

### Problemes de Geometria per a l'ESO 10

91.- En un rectangle ABCD siga P un punt sobre  $\overline{BC}$  i Q un punt sobre  $\overline{DC}$  tal que  $\overline{BP} = 1$ ,  $\overline{AP} = \overline{PQ} = 2$  i l'angle  $\angle APQ = 90^\circ$ . Determineu la mesura de  $\overline{QD}$   
Cruz Mathematicorum M383.

Solució:

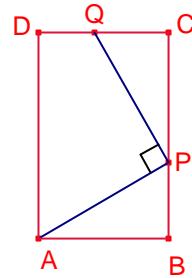
$\overline{BP} = 1$ ,  $\overline{AP} = 2$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , aleshores:

$$\angle APB = 60^\circ, \overline{AB} = \sqrt{3}.$$

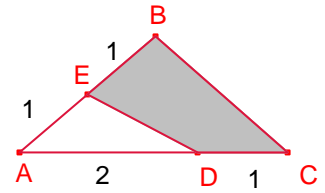
$$\angle QPC = 30^\circ.$$

Com  $\overline{PQ} = 2$ ,  $\angle PCQ = 90^\circ$ . Aleshores  $\overline{CQ} = 1$ .

$$\overline{QD} = \overline{AB} - \overline{CQ} = \sqrt{3} - 1.$$



92.- En la figura, el punt E està sobre el costat  $\overline{AB}$  i D sobre el costat  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DC} = 1$  i  $\overline{AD} = 2$ . Determineu la raó entre l'àrea del quadrilàter BCDE i l'àrea del triangle  $\triangle ABC$ .  
Cruz Mathematicorum 384

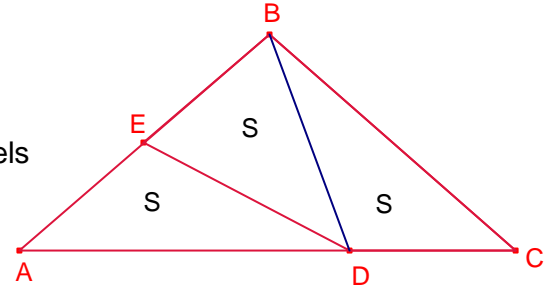


Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les seues àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle  $\triangle ADE$ .

Els triangles  $\triangle ADE$ ,  $\triangle ADE$  tenen la mateixa altura sobre els costats  $\overline{AE}$ ,  $\overline{EB}$ , respectivament i les seues bases són iguals. Aleshores, l'àrea de  $\triangle ADE$  és S.



Els triangles  $\triangle ADB$ ,  $\triangle DCB$  tenen la mateixa altura sobre els costats  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DC}$ , respectivament. Les àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{S_{DCB}}{S_{ADB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}.$$

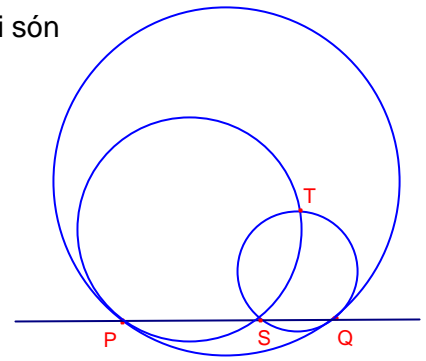
Aleshores l'àrea del triangle  $\triangle DCB$  és S.

L'àrea del triangle  $\triangle ABC$  és 3S.

L'àrea del quadrilàter BCDE és 2S.

La proporció entre l'àrea del quadrilàter BCDE i la del triangle  $\triangle ABC$  és  $\frac{2}{3}$ .

93.- En la figura següent, els cercles menuts tenen radis  $a$ ,  $b$  i són tangents al cercle gran de radi  $r$  en els punts  $P$  i  $Q$ . Les circumferències menudes s'intersequen en  $S$  i  $T$ . Proveu que si  $P$ ,  $S$ ,  $Q$  estan alineats aleshores,  $r = a + b$   
Crux Mathematicorum M393.



