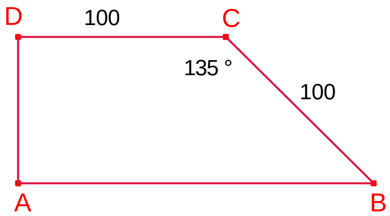
Problemes de geometria per a l'ESO

1.- Siga ABCD un trapezi rectangle com el de la figura tal que $\overline{BC}=\overline{CD}=100\text{cm}$ i $\angle BCD=135^{o}$.
Calculeu la mesura de les diagonals $\overline{BD}$, $\overline{AC}$.
García Ardura 82.



Solució:
Siga $\overline{CH}$ altura sobre la base $\overline{AB}$.
$\angle HCB=135^{o}-90^{o}=45^{o}$.
Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{CH}=\overline{BH}=\frac{\sqrt{2}}{2}100.$$

$$\overline{AH}=100.$$

$$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{HB}=100+\frac{\sqrt{2}}{2}100.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAB}$:

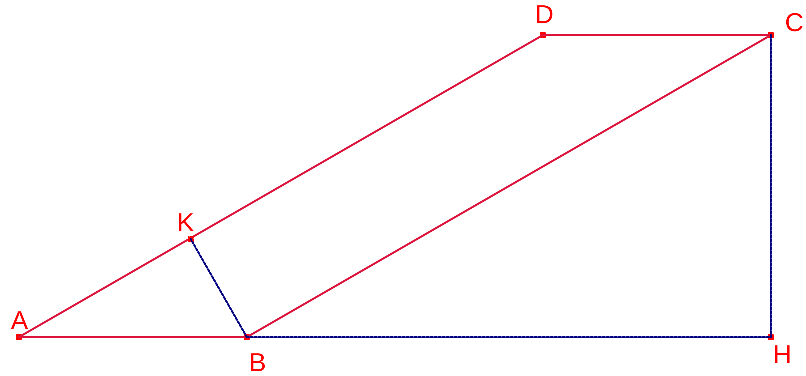
$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AD}^{2}+\overline{AB}^{2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}100\right)^{2}+\left(100\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{2}}=100\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 184.78\text{cm}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^{2}+\overline{CD}^{2}}=\sqrt{\left(100\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}+100^{2}}=50\sqrt{6}\approx 122.47\text{cm}.$$

2.- Els costats d'un paral·lelogram mesuren 16cm, 6cm.
La distància entre els costats més allunyats és 8cm.
Calculeu la mesura dels costats que estan més a prop.
García Ardura 83.

Solució:

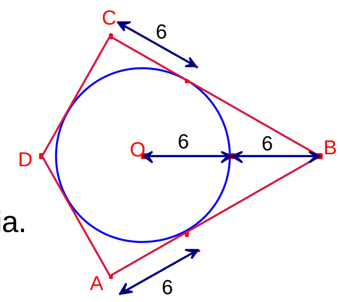


Siga el paral·lelogram ABCD, $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=16$.
Si La distància entre els costats més allunyats és 8, l'altura del paral·lelogram sobre el costat menor $\overline{AB}$ és 8.
Siga $\overline{CH}=8$ altura del paral·lelogram.

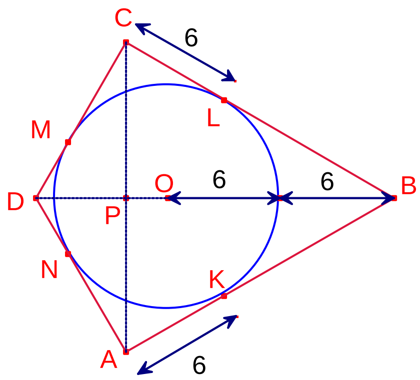
La distància entre els costats més a prop és igual a l'altura del paral·lelogram sobre el costat $\overline{AD}$. Siga $\overline{BK}$ altura del paral·lelogram.

