6|$

l)  $u(x) = [x]$ , part entera.

m)  $v(x) = e^{x^2}$

n)  $w(x) = |\sin x|$

2.- Representeu la gràfica de les següents corbes.

Corbes geomètriques clàssiques

a) El·lipse

Equació implícita  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Equacions paramètriques  $\begin{cases} x = 5 \cdot \cos t \\ y = 4 \cdot \sin t \end{cases}$ .

Equació polar  $? = \frac{4}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 ?}}$ .

b) Hipèrbola

Equació implícita  $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Equacions paramètriques  $\begin{cases} x = \frac{5}{\cos t} \\ y = 4 \cdot \operatorname{tg} t \end{cases}$ .

Equació polar  $? = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 ? - 1}}$ .

c) Paràbola

Equació implícita  $x^2 = 4y$ . Equacions paramètriques  $\begin{cases} y = t^2 \\ x = 2 \cdot t \end{cases}$ .

L'equació polar  $r = 4 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ .

d) Cissoide de Diocles

Equació implícita  $(x^2 + y^2) \cdot x = 4 \cdot y^2$ . Equació polar  $r = \frac{4(\sin \theta)^2}{\cos \theta}$ .

e) Esferoide

Equació implícita  $x^3 + xy^2 + 4y^2 - 4x^2 = 0$ . Equació polar  $r = \frac{4 \cdot \cos(2\theta)}{\cos \theta}$ .

f) Concoide

Equació implícita  $(x^2 + y^2)(y - 4)^2 - 2^2 y^2 = 0$  Equació polar  $r = \frac{4}{\sin \theta} \pm 2$ .

g) Lemniscata de Bernoulli

Equació implícita  $(x^2 + y^2)^2 = 4^2(x^2 - y^2)$ . Equació polar  $\rho^2 = 4^2 \cos(2\theta)$ .

h) Foli

Equació implícita:  $(x^2 + y^2)^2 = 64x^2$ . Equació polar  $r = 16 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^2(\theta)$ .

i) Cicloide

Equació paramètrica  $\begin{cases} x = 4(t - \sin(t)) \\ y = 4(1 - \cos(t)) \end{cases}$ .

j) Epicicloide

Equació paramètrica  $\begin{cases} x = 8 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(4 \cdot t) \\ y = 8 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(4 \cdot t) \end{cases}$ .

k) Roses

Equació polar  $r = 4 \cdot \cos(2\theta)$ ,  $r = 4 \cdot \cos(3\theta)$ .

l) Cardioide

Equació polar  $r = 8(1 + \cos(\theta))$ .

m) Espiral d'Arquímedes

Equació polar  $r = 16 \cdot \theta$ .

n) Trisectriu de Ceva

Equació polar  $r = 4(1 + 2 \cos(2\theta)) = 4 \frac{\sin(3\theta)}{\sin \theta}$

3.- Dibuixeu la gràfica de les següents funcions definides a trossos.

$$a) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$d) m(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } n(x) &= \begin{cases} x-4 & x < 1 \\ -x^2-2 & x \geq 1 \end{cases} \\
 \text{f) } p(x) &= \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+1 & \text{si } -2 < x < 3 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \\
 \text{g) } q(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \\
 \text{h) } r(x) &= \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ -3 & \text{si } x = 3 \\ \frac{-2x+1}{2} & \text{si } x > 3 \end{cases} \\
 \text{i) } s(x) &= \begin{cases} -2 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+1}{x+4} & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ x^2-9 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4.- Definiu les següents funcions:

$$f(x) = 3x - 2$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$h(x) = \frac{x+1}{x-3}$$

a) Calculeu:

$$\begin{array}{llll}
 f(2) = & f(-2) = & g(1) = & h(-3) = \\
 f(3+a) = & g(2b) = & h(2c-1) = &
 \end{array}$$

b) Calculeu les següents funcions:

$$m_1(x) = f(x) + g(x)$$

$$m_2(x) = g(x) - h(x)$$

$$m_3(x) = 2 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x)$$

$$m_4(x) = f(x) - 2 \cdot g(x) + h(x)$$

$$m_5(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$m_6(x) = f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$$

$$m_7(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$m_8(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + h(x)$$

$$m_9(x) = \frac{3 \cdot g(x)}{h(x)} - 4 \cdot f(x)$$

c) calculeu les següents funcions:

$$n_1(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$n_2(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

Noteu que la composició de funcions no és commutativa.

$$n_3(x) = f \circ h(x) = f(h(x))$$

$$n_4(x) = h \circ f(x) = h(f(x))$$

$$n_5(x) = f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$

$$n_6(x) = f \circ f(x) = f(f(x))$$

5.- Translacions de funcions

a) Definiu i representeu la següent funció:

$$f(x) = x^2$$

b) Definiu les funcions següents:

$$f_1(x) = f(x) + 2$$

$$f_2(x) = f(x) - 3$$

$$f_3(x) = f(x + 4)$$

$$f_4(x) = f(x - 2)$$

$$f_5(x) = f(x + 3) - 4$$

c)- Representeu les funcions de l'apartat b) i compareu-les amb la funció  $f(x)$ .


Expliqueu quin és la propietat gràfica que té la funció  $f_6(x) = f(x - a) + b$  respecte de la funció  $f(x)$ .

## Límits de funcions. Derivades. Integrals.

Exercici 1:

Calculeu  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .


a) Escriviu l'expressió **limit((x^2)/(x^2-1), x=1)** o bé fer clic en la icona

, o bé en la barra de menús *extras/calculus/Limit*).

- `limit((x^2)/(x^2-1), x=1)`  
undefined
- `limit((x^2)/(x^2-1), x=1, Right)`  
 $\infty$
- `limit((x^2)/(x^2-1), x=1, Left)`  
 $-\infty$
- `limit((x^2)/(x^2-1), x=infinity)`  
1

Exercici 2:


Donada la funció  $f(x) = \sin(x^2)$ , calculeu  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ .

b) Escriviu l'expressió **diff(sin(x^2), x)** o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús *extras/calculus/differentiate*).

- `diff(sin(x^2), x)`  
 $2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$
- `diff(diff(sin(x^2), x), x)`  
 $2 \cdot \cos(x^2) - 4 \cdot x^2 \cdot \sin(x^2)$
- `diff(sin(x^2), x, x)`  
 $2 \cdot \cos(x^2) - 4 \cdot x^2 \cdot \sin(x^2)$

Exercici 3:

Calculeu les següents integrals  $\int x^2 + 3x \, dx$  .  $\int \ln x \, dx$  .  $\int x \cdot e^x \, dx$  .  $\int_1^2 x^2 + 3x \, dx$  .

- a) Escriviu l'expressió `int(x^2+3*x, x)` o bé fer clic en la icona  , o bé en la barra de menús *extras/calculus/Integrate*).

- `int(x^2+3*x, x)`

$$\frac{3 \cdot x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

- `int(ln(x), x)`

$$x \cdot \ln(x) - x$$

- `int(x*E^x, x)`

$$e^x \cdot (x - 1)$$

- `int(x^2+3*x, x=1..2)`

$$\frac{41}{6}$$

## Exercicis de límits, derivades i integrals.

1.- Calculeu els següents límits:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 3} =$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 3} =$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 4}{x^2 - 4x + 3} =$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^3 - 2x + 5}{4x^2 - x + 2}} =$

e)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5} =$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^4 - 1} =$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - x}{x + 1} - \frac{2x^2}{x - 1} \right) =$

h)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - 4} =$

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 5x - 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 8} \right) =$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} =$

k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} =$

l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

m)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^3 - x^2 + 6}{7x^4 - 3x^2 + 4} =$

n)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} =$

o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x} =$

p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(x + 2)(x - 3)} - x \right) =$

q)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2 - x^2}}{x - 1} =$

r)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} \right) =$

s)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + 3}{x + 1} \right)^{2x - 1} =$

t)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 3}{x + 1} \right)^{2x - 1} =$

u)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x + 3}{x + 1} \right)^{2x - 1} =$

v)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x =$

w)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 5}{2x - 6} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2x + 1}} =$

x)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^x =$

y)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 2}{2x - 1} \right)^x =$

z)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 2}{2x - 5} \right)^{x + 6} =$

1b.- Dibuixeu les gràfiques de les funcions i comprova els resultats.