Solució:

Siga  $O$  el centre de la circumferència de radi  $r$ .

Siga  $O_1$  el centre de la circumferència de radi  $a$

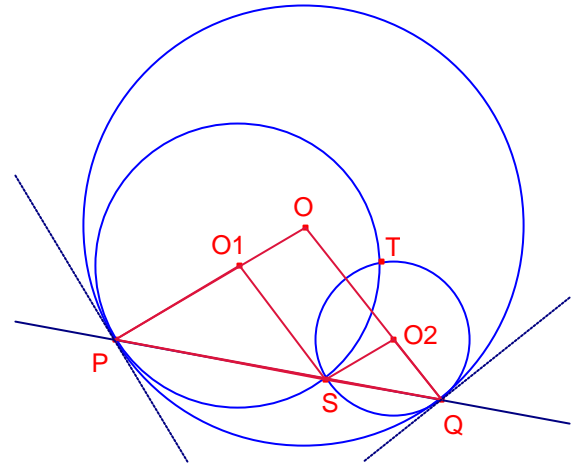
Siga  $O_2$  el centre de la circumferència de radi  $b$ .

Siga  $x = \overline{PS}$ ,  $y = \overline{SQ}$ .

El triangle  $\triangle OPQ$  és isòsceles.

Per ser las circumferències tangents  $O_1$  pertany al segment  $\overline{OP}$ .

Per ser las circumferències tangents  $O_2$  pertany al segment  $\overline{OQ}$ .



Els triangles  $\triangle OPQ$ ,  $\triangle O_1PS$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{x} = \frac{r}{x+y} \quad (1)$$

Els triangles  $\triangle OPQ$ ,  $\triangle O_2SQ$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{y} = \frac{r}{x+y} \quad (2)$$

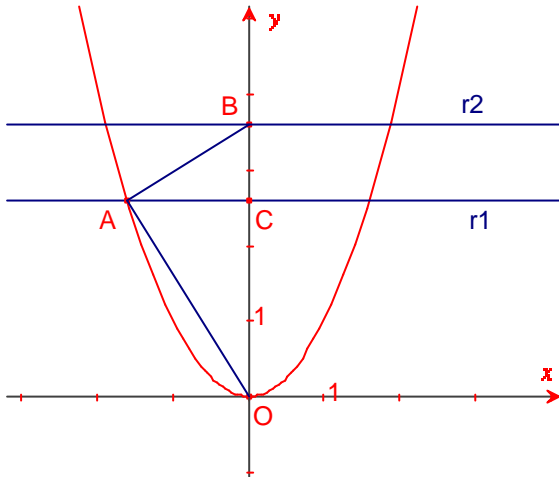
De (1) i (2)

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{r}{x+y}, \text{ per tant, } \frac{a+b}{x+y} = \frac{r}{x+y}.$$

Aleshores,  $a + b = r$

94.- Dibuixem la gràfica de la paràbola  $y = x^2$  en el plànol cartesià. Dues rectes  $r_1, r_2$  són paral·leles a l'eix d'abscisses; la distància entre elles és 1 i  $r_1$  està més propera a l'eix d'abscisses que  $r_2$ . Siga A un dels punts d'intersecció de la recta  $r_1$  i la paràbola i B el punt d'intersecció de la recta  $r_2$  i l'eix d'ordenades i O l'origen de coordenades. Calculeu la mesura de l'angle  $\angle OAB$ .  
Olimpíada de Bielorrússia 2009. 12-13 anys d'edat.

Solució:



Siga  $a$  la distància de la recta  $r_1$  a l'eix d'abscisses.  
Siga C la intersecció de la recta  $r_1$  i l'eix d'ordenades.

Les coordenades de A són:

$$A(-\sqrt{a}, a).$$

$$\overline{AC} = \sqrt{a}.$$

aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ACO$ :

$$\overline{OA} = \sqrt{a^2 + a}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ACB$ :

$$\overline{AB} = \sqrt{a + 1}.$$

$$\overline{OB} = a + 1$$

Notem que  $\overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OA}^2$ , aleshores, aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle OAB$ ,  $\angle OAB = 90^\circ$ .