L'àrea del paral·lelogram és:
$\overline{AD}\cdot\overline{BK}=\overline{AB}\cdot\overline{CH}$.
$16\cdot\overline{BK}=6\cdot 8$.
$\overline{BK}=\frac{48}{16}=3\text{cm}$.

3.- En el següent quadrilàter ABCD calculeu la mesura de les diagonals $\overline{AC}, \overline{BD}$.
García Ardura 85



Solució:
El quadrilàter ABCD està circumscrit a la circumferència de radi 3.
Siguen K, L M, N els punts de tangència del quadrilàter i la circumferència.



$\overline{AN} = \overline{AK} = 6$, $\overline{CL} = \overline{CM} = 6$.
$\overline{BK} = \overline{BL}$, $\overline{DN} = \overline{DM}$.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{AD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{BDA}$ són iguals i simètrics respecte del costat $\overline{BD}$.
Per tant, les diagonals del quadrilàter són perpendiculars.
Siga P La intersecció de les diagonals.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLB}$, $L = 90^o$. $\overline{OL} = 6$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{BL} = 6\sqrt{3}$.
$\overline{BC} = 6\left(1+\sqrt{3}\right)$.

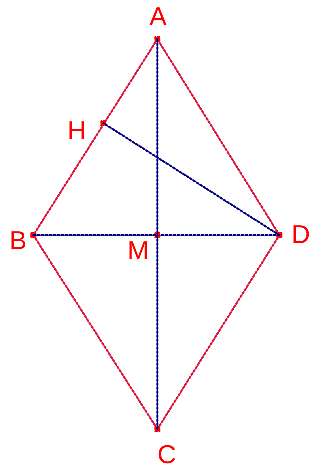
Els triangles $\overset{\Delta}{OLB}$, $\overset{\Delta}{CPB}$, són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{CB} = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$.
Aleshores, $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CP} = 6\left(1+\sqrt{3}\right)$
Notem que $\overline{OL} = \overline{LC} = \overline{CM} = \overline{OM} = 6$, $\angle OLC = 90^o$.
Aleshores, OLCM és un quadrat, $\angle BCD = 90^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{OLB}$, $\overset{\Delta}{DCB}$, són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{BD}}{6\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{12}{6\sqrt{3}}$, aleshores, $\overline{BD} = 4\left(3+\sqrt{3}\right)$.

4.- Siga el rombe ABCD tal que l'angle A és agut.
L'altura traçada des de D divideix el costat $\overline{AB}$ en dos segments que mesuren x, y.
Calculeu la mesura de les diagonals del rombe.
Gúsiev 62.

Solució:
Siga $\overline{DH}$ altura del triangle i $x = \overline{AH}$, $y = \overline{BH}$.
Siga M la intersecció de les diagonals.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMB}$, $\overset{\Delta}{DHB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{y}{2\cdot\overline{BM}} = \dfrac{\overline{BM}}{x+y}$, aleshores, $\overline{BM}^2 = \dfrac{y(x+y)}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

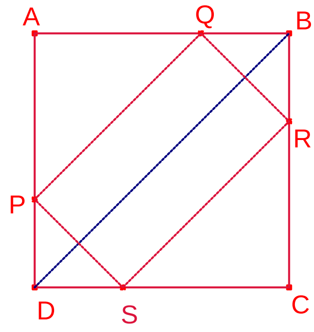
$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BM}^2 = (x+y)^2 - \frac{y(x+y)}{2} = \frac{(x+y)(2x+y)}{2}.$$

Aleshores les diagonals mesuren:

$$\overline{BD} = 2\cdot\overline{BM} = 2\sqrt{\frac{y(x+y)}{2}} = \sqrt{2y(x+y)}.$$

$$\overline{AC} = 2\cdot\overline{AM} = 2\sqrt{\frac{(x+y)(2x+y)}{2}} = \sqrt{2(x+y)(2x+y)}.$$

5.- En un quadrat de 6m de costat s'inscriu un rectangle de 8m de diagonal, amb la condició que un dels costats siga paral·lel a una diagonal. Calculeu la seua àrea.
Garcia Ardura 628.