2.- Calculeu la derivada de les següents funcions:

1.  $y = x^3 - 9x^2 + 5$

2.  $y = \frac{3}{x}$

3.  $y = (x^2 - 1)(x - 4)$

4.  $y = \frac{2}{x^2 - x}$

5.  $y = (x^2 - 3)^3$

6.  $y = \ln\left(\frac{x^3}{x-1}\right)$

7.  $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

8.  $y = \ln(x^2 - x + 1)$

9.  $y = \ln(\ln x^2)$

10.  $y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

11.  $y = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$

12.  $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

13.  $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

14.  $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

15.  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2 + x}}$

16.  $y = x\sqrt{x-1}$

17.  $y = x^3 \cdot e^{2x}$

18.  $y = 3^x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

19.  $y = e^{x^4}$

20.  $y = e^x \cdot \ln x$

21.  $y = (x^2 - x + 1)e^x$

22.  $y = \frac{3x^3}{8x^2 - 5}$

23.  $y = (x-1)\sqrt{x^2 + 1}$

24.  $y = \sqrt[3]{3x^2} + 5x^3 - 3x + 1$

25.  $y = \sqrt{2x^2 + (x^3 - 1)^5}$

26.  $y = \frac{x^2 - 3x}{e^x}$

27.  $y = (5x^3 - 4x^2 - 1)^5$

28.  $y = \frac{1}{(3x^2 + 1)^3 + 1}$

29.  $y = \ln(x^2 + 5x)^3$

30.  $y = \sqrt[5]{(x^3 + 2)^2}$

31.  $y = \sin^5 x$

32.  $y = \sin(x^5)$

33.  $y = (\sin x^2 + x)^3$

34.  $y = 2^{\ln x}$

35.  $y = e^{5x} \cdot \ln 3x$

36.  $y = 3^{5x} \cdot \cos 2x$

37.  $y = \sin(\sin(3x))$

38.  $y = \ln\sqrt{x}$

39.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(x))$

40.  $y = \ln(x^4 - 3x^2 - 1)$

41.  $y = (x + \cos^4 x)^3$

42.  $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

43.  $y = \arcsin\sqrt{1 - 4x^2}$

44.  $y = \ln\sqrt{\cos x}$

45.  $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$

46.  $y = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$

47.  $y = \frac{\sin x}{\sin x + \frac{1}{\sin x}}$

48.  $y = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$

49.  $y = \sin(\sin(\sin x^2))$

50.  $y = \sin\left(\ln\sqrt[3]{x^2 - 1}\right)$

51.  $y = (x - \ln x)^3$

52.  $y = \arcsin\sqrt{\ln \frac{x^2 - 1}{x^3}}$

53.  $y = \arcsin \frac{1 + \operatorname{cotg} 4x}{1 + \operatorname{cotg} x^4}$

54.  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

55.  $y = e^x + e^{2x} - e^{3x}$

56.  $y = \cos(3^x)$

57.  $y = \ln(3x^2 - x)^5$

58.  $y = \frac{2x^3}{\sqrt{1-x}}$

59.  $y = \frac{e^x + e^{2x}}{3}$

60.  $y = \ln(\operatorname{arctg} x^3)$

61.  $y = \ln\sqrt{1 + \sin x}$

62.  $y = \sin(\ln x)$

63.  $y = x^3 \cdot e^{2x}$

64.  $y = \left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right)^5$

65.  $y = \frac{2 \ln x}{x}$

66.  $y = \sin^2(x^4 + 2x)$

67.  $y = \ln\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

68.  $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)$

69.  $y = \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x - 1}$

70.  $y = \sqrt[6]{2^x + x^2}$

71.  $y = \operatorname{tg}^2(\arcsin x)$

72.  $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

3.- Calculeu les següents integrals indefinides.

1.  $\int (3x^5 + 2x^2 - 3x + 5)dx$
2.  $\int (\cos x + \operatorname{tg} x)dx$
3.  $\int \frac{2x+1}{x^2}dx$
4.  $\int x^2(3x^3 + 14)^3 dx$
5.  $\int \sqrt[5]{5x+6} dx$
6.  $\int \frac{17x}{\sqrt[3]{6x^2+8}} dx$
7.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$
8.  $\int \sec^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$
9.  $\int \frac{dx}{(3x+1)^4}$
10.  $\int \operatorname{cotg} x \sqrt{\ln(\sin x)} dx$
11.  $\int \cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx$
12.  $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} dx$
13.  $\int \sqrt{x^2-2x^4} dx$
14.  $\int x^2 \cdot 7^{x^3+5} dx$
15.  $\int \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
16.  $\int \frac{e^{\operatorname{arcsin} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17.  $\int \cos 3x \cdot e^{\sin 3x} \cdot dx$
18.  $\int \frac{6^{\ln x}}{x} dx$
19.  $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$
20.  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$
21.  $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx$
22.  $\int \frac{7^{2x}}{7^{2x} + 5} dx$
23.  $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$
24.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$
25.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 2x + 5}}$
26.  $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 3x}}$
27.  $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 7}}$
28.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$
29.  $\int \frac{x}{\sqrt{1-6x^4}} dx$
30.  $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
31.  $\int \frac{dx}{-4x^2 + 3x}$
32.  $\int \frac{dx}{5x^2 - 3}$
33.  $\int 3x \cdot \sqrt[3]{(7x^2 + 12)^2} dx$
34.  $\int (e^{3x} - e^{-3x}) dx$
35.  $\int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx$
36.  $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$
37.  $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx$
38.  $\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$
39.  $\int \frac{8x^2 + 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx$
40.  $\int \frac{3x - 2}{x^2 + x + 1} dx$
41.  $\int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx$
42.  $\int \frac{x - 2}{(x^2 + x + 1)^2(x - 1)} dx$
43.  $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 2)^2} dx$
44.  $\int \frac{x^2}{1 + x^4} dx$
45.  $\int \frac{dx}{1 + x^6}$
46.  $\int \frac{dx}{e^x + 1}$
47.  $\int \frac{e^x + 1}{e^x - 4 + 4e^{-x}} dx$
48.  $\int \frac{\ln 2x}{x \cdot \ln 4x} dx$
49.  $\int \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{4 + x^2} dx$
50.  $\int \frac{dx}{\sin x}$
51.  $\int \frac{\sin x}{1 + 4 \cos^2 x} dx$
52.  $\int \frac{1}{\cos x} dx$
53.  $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$
54.  $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$
55.  $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$
56.  $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$
57.  $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} dx$
58.  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$
59.  $\int \frac{x}{\sin x} dx$

4.- Calculeu les següents integrals indefinides

1.  $\int_1^2 (x^2 + x - 3)dx$

2.  $\int_2^3 \sqrt{x-2}dx$

3.  $\int_0^1 x \cdot e^{x^2-1}dx$

4.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$

5.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6.  $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$

7.  $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx$

8.  $\int_1^2 \ln(x^2+1)dx$

9.  $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$

10.  $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1} dx$


## Representació de superfícies en 3D (coordenades cartesianes)

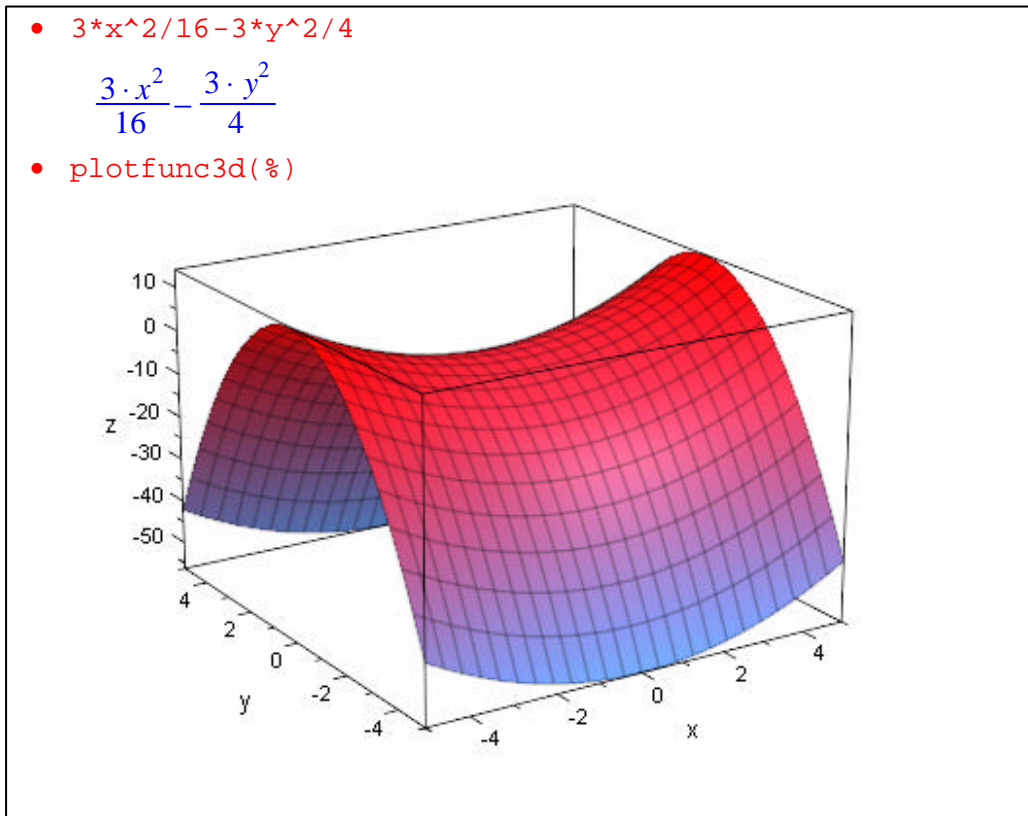
### Exercici 1

Representeu la superfície (paraboloide hiperbòlic):