95.- Siga el trapezi ABCD amb  $\overline{BC}$  paral·lel a  $\overline{AD}$  i l'angle  $\angle CAD = 30^\circ$ . La longitud de la diagonal  $\overline{BD}$  mesura la meitat de la paral·lela mitjana del trapezi. Determineu la mesura de l'angle que formen les diagonals  
Olimpíada de Bielorússia 2009. 12-13 anys d'edat.

Solució:

Siga  $\overline{AD} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ .

Siga O el punt intersecció de les diagonals.

Siga  $x = \overline{OB}$ .

Siga  $\overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$  paral·lela mitjana del trapezi.

Per hipòtesi  $\overline{BD} = \overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$ .

Els triangles  $\triangle ADO$ ,  $\triangle CBO$  són semblants.  
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\frac{a+b}{2} - x} = \frac{b}{a}$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{b}{2}$$

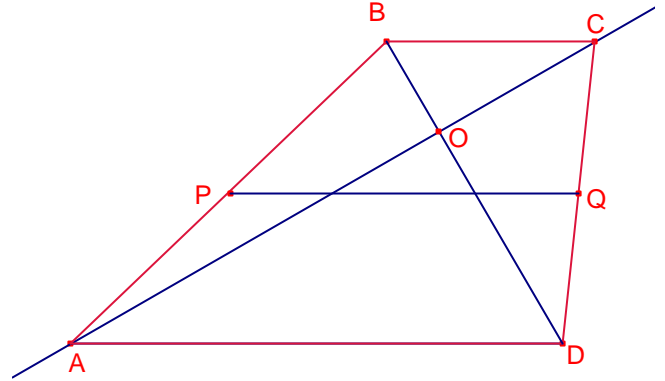
Siga  $\alpha = \angle BOC$ .  $\angle OCB = \angle BAC = 30^\circ$ .

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle BOC$ :

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{2}}{\sin 30^\circ}$$

Aleshores,  $\alpha = 90^\circ$ .

Per tant, les diagonals són perpendiculars.



96.- En la següent figura ABCF és un quadrat i CDEF un rectangle.  
Si l'àrea de tota la figura és  $216\text{cm}^2$  i el perímetre del rectangle CDEF és tres vegades el costat  $\overline{AB}$ . Calculeu l'àrea del rectangle CDEF.  
Olimpíada Nandú Argentina 2009.

Solució:

Siga  $x = \overline{AB}$

Com que el perímetre del rectangle CDEF és 3 vegades  $\overline{AB}$ :

$$2x + 2 \cdot \overline{CD} = 3x.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{CD} = \frac{x}{2}.$$

Com que l'àrea del rectangle ABDE és  $216\text{cm}^2$ :

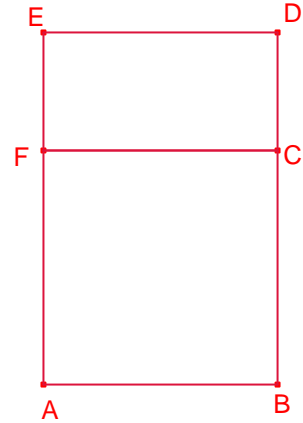
$$x \left( x + \frac{x}{2} \right) = 216.$$

Resolent l'equació:  $x = \overline{AB} = 12\text{cm}$ .

$$\text{Aleshores, } \overline{CD} = \frac{x}{2} = 6\text{cm}.$$

L'àrea del rectangle CDEF és:

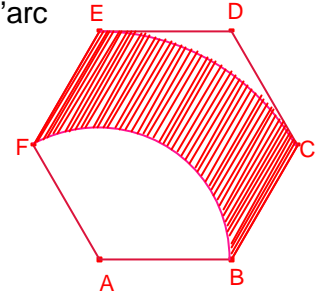
$$S_{\text{CDEF}} = x \frac{x}{2} = 72\text{cm}^2.$$



97.- Donat l'hexàgon regular ABCDEF de costat 12cm, dibuixem l'arc

$\widehat{BF}$  de centre A i radi  $\overline{AB}$  i l'arc  $\widehat{CE}$  de centre A i radi  $\overline{AC}$ .  
Calculeu l'àrea ombrejada.