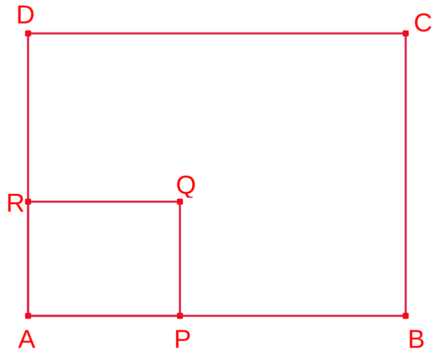


Solució:
Siga el quadrat ABCD, $\overline{AB}=6$.
Siga el rectangle PQRS, tal que $\overline{PQ}$ és paral·lel a $\overline{BD}$, $\overline{PR}=8$.
Siga $x=\overline{DS}=\overline{DP}$, aleshores, $\overline{SC}=\overline{CR}=6-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{PDS}$, $\overset{\Delta}{SCR}$:
$\overline{PS}=x\sqrt{2}$, $\overline{SR}=(6-x)\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PSR}$:
$8^2=\left(x\sqrt{2}\right)^2+\left((x-6)\sqrt{2}\right)^2$.
$x^2-6x+2=0$.
Resolent l'equació:
$x=3+\sqrt{7}$, $x=3-\sqrt{7}$.
Aleshores, l'àrea del rectangle PQRS és:
$S_{PQRS}=\overline{PS}\cdot\overline{SR}=x\sqrt{2}\cdot(6-x)\sqrt{2}=2(6x-x^2)$.
Substituint en les dues solucions de x:
$S_{PQRS}=2$.

6.- Calculeu l'àrea d'un rectangle de 25m de diagonal, sabent que és semblant a un altre de costats 8m i 6m.
García Ardura 631.



Solució:

Siga ABCD el rectangle de diagonal $\overline{AC} = 25$

Siga el rectangle APQR semblant a l'anterior tal que $\overline{AP} = 8$, $\overline{AR} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{AQ} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

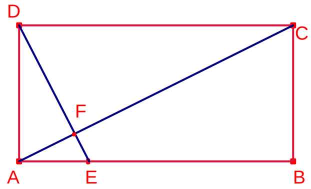
L'àrea del rectangle APQR és:

$S_{APQR} = 8 \cdot 6 = 48m^2$.

Les àrees de dues figures semblants són proporcionals al quadrat de la raó de semblança, aleshores:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{APQR}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Aleshores, $S_{ABCD} = \frac{25}{4} S_{APQR} = \frac{25}{4} 48 = 300m^2$.



7.- Calculeu l'àrea del rectangle ABCD de la figura, essent la base el doble que l'altura i el punt E correspon a la quarta part del costat $\overline{AB}$ si $\overline{DF} = 6m$.
García Ardura 630.

Solució:

Siga $x = \overline{AD}$, aleshores, $\overline{AB} = 2x$, $\overline{AE} = \frac{x}{2}$.

L'àrea del rectangle ABCD és, $S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 2x \cdot x = 2x^2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DAE}$ són semblants ja que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAE}$:

$$\overline{DE} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Siga $\alpha = \angle BAC$, aleshores, $\angle ADE = \alpha$, $\angle AED = 90º - \alpha$.
Aleshores, $\angle AFE = 90º$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{AFD}$ és un triangle rectangle i semblant al triangle $\overset{\Delta}{DAE}$.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}.$$

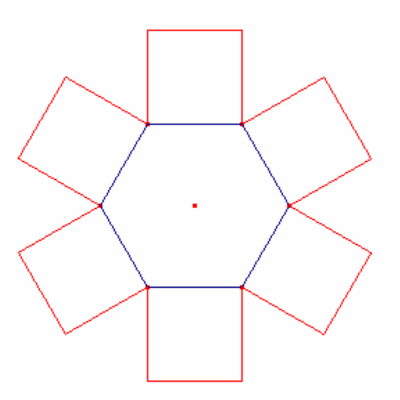
$\frac{6}{x} = \frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}$. Resolent l'equació:

$x = 3\sqrt{5}$.