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = \frac{z}{3} \quad \text{Aïllem la incògnita } z, \quad z = \frac{3x^2}{16} - \frac{3y^2}{4}$$

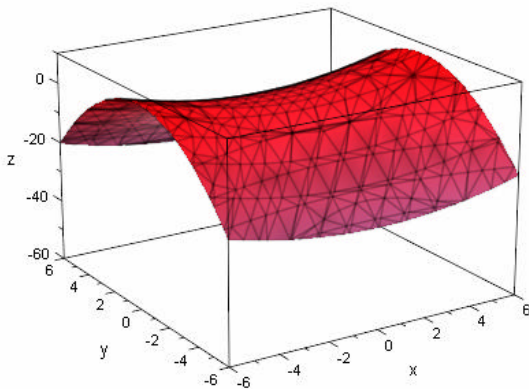
a) Definim la superfície  $3*x^2/16-3*y^2/4$

b) Escriviu l'expressió `plotfunc3d(%)` o bé fer clic en la icona , o bé en la barra de menús *extras/Plot 3D Funtion*.



O bé:

- `plot(plot::Implicit3d(x^2/16-y^2/4=z/3,x = -6..6,y = -6..6,z = -60..10))`



Exercici 2:

Representeu la superfície (paraboloide hiperbòlic):

$$\begin{cases} x = 4u \\ y = 2v \\ z = 3(u^2 - v^2) \end{cases}$$

a) Definir la superfície

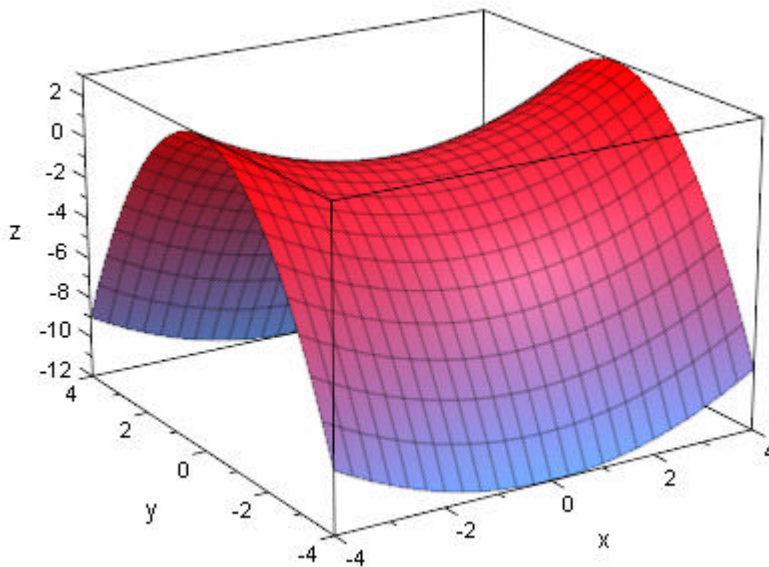
```
plot::Surface([4*u, 2*v, 3*(u^2-v^2)],u=-1..1,v=-2..2)
```

b) Dibuixar la funció `plot(%)`

```
• plot::Surface([4*u, 2*v, 3*(u^2-v^2)],u=-1..1,v=-2..2)
```

```
plot::Surface([4·u, 2·v, 3·u2 - 3·v2], u = -1 ..1, v = -2 ..2)
```

```
• plot(%)
```



Notes:

Fent un doble clic en la gràfica es poden variar el paràmetre de la gràfica, així com canviar amb el ratolí la visualització de la gràfica.

1.- Representeu les següents superfícies:

El·lipsoïde

$$a) \begin{cases} x = 3 \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z = \sin \alpha \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 3 \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = 3 \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z = \sin \alpha \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z = 4 \sin \alpha \end{cases}$$

$$d) \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici a).

Hiperboloïde d'un full

$$a) \begin{cases} x = 2\sqrt{1+u^2} \cos v \\ y = \sqrt{1+u^2} \sin v \\ z = 4u \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \sqrt{1+u^2} \cos v \\ y = \sqrt{1+u^2} \sin v \\ z = 4u \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2 \frac{\cos v}{\cos u} \\ y = \frac{\sin v}{\cos u} \\ z = 4 \cdot \operatorname{tg} u \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici a).

$$d) \begin{cases} x = 2 \cdot \operatorname{ch} u \cdot \cos v \\ y = \operatorname{ch} u \cdot \sin v \\ z = 4 \cdot \operatorname{ch} u \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici a).

$$e) \begin{cases} x = 2(\cos u - v \cdot \sin u) \\ y = \sin u + v \cdot \cos u \\ z = 4 \cdot v \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici a)

$$f) \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{4^2} = 1$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici a).

Hiperboloïde dos fulls

$$a) \begin{cases} x = 3\sqrt{u^2-1} \cos v \\ y = 2\sqrt{u^2-1} \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \sqrt{u^2-1} \cos v \\ y = \sqrt{u^2-1} \sin v \\ z = 2u \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2\sqrt{u^2-1} \cos v \\ y = \sqrt{u^2-1} \sin v \\ z = 3u \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 2\sqrt{u^2-1} \cos v \\ y = 2\sqrt{u^2-1} \sin v \\ z = 2u \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 3\sqrt{u^2-1} \cos v \\ y = \sqrt{u^2-1} \sin v \\ z = 3u \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 2 \cdot \operatorname{tg} u \cdot \cos v \\ y = \operatorname{tg} u \cdot \sin v \\ z = \frac{3}{\cos u} \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici c).

$$g) \begin{cases} x = 2 \cdot \sinh u \cdot \cos v \\ y = \sinh u \cdot \sin v \\ z = \pm 3 \cdot \cosh u \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici c).

$$h) \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} - \frac{z^2}{3^2} = -1$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici c).

Paraboloide hiperbòlic:

$$a) \begin{cases} x = \frac{3 \cdot u}{\cos v} \\ y = u \cdot \operatorname{tg} v \\ z = 3 \cdot u^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \frac{2 \cdot u}{\cos v} \\ y = 2 \cdot u \cdot \operatorname{tg} v \\ z = 4 \cdot u^2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = \frac{u}{\cos v} \\ y = u \cdot \operatorname{tg} v \\ z = u^2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = \frac{4 \cdot u}{\cos v} \\ y = 2 \cdot u \cdot \operatorname{tg} v \\ z = u^2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 2(u + v) \\ y = (u - v) \\ z = uv \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici d).

$$f) \begin{cases} x = 4 \cdot u \\ y = 2 \cdot v \\ z = (u^2 - v^2) \end{cases}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici d)

$$g) \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = \frac{z}{1}$$

vegeu que dóna el mateix que l'exercici d).

Paraboloide el·líptic

$$a) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = z$$

$$b) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 3z$$

$$c) \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2z$$

$$d) \frac{x^2}{3} + y^2 = 2z$$

$$e) x^2 + y^2 = z$$

$$f) x^2 + y^2 = 2z$$

$$g) \begin{cases} x = \sqrt{6 \cdot u} \cdot \cos v \\ y = \sqrt{2 \cdot u} \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

Noteu que dóna el mateix que d).

$$h) \begin{cases} x = \sqrt{2 \cdot u} \cdot \cos v \\ y = \sqrt{2 \cdot u} \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

Noteu que dóna el mateix que e).