Olimpíada d'Argentina. Nyandú 2008, nivell 3.



Solució:

L'apotema de l'hexàgon regular mesura:

$$\overline{OM} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

$$\overline{AE} = \overline{AC} = 2 \cdot \overline{OM} = 12\sqrt{3}.$$

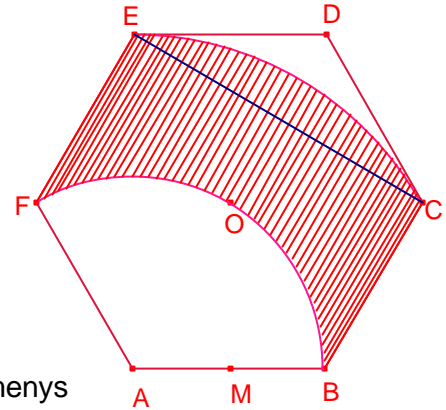
$$\angle FAB = 120^\circ, \angle EAC = 60^\circ.$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}.$$

L'àrea del triangle equilàter  $\triangle ACE$  és igual a la meitat de l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF:

$$S_{ACE} = 108\sqrt{3}.$$



L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del pentàgon ABCEF menys

l'àrea del sector FAB més l'àrea del segment circular  $\widehat{CE}$ .

L'àrea del pentàgon ABCEF és  $\frac{5}{6}$  l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF.

$$S_{ABDEF} = \frac{5}{6} 216\sqrt{3} = 180\sqrt{3}.$$

L'àrea del sector FAB és la tercera part de l'àrea del cercle de radi  $\overline{AB}$ :

$$S_{\text{sectorFAB}} = \frac{1}{3} (\pi \cdot 12^2) = 48\pi.$$

L'àrea del sector EAC és la sisena part de l'àrea del cercle de radi  $\overline{AE}$ .

$$S_{\text{sectorEAC}} = \frac{1}{6} (\pi (12\sqrt{3})^2) = 72\pi.$$

L'àrea del segment circular EAC és igual a l'àrea del sector EAC menys l'àrea del triangle equilàter  $\triangle ACE$ :

$$S_{\text{segmentEAC}} = 72\pi - 108\sqrt{3}.$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = 180\sqrt{3} - 48\pi + (72\pi - 108\sqrt{3}) = 72\sqrt{3} + 24\pi \approx 200.11 \text{cm}^2.$$

98.- En un triangle isòsceles  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ,  $A = 30^\circ$ .  
Siga D el punt mig del costat  $\overline{BC}$ . Siga P un punt del segment  $\overline{AD}$  i un punt Q del costat  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{BP} = \overline{PQ}$ . Calculeu la mesura de l'angle  $\angle PQC$ .  
Olimpíada d'Argentina 2007. nivell 1

Solució:

$$B = C = 75^\circ.$$

$\overline{AD}$  és la mediatriu del costat  $\overline{BC}$ , aleshores,  $\overline{BP} = \overline{CP}$ .

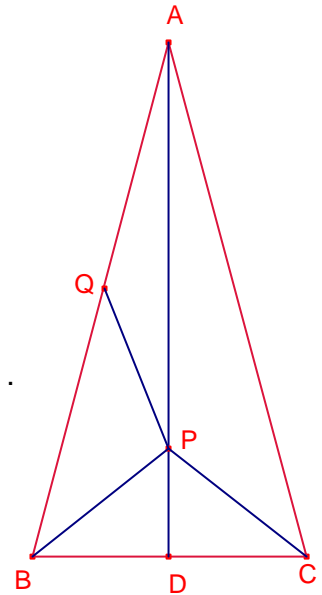
Siga  $\alpha = \angle PBC$ .