Aleshores l'àrea del rectangle ABCD és:

$$S_{ABCD} = 2x^2 = 2\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 90m^2$$

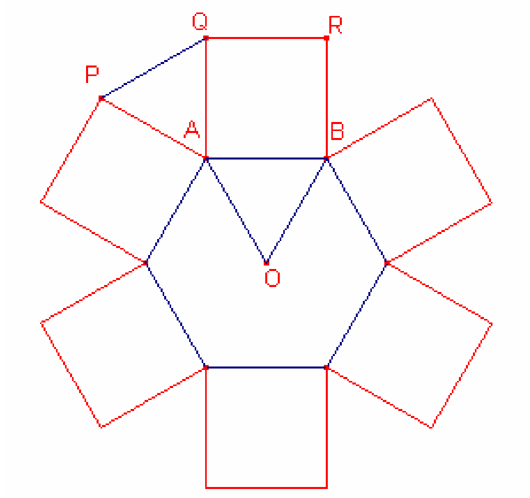
8.- Sobre els costats d'un hexàgon regular i exteriorment es construeixen 6 quadrats com els de la figura. Els vèrtexs exteriors formen un polígon regular?. Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon regular i el dodecàgon.



Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ el costat de l'hexàgon regular.
L'angle interior d'un hexàgon regular mesura 120º.
Aleshores, $\angle PAQ = 360º – (120º + 2 \cdot 90º) = 60º$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és equilàter.
Per tant, $\overline{PQ}=\overline{AQ}=\overline{AB}=a$.
$\overline{QR}=\overline{AB}=a$.
El dodecàgon exterior té els costats iguals.
També té els angles iguals, $\angle PQR = 90º + 60º = 150º$.
Aleshores, és un dodecàgon regular de costat a.



L'àrea de l'hexàgon regular és 6 vegades l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OAB}$ de costat a.

Aleshores, $S_{\text{hexàgon}} = 6\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

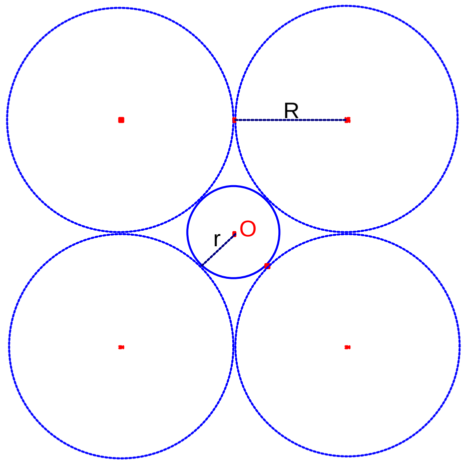
L'àrea del dodecàgon regular és igual a 12 vegades l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OAB}$ de costat a, més l'àrea de 6 quadrats de costat a.

Aleshores, $S_{\text{dodecàgon}} = 12\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 6a^2 = \left(6+3\sqrt{3}\right)a^2$.

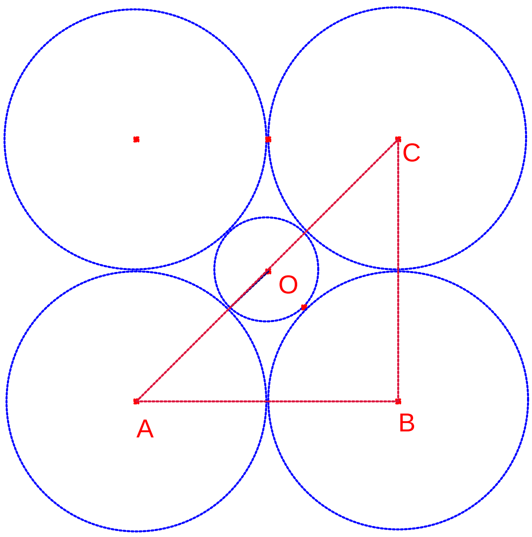
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{\text{hexàgon}}}{S_{\text{dodecàgon}}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}{\left(6+3\sqrt{3}\right)a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\left(6+3\sqrt{3}\right)} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}.$$

9.- En una circumferència de radi r , volem construir externament 4 circumferències d'igual radi R i tangents dos a dos i tangents a la primera (veure figura). Calculeu la raó entre R i r.