Con el·líptic

$$a) \begin{cases} x = 3 \cdot u \cdot \cos v \\ y = 2 \cdot u \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 2 \cdot u \cdot \cos v \\ y = 2 \cdot u \cdot \sin v \\ z = 3u \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 3 \cdot u \cdot \cos v \\ y = 2 \cdot u \cdot \sin v \\ z = 3u \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 2 \cdot u \cdot \cos v \\ y = 3 \cdot u \cdot \sin v \\ z = 2u \end{cases}$$

$$f) \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = \frac{z^2}{1^2}$$

Cilindre

$$a) \begin{cases} x = 4 \cdot \cos v \\ y = 2 \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x = 4 \cdot v \\ y = 2v^2 \\ z = u \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 3 \cdot \cos v \\ y = 3 \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x = 3 \cdot v \\ y = \frac{3}{2}v^2 \\ z = u \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2 \cdot \cos v \\ y = 3 \cdot \sin v \\ z = u \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x = -2 \cdot v \\ y = -v^2 \\ z = u \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = \pm 4 \cdot \cosh v \\ y = 2 \cdot \sinh v \\ z = u \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x = -3 \cdot v \\ y = \frac{-3}{2}v^2 \\ z = u \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = \pm \cosh v \\ y = \sinh v \\ z = u \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 4 \cdot \cosh v \\ y = \pm 2 \cdot \sinh v \\ z = u \end{cases}$$

Aresta cònica de Wallis

$$a) x^2 z^2 = 2^2 (x^2 - y^2)$$

$$b) \begin{cases} x = U \\ y = u \cdot \sin v \\ z = 2 \cdot \cos v \end{cases}$$

Caixa d'ous

$$z = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$$

Tor

$$\begin{cases} x = (3 + \cos v) \cos u \\ y = (3 + \cos v) \sin u \\ z = \sin v \end{cases}$$

Catenoide

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cosh(u) \cdot \cos(v) \\ y = 2 \cdot \cosh(u) \cdot \sin(v) \\ z = 2u \end{cases}$$

Astroidal

$$\begin{cases} x = 5 \cdot \cos^3 u \cdot \cos^3 v \\ y = 5 \cdot \sin^3 u \cdot \cos^3 v \\ z = 5 \cdot \sin^3 v \end{cases}$$

Helicoide normal tancat

$$\begin{cases} x = -u \cdot \sin(v) \\ y = u \cdot \cos(v) \\ z = v \end{cases}$$

Helicoide Dret

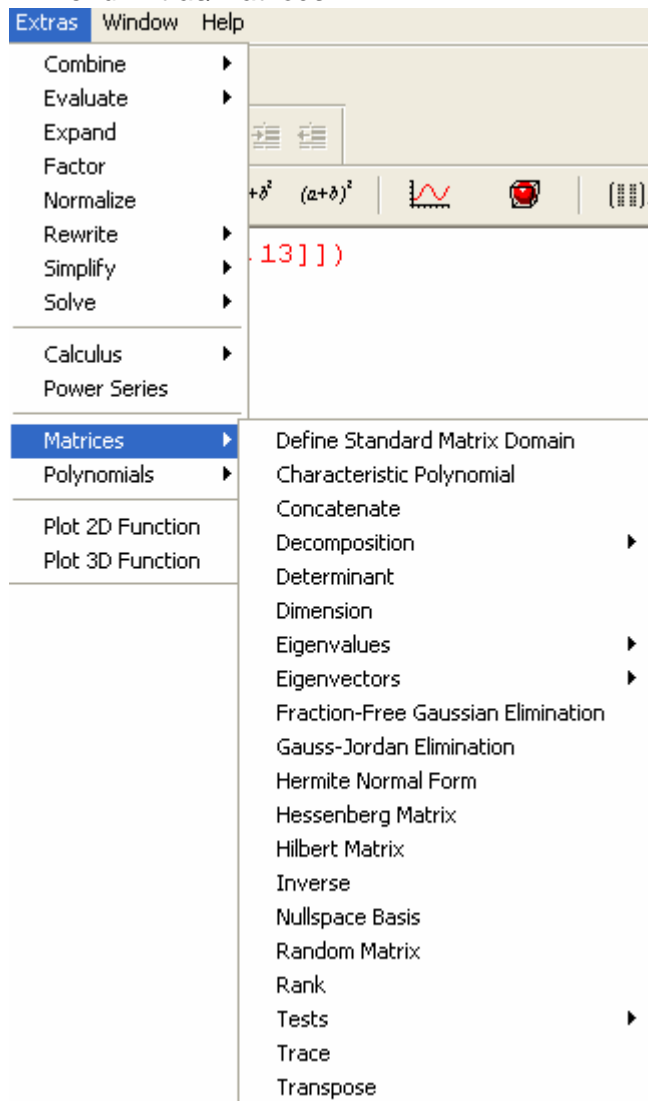
$$\begin{cases} x = \cos(u) + \cos(v) \\ y = \sin(u) + \sin(v) \\ z = 2(u + v) \end{cases}$$

Pseudoesfera

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(v)}{\cosh(u)} \\ y = \frac{\sin(v)}{\cosh(u)} \\ z = \frac{\sin(v)}{u - \operatorname{tgh}(u)} \end{cases}$$

## Matrius

### El menú *Extras/Matrices*



Per definir una funció s'utilitza

`matrix([[a11, a12, a13, a14], [a21, a22, a23, a24], [a31, a32, a33, a34]])`

o bé fer clic en la icona 

Les operacions amb matrius s'efectuen amb ajut del menú *Extras/Matrices*

### Exercici 1

Donada la matriu  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -7 & -3 & 6 & -9 \\ 12 & 1 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

Calculeu  $A^t$ ,  $\text{rang}A$ , dimensió de  $A$ .

a) Per definir la matriu s'utilitza:

`A:=matrix([[5,-2,3,4],[-7,-3,6,-9],[12,1,-3,13]])`

b) Per calcular la transposada d'una matriu s'utilitza: `linalg::transpose(A)`

c) Per calcular el rang s'utilitza: `linalg::rank(A)`

d) Per calcular la dimensió de la matriu s'utilitza: `linalg::matdim(A)`

• `A:=matrix([[5,-2,3,4],[-7,-3,6,-9],[12,1,-3,13]])`

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -7 & -3 & 6 & -9 \\ 12 & 1 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

• `linalg::transpose(A)`

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 12 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 4 & -9 & 13 \end{pmatrix}$$

• `linalg::rank(A)`

2

• `linalg::matdim(A)`

[3, 4]

Exercici 2

Siguen les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculeu:

- $A+B$
- $3A-B$
- $AC$
- $CA$

•  $A:=\text{matrix}([[1,-2,3], [4,0,-1]])$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

•  $B:=\text{matrix}([[3,2,-1], [1,-1,4]])$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

•  $C:=\text{matrix}([[1,0], [2,-3], [1,2]])$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

•  $A+B$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

•  $3*A-B$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 & 10 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

•  $A*C$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

•  $C*A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -10 & -4 & 9 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 3:

Siguen les matrius quadrades  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculeu:

- $A^2$ ,  $A^{-1}$ .
- $B^3$ ,  $B^{-1}$ .
- $|A|$ ,  $|B|$ .

• `A:=matrix([[1,-2],[3,4]])`

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

• `B:=matrix([[1,-2,3],[0,2,1],[4,-1,2]])`

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

• `A^2`

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

• `A^-1`

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

• `B^3`

$$\begin{pmatrix} 41 & -51 & 44 \\ 20 & -6 & 23 \\ 72 & -63 & 54 \end{pmatrix}$$

• `B^-1`

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{27} & -\frac{1}{27} & \frac{8}{27} \\ -\frac{4}{27} & \frac{10}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{8}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{2}{27} \end{pmatrix}$$

• `linalg::det(A)`

$$10$$

• `linalg::det(B)`

$$-27$$

Exercici 4

Siguen les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $C = (2 \ 2 \ 2)$

- a) Uneix verticalment les matrius A i B.  
b) Uneix horitzontalment les matrius A i C.

• `A:=matrix([[1,2,3], [0,3,4], [-1,2,-4]])`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

• `B:=matrix([[5], [5], [5]])`

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

• `C:=matrix([[2,2,2]])`

$$(2 \ 2 \ 2)$$

• `linalg::concatMatrix(A, B)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

• `linalg::stackMatrix(A, C)`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

## Exercicis amb matrius

1.- Siguen les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculeu:

$A^t B$ ,  $3AB$ ,  $A^3$ ,  $5A^4 B$ .