Aleshores,  $\angle BCP = \alpha$ ,  $\angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$ .

$\angle PBC = \angle PQB = 75^\circ - \alpha$ . Aleshores,  $\angle BPQ = 30^\circ + 2\alpha$

$\angle QPC = 360^\circ - (\angle BPC + \angle BPQ) = 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha + 30^\circ + 2\alpha) = 150^\circ$ .

Aleshores,  $\angle PQC = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$ .



99.- Siga el rectangle  $ABCD$   $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{BC} = 7$ . Siga  $K$  el punt mig del costat  $\overline{AB}$  i  $L$  el punt mig del costat  $\overline{AD}$ . La recta paral·lela al costat  $\overline{BC}$  que passa per  $K$  talla la recta  $BL$  en el punt  $M$ . Determineu la mesura del segment  $\overline{CM}$ .  
Olimpíada d'Argentina 2006. nivell 2

Solució:

$$\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{7}{2}.$$

Els triangles rectangles  $\triangle BAL$ ,  $\triangle BKM$  són semblants i la raó de semblança és  $\frac{\overline{AB}}{\overline{KB}} = 2$ .

Aleshores,  $\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{AL} = \frac{7}{4}$ .

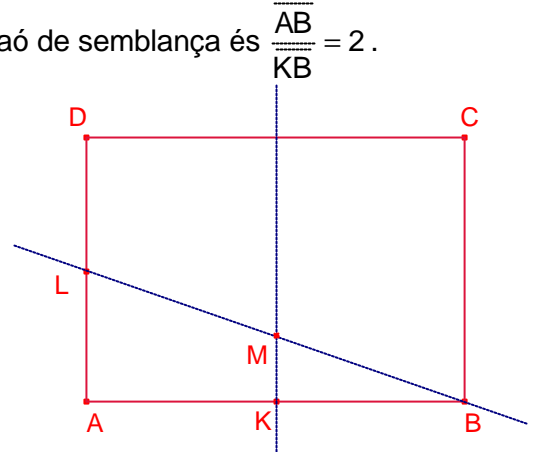
La recta  $KM$  talla el costat  $\overline{CD}$  en el punt  $J$ .

$$\overline{MJ} = \overline{BC} - \overline{MK} = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle MJC$ :

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{MJ}^2 + \overline{JC}^2} = \sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2 + 5^2} = \frac{29}{4}.$$



100.- L'àrea del rectangle ABCD és  $80\text{cm}^2$ . Siga un punt F del costat  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{AF} = 3 \cdot \overline{FB}$ .

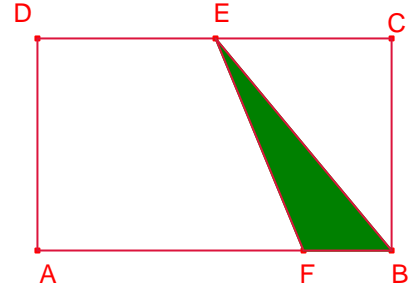
Siga E el punt mig del costat  $\overline{CD}$ . Calculeu l'àrea del triangle  $\triangle FBE$ .  
Olimpíada d'Argentina Nyandú 2008. regional, nivell 1.

Solució.

$$S_{\triangle FBE} = \frac{1}{2} S_{\text{ABCD}} = \frac{1}{2} 80 = 40.$$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 4 \cdot \overline{FB}.$$

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}.$$



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle FBE$  tenen la mateixa altura sobre les bases  $\overline{AB}$ ,  $\overline{FB}$ , respectivament.

Aleshores les seues àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{S_{\triangle FBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Per tant, } S_{\triangle FBE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = 10\text{cm}^2.$$

Nota: No importa que el punt E siga el punt mig del costat  $\overline{CD}$ , és suficient que el punt E estiga en la recta CD i la seua àrea seria la mateixa.