Solució:



Els centres de les 4 circumferències tangnets exteriors formen un quadrat. Siguen A, B, C els centres de 3 circumferències exteriors.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Notem que $\overline{AB} = \overline{BC} = 2R$, $\overline{AC} = 2R + 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$(2R + 2r)^2 = (2R)^2 + (2R)^2$.

$4R^2 + 8Rr + 4r^2 = 4R^2 + 4R^2$. Simplificant:

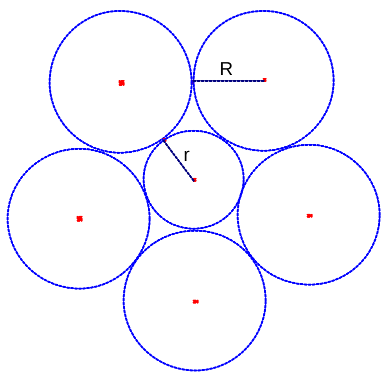
$R^2 - 2Rr - r^2 = 0$. Dividint la igualtat per r^2:

$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 1 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita $\frac{R}{r}$:

$\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.

Problema:

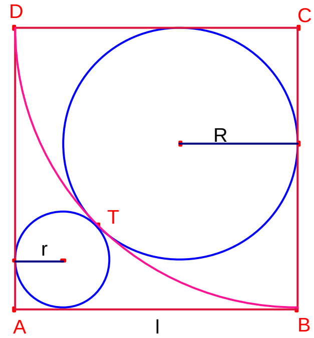
En una circumferència de radi r , volem construir externament 5 circumferències d'igual radi R i tangents dos a dos i tangents a la primera (veure figura). Calculeu la raó entre R i r.



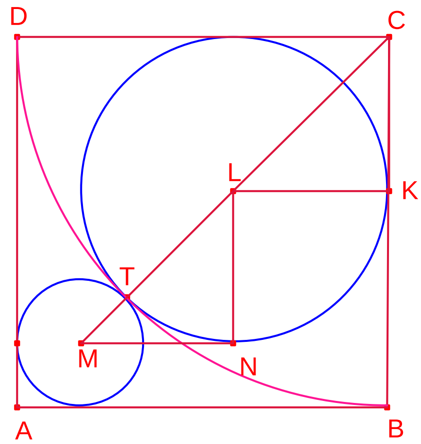
Solució:

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\cos 54^{o}} - 1 = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} - 1.$$

10.- Siga el quadrat ABCD de costat l. Siga l'arc BTD de centre C. S'han dibuixat dues circumferències tangents de radis R, r entre elles, tangents a l'arc i cadascuna tangent a dos costats del quadrat (veure figura).
Calculeu el valor dels radis R i r en funció del costat l del quadrat i la proporció entre R i r.



Solució:
Siguen L, M els centres de les dues circumferències tangents.
La recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per M i la recta paral·lela al costat $\overline{AD}$ que passa per L s'intersecten en el punt N.
La recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per L talla el costat $\overline{BC}$ en el punt K.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKL}$:
$\overline{CL} = R\sqrt{2}$.

$\overline{CT} = l$
$\overline{LT} = R$.

Aleshores, $l = R + R\sqrt{2}$.
Aleshores, $R = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} l = \left(\sqrt{2}-1\right) l$.

$\overline{LN} = \overline{MN} = l - (R + r)$.
$\overline{LM} = R + r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMN}$:
$(R + r)^2 = 2\left(l - (R + r)\right)^2$.
$R + r = \sqrt{2}\left(l - (R + r)\right)$
$R + r = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} l = \left(2-\sqrt{2}\right) l$.
Aleshores, $r = \left(2-\sqrt{2}\right) l - R = \left(3-2\sqrt{2}\right) l$.
Calculem la proporció entre R i r:
$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$