2.- Siguen les matrius  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & -6 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculeu:

$A+B$ ,  $A-B$ ,  $3A-5B$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2 B$ ,  $(AB)^2$ ,  $A^2 B^2$ ,  $(AB)^{-1}$ ,  $B^{-1} A^{-1}$ .

3.- Calculeu el determinant i la matriu inversa de les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ -7 & -3 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 7 & -3 & 6 & -9 \\ 8 & 7 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

4.- Calculeu el determinant de les següents matrius, factoritzant el resultat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{pmatrix}$$

5.- Determineu els valors de  $m$  a fi que la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$  tinga inversa, calculeu la matriu inversa en aquests casos.

6.- Calculeu el rang de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7.- Calculeu el rang de la matriu  $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$  segons els valors de  $m$ .

## Problemes per a resoldre amb MuPAD.

1. Determineu la intersecció de la recta  $r \equiv x + y + 2 = 0$  i la recta  $s$  que passa pels punts  $(-2, -3), (1, 3)$ .

2. Siga el triangle  $\triangle ABC$  de vèrtexs  $A(0,0), B(3,0), C(0,3)$ .  
Proveu que el baricentre del triangle és  $G(1, 1)$ .

3. Siga el triangle  $\triangle ABC$  de vèrtexs  $A(a,b), B(c,d), C(e,f)$   
Proveu que el baricentre del triangle és  $G\left(\frac{a+c+e}{3}, \frac{b+d+f}{3}\right)$ .

Proveu la propietat del baricentre: el baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

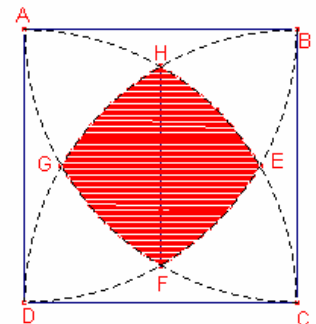
4. Siga el triangle  $\triangle ABC$  de vèrtexs  $A(0,0), B(4,0), C(0,4)$ .  
Calculeu el circumcentre del triangle  $\triangle ABC$ .

5. Siga el triangle  $\triangle ABC$  de vèrtexs  $A(a,b), B(c,d), C(e,f)$ .  
Calculeu el circumcentre del triangle  $\triangle ABC$ .

6. Demostreu que si en un triangle es verifica  $\frac{a}{\cos \hat{A}} = \frac{b}{\cos \hat{B}}$  aleshores el triangle és isòsceles.  
Nota: Utilitzeu el teorema dels cosinus.

7.  
a) Resoleu el triangle coneguts  $a = 10, b = 8, c = 4$ .  
b) Resoleu el triangle coneguts  $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$ .

8.  
Els punts  $A, B, C, D$  són els vèrtexs d'un quadrat de costat  $\overline{AB} = 1$ .  
Amb centres els vèrtexs i radis iguals a 1 dibuixem 4 circumferències.  
La intersecció de les 4 circumferències determinen un quadrilàter curvilini  $EFGH$ .  
Determineu l'àrea del quadrilàter:



9.

Considerem els punts  $A(a, b)$ ,  $B(c, d)$  dos dels tres vèrtexs d'un triangle equilàter. Determineu el tercer vèrtex en funció de les coordenades de A i B.

10. Les tres mitjanes d'un triangle mesuren:  $m_a = 3, m_b = 4, m_c = 5$  calculeu els costats i els angles.

11.

Conegudes les tres mitjanes  $m, n, p$  d'un triangle determineu-lo.

12. De tots els rectangles de perímetre 10 determineu el de mínima diagonal.

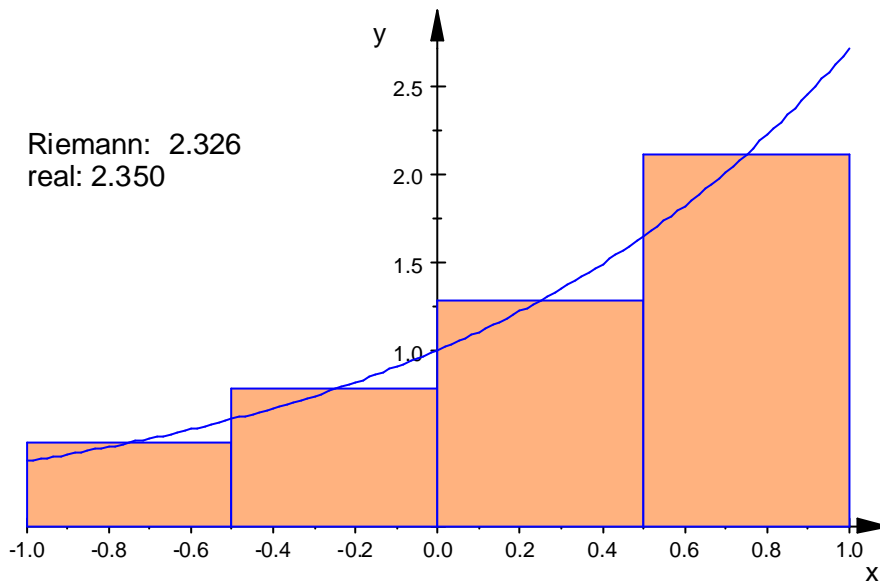
13. Partim un cordell de longitud  $L$  en dos trossos i amb cada tros construïm un quadrat i un cercle. De quina manera ho hem de fer a fi que la suma de les àrees del quadrat i del cercle siga mínima.

14.- Estudieu la funció  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

## Calaix de sastre

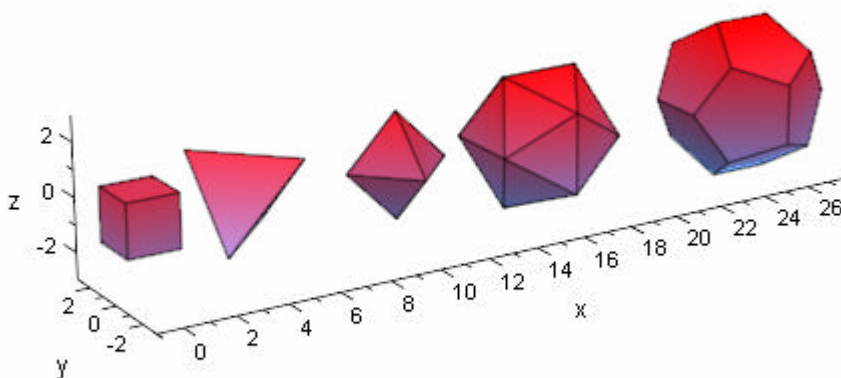
### Integral de Riemann

```
plot(student::plotRiemann(exp(x), x = -1..1, 4))
```



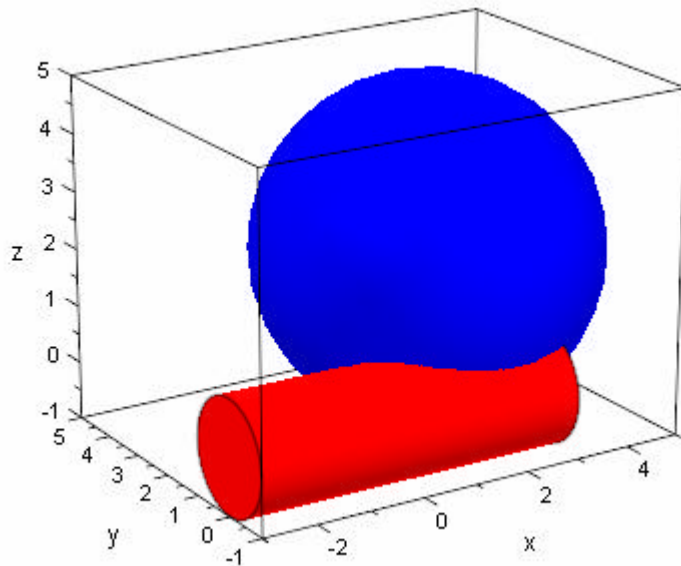
### Políedres regulars:

```
plot(plot::Hexahedron (Radius = 1.0, Center = [0, 0, 0]),  
      plot::Tetrahedron (Radius = 1.5, Center = [4, 0, 0]),  
      plot::Octahedron (Radius = 2.0, Center = [10, 0, 0]),  
      plot::Icosahedron (Radius = 2.5, Center = [16, 0, 0]),  
      plot::Dodecahedron(Radius = 3.0, Center = [25, 0, 0]),  
      Axes = Frame);
```



## Cilindre i esfera

```
plot(plot::Cylinder(1, [-3, 0, 0], [3, 0, 0],  
      Color = RGB::Red),  
      plot::Sphere(3, [2, 2, 2], Color = RGB::Blue))
```



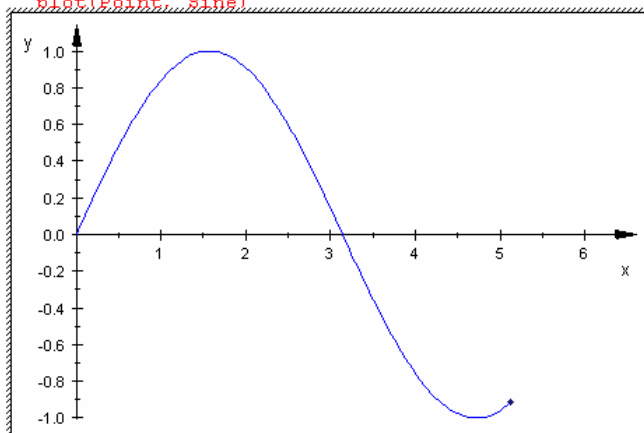
## Animació de la funció $f(x) = \sin x$

```
Point:= plot::Point2d(a, sin(a), a = 0..2*PI):  
Sine:= plot::Function2d(sin(x), x = 0..a, a = 0..2*PI):  
plot(Point, Sine)
```

Fent un doble clic en la finestra gràfica en el menú apareix una ferramenta d'animació

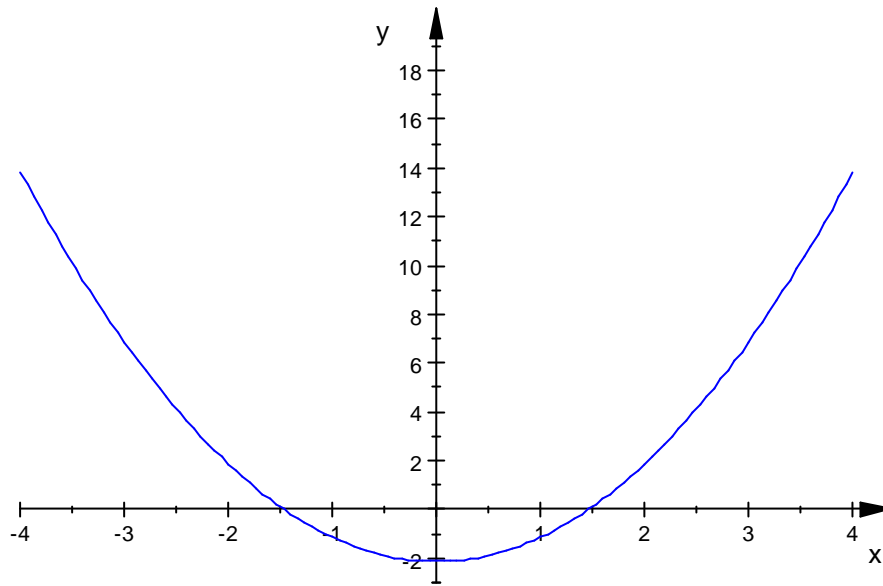


```
• Point:= plot::Point2d(a, sin(a), a = 0..2*PI):  
  Sine:= plot::Function2d(sin(x), x = 0..a, a = 0..2*PI):  
  plot(Point, Sine)
```



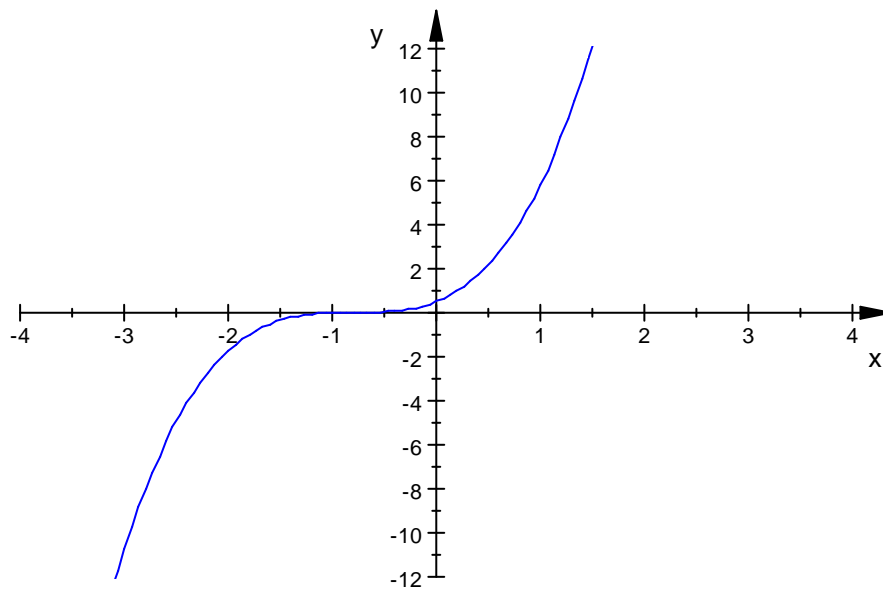
### Trasllat vertical d'una paràbola

```
plot(plot::Function2d(x^2+a, x = -4..4, a = -3..3))
```



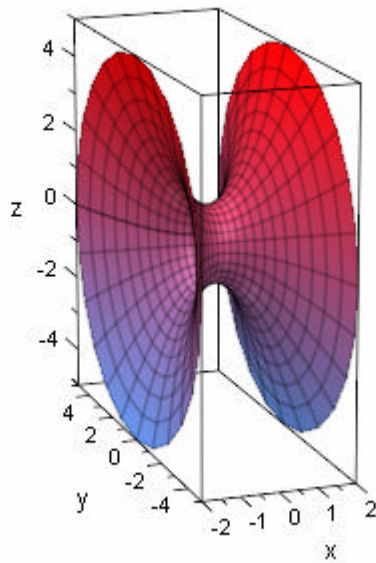
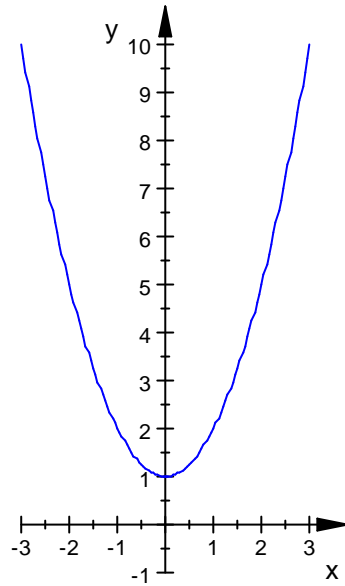
### Trasllat horitzontal d'una cúbica

```
plot(plot::Function2d((x-a)^3, x = -4..4, a = -3..3))
```



Superfície de revolució d'una corba al voltant de l'eix X.

- $a:=x^2+1$
- `plotfunc2d(a,x=-3..3,YRange=-1..10,Scaling = Constrained);`  
`plot(plot::XRotate(a, x = -2..2,Scaling = Constrained))`



Termes d'una successió, càlcul del límit i representació gràfica.

- `a:=n->n^2/(2*n^2+1)`

$$n \rightarrow \frac{n^2}{2 \cdot n^2 + 1}$$

- `M:=20`

20

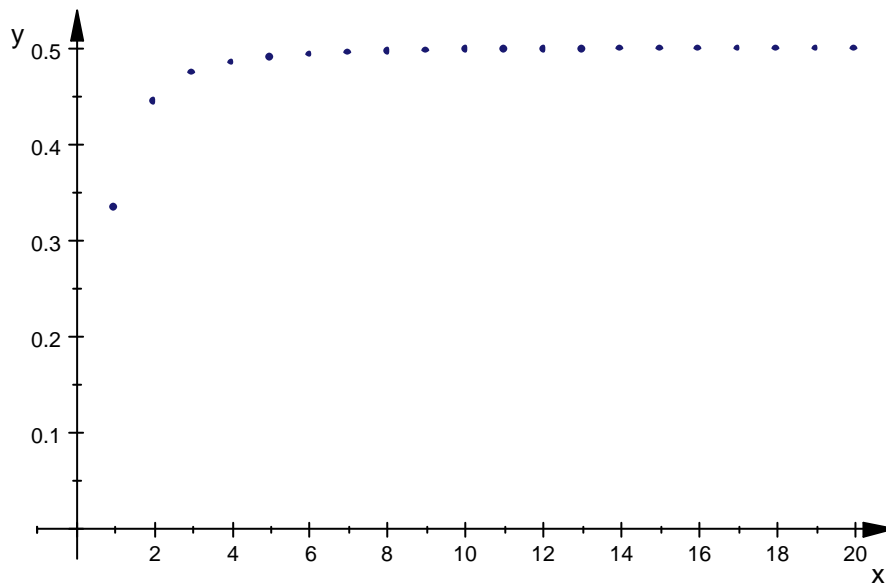
- `a(n) $ n=1..M`

$\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{9}{19}, \frac{16}{33}, \frac{25}{51}, \frac{36}{73}, \frac{49}{99}, \frac{64}{129}, \frac{81}{163}, \frac{100}{201}, \frac{121}{243}, \frac{144}{289}, \frac{169}{339}, \frac{196}{393}, \frac{225}{451}, \frac{256}{513}, \frac{289}{579}, \frac{324}{649}, \frac{361}{723}, \frac{400}{801}$

- `limit(a(n), n=infinity)`

$$\frac{1}{2}$$

- `plot(plot::Point2d([n, a(n)]) $ n=1..M)`



## Successions recurrents

### Exercici

Donada la successió de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,.....

Calculeu el terme general i el terme 10.

Solució:

Notem que la fórmula de recurrència és  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $a_1 = a_2 = 1$

- $a(n+2) = a(n+1) + a(n)$

$$a(n+2) = a(n) + a(n+1)$$

- $\text{solve}(\text{rec}(\%, a(n), \{a(1)=1, a(2)=1\}))$

$$\left\{ \frac{\sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n}{5} + \frac{(3 \cdot \sqrt{5} - 5) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{5 \cdot \sqrt{5} - 15} \right\}$$

- $\text{simplify}(\text{subs}(\%, n = 10))$

$$\{55\}$$

### Exercici 2:

Siga la successió  $\{a_n\}$  definida per  $12a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ .

a) Determineu el terme general.

b) Calculeu  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

c) Calculeu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Solució:

- $12 \cdot a(n+2) = a(n+1) + a(n)$

$$12 \cdot a(n+2) = a(n) + a(n+1)$$

- $\text{solve}(\text{rec}(\%, a(n), \{a(1)=1, a(2)=2\}))$

$$\left\{ \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{7} + \frac{80 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{7} \right\}$$

- $\text{limit}(\text{op}(\%), n=\text{infinity}), \text{sum}(\text{op}(\%), n=1..\text{infinity})$

$$0, \frac{7}{2}$$

## Nombres complexos

Exercici 1:

Calculeu:

$$(2+i)(3-2i)$$

$$\frac{2+i}{3-2i}$$

$$(2-2i)^3$$

$$(3+i)^4 i$$

$$(1+i)^{10}$$

Calculeu el mòdul i argument dels complexos,  $1+i\sqrt{3}$ ,  $\frac{2+i}{3-2i}$ .

- $(2+I) * (3-2*I)$

$$8 - i$$

- $(2+I) / (3-2*I)$

$$\frac{4}{13} + \frac{7 \cdot i}{13}$$

- $(2-2*I)^3$

$$-16 - 16 \cdot i$$

- $(2+I)^4 * I$

$$-24 - 7 \cdot i$$

- $(1+I)^{10}$

$$32 \cdot i$$

- $\text{abs}(1+I*\text{sqrt}(3)), \text{arg}(1+I*\text{sqrt}(3))$

$$2, \frac{\pi}{3}$$

- $\text{abs}((2+I)/(3-2*I)), \text{arg}((2+I)/(3-2*I))$

$$\sqrt{\frac{5}{13}}, \arctan\left(\frac{7}{4}\right)$$

-

Exercici 2:

Donat el nombre real  $\frac{2+i}{3-2i}$  calculeu la seua part real, la part imaginària, i el seu conjugat.

- `Re((2+I)/(3-2*I)); Im((2+I)/(3-2*I)); conjugate((2+I)/(3-2*I))`

$$\frac{4}{13}$$

$$\frac{7}{13}$$

$$\frac{4}{13} - \frac{7 \cdot i}{13}$$

Exercici 3:

Crea una funció que donat un mòdul i un argument el done el complex en forma binòmica.

- `f:=(x,y)->x*(cos(y)+I*sin(y))`

$$(x, y) \rightarrow x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

- `f(1,PI/3)`

$$\frac{i}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

- `rectform(%)`

$$\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

-

## Nombres primers

Determineu els nombres primers del 1 fins 1000

Quants elements té la llista

- `primes := select([$ 1..1000], isprime)`

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
```

```
73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151,
```

```
157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233,
```

```
239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317,
```

```
331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419,
```

```
421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503,
```

```
509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607,
```

```
613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701,
```

```
709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811,
```

```
821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911,
```

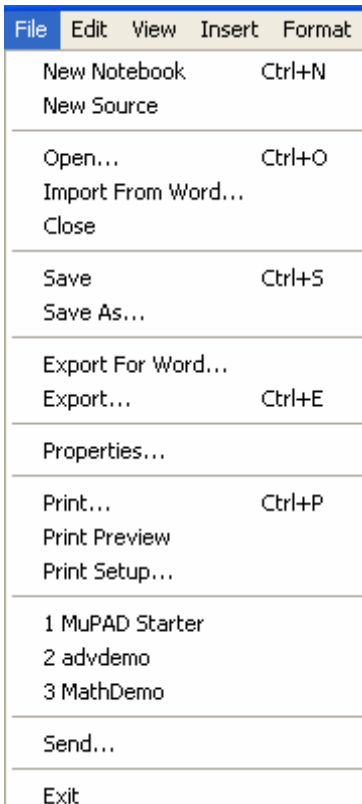
```
919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997]
```

- `nops(primes)`

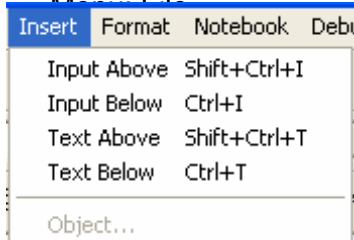
```
168
```

-

## Menús MuPAD



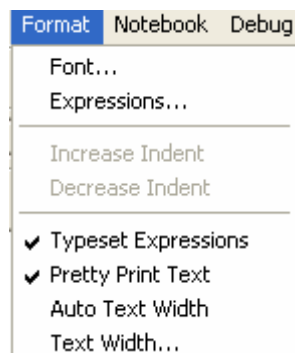
Menú: File



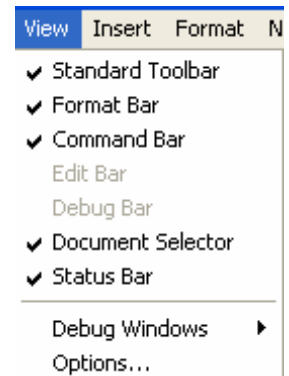
Menú: Insert



Menú: Edit



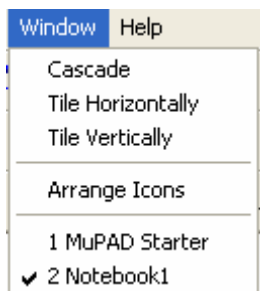
Menú: Format



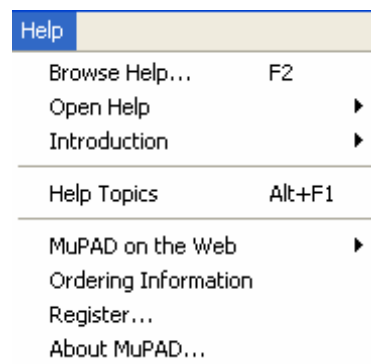
Menú: View



Menú: Notebook

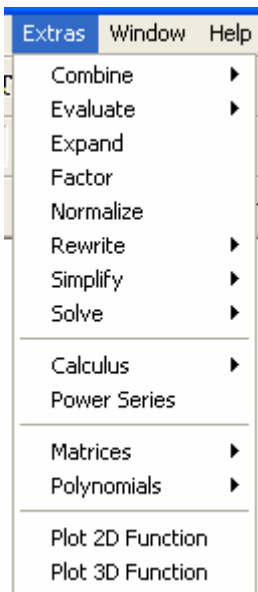


Menú: Window

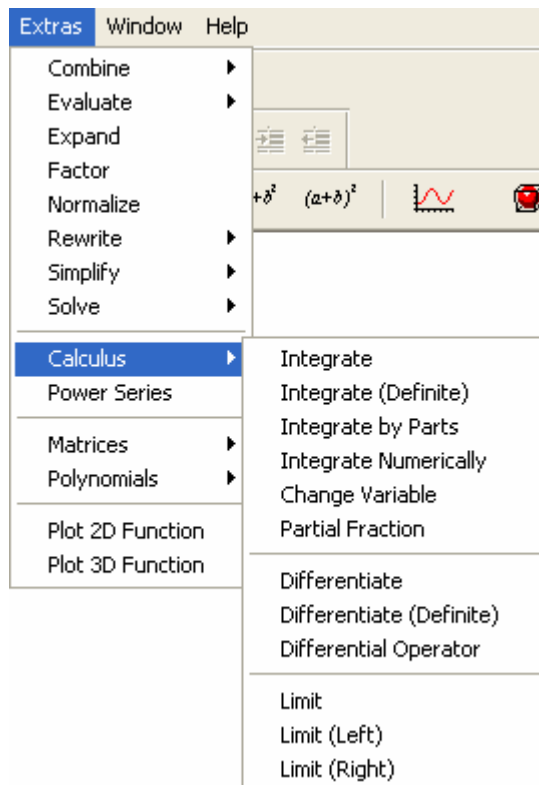


Menú: Help

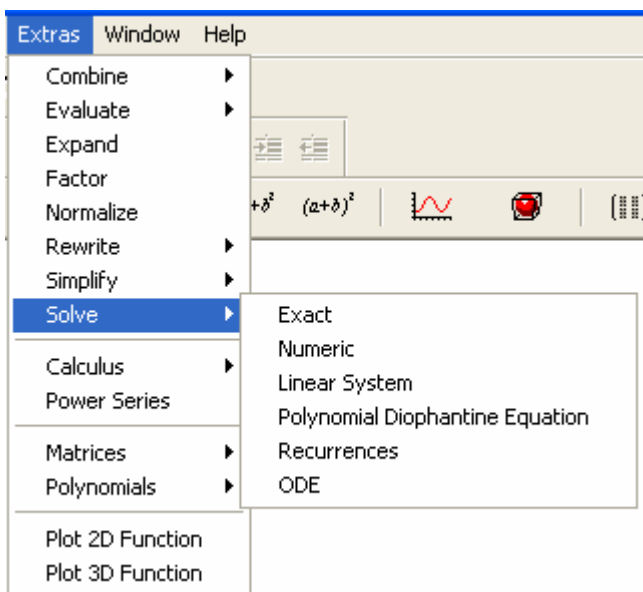
Nootebook/Evaluate/Any/Input  
Avalua totes les expressions del document



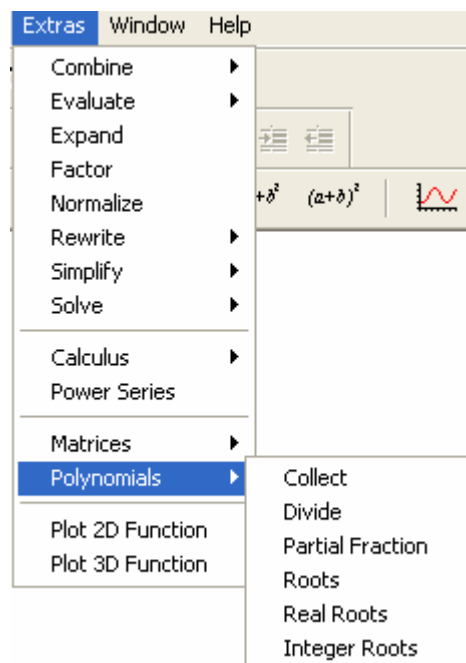
Menú: Extras



Menú: Extras/Calculus



Menú: Extras/Solve



Menú: Extras/Polynomials

## Com inserir una plantilla MuPAD en un document Word

Si treballem en l'entorn d'Office (Word, Excel, ...), es pot inserir una plantilla de MuPAD per a realitzar tot tipus de càlcul o representar gràficament una funció.

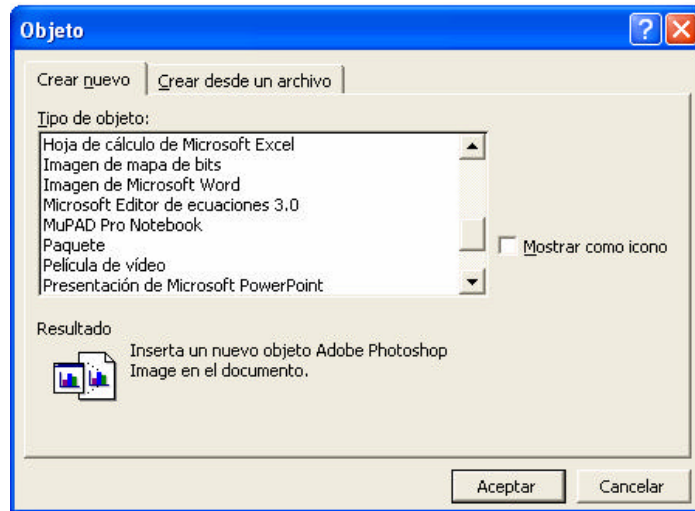
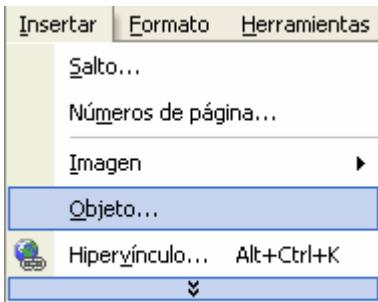
Per a poder realitzar l'activitat ha d'estar instal·lat el programa MuPAD al seu equip.

Exemple:

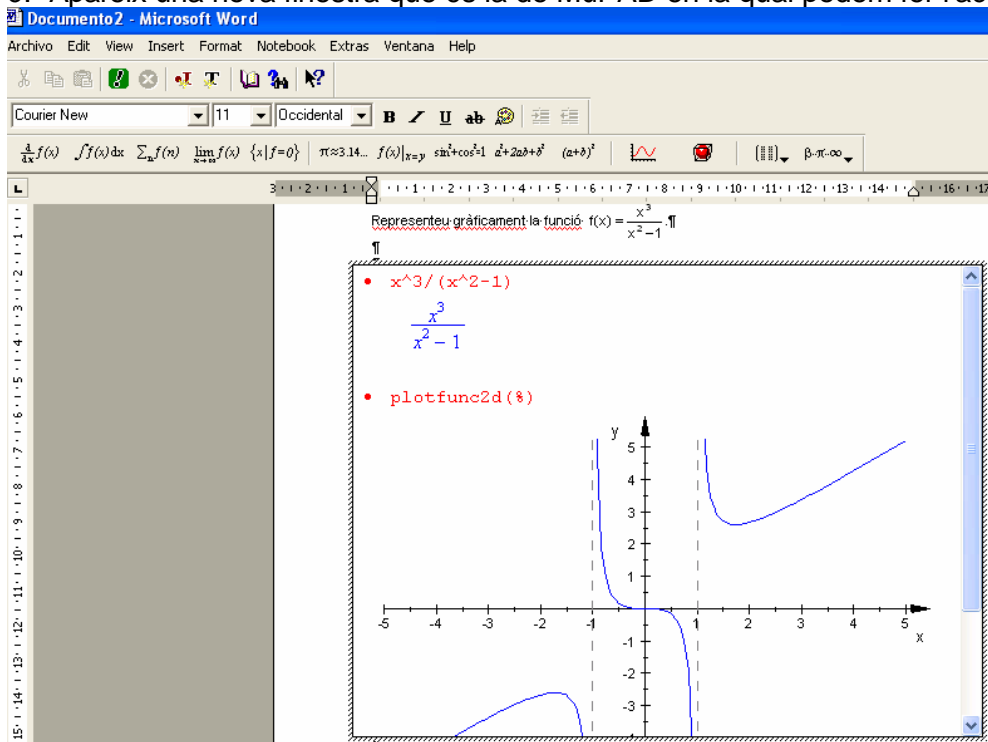
a.- Obrir un document word i escriuvi:

Representeu gràficament la funció  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

b.- Seleccioneu Insertar/Objeto i seleccioneu de nou MuPAD Pro Notebook.



c.- Apareix una nova finestra que és la de MuPAD en la qual podem fer l'activitat.



d.- Per eixir de la finestra cal fer un clic en el document fora de la finestra.

e.- Per entrar en la finestra cal fer un doble clic dins de la finestra.