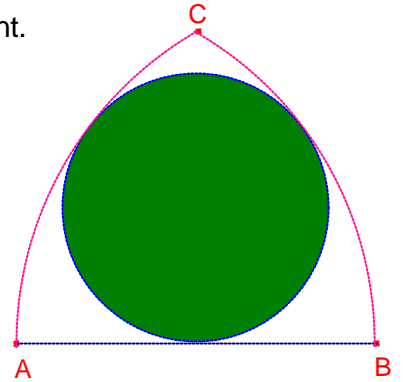


Problemes de Geometria per a l'ESO 15

141.- En la figura els arcs \widehat{AC} , \widehat{BC} tenen centre B, A, respectivament.
Si $\overline{AB} = c$ calculeu el radi de la circumferència tangent als arcs i al segment \overline{AB} .



Solució:

Siga O el centre de la circumferència.

Siga M el punt mig del segment \overline{AB} , punt de tangència de la circumferència i el segment.

Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència.

Considerem el triangle rectangle $\triangle OMB$:

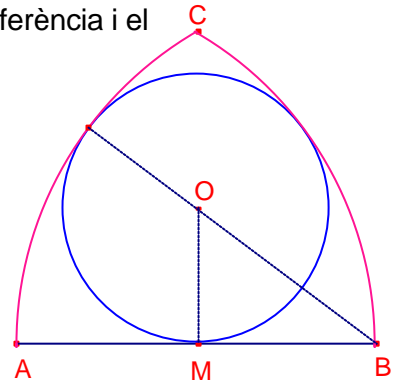
$$\overline{OB} = c - r, \quad \overline{BM} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMB$:

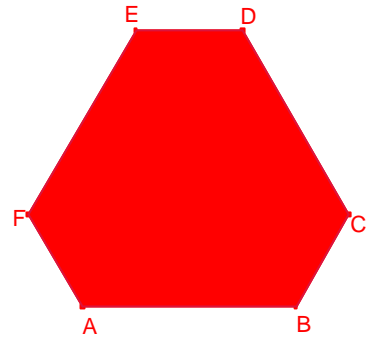
$$(c - r)^2 = r^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$$2rc = \frac{3}{4} c^2.$$

$$\text{Aleshores, } r = \frac{3}{8} c.$$



142.- L'hexàgon ABCDEF té tots els angles iguals, $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$,
 $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FA}$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$.
 Si $\overline{AB} = c$, calculeu l'àrea de l'hexàgon ABCDEF.



Solució:

Si prolonguem els costats AB, CD, EF, es forma el triangle equilàter

$\triangle LMN$ de costat $\overline{LM} = 2c$.

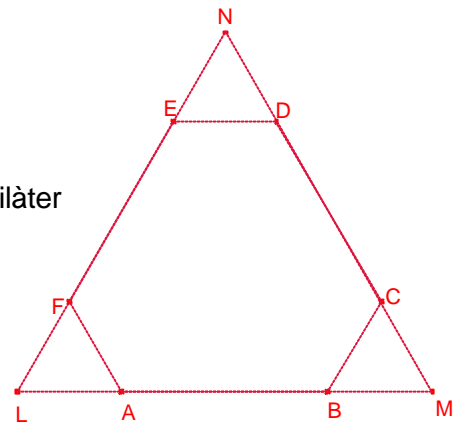
L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és igual a l'àrea del triangle

$\triangle LMN$ menys l'àrea dels tres triangles equilàters $\triangle AFL$, $\triangle BCM$,

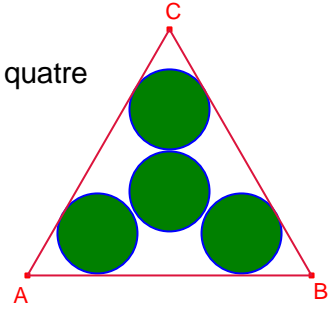
$\triangle DEF$ de costats iguals a $\frac{c}{2}$.

Aleshores:

$$S_{ABCDEF} = S_{LMN} - 3 \cdot S_{AFL} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2c)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{13\sqrt{3}}{16}c^2.$$



143.- En la figura el triangle $\triangle ABC$ és equilàter de costat c i les quatre circumferències tenen el mateix radi. Calculeu el radi de les circumferències.



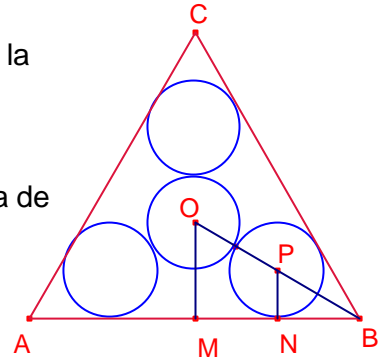
Solució:

Siga M el punt mig del costat \overline{AB}

Siga O el centre de la circumferència central i P el centre de la circumferència més propera al vèrtex B .

Siga $r = \overline{PN}$ radi de les circumferències.

La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats.



$$\angle MBP = 30^\circ$$

Aleshores, $\overline{BP} = 2r$

$$\angle MBO = 30^\circ, \overline{BO} = \overline{OP} + \overline{BP} = 4r.$$

Aleshores, $\overline{OM} = 2r.$

$$\overline{BM} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMB$:

$$(4r)^2 = (2r)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$$12r^2 = \frac{1}{4}c^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } r:$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{12}c.$$

144.- Determineu un rectangle coneguts el costat $a = 6$ i la diferència $d - b = 4$ entre la diagonal i l'altre costat.

Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $a = \overline{AB} = 6$, $b = \overline{BC}$ i diagonal $d = \overline{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$d^2 = 36 + b^2.$$

$$(d - b)^2 = 4^2.$$

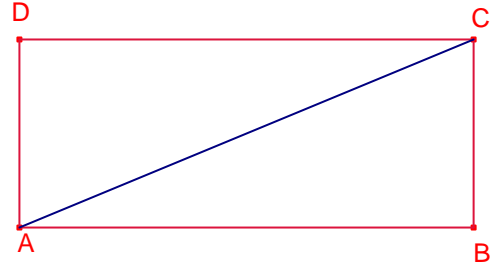
$$d^2 + b^2 - 2bd = 16.$$

$$36 + 2b^2 - 2b\sqrt{36 + b^2} = 16.$$

$$b\sqrt{36 + b^2} = b^2 + 10. \text{ Elevant al quadrat i simplificant:}$$

$$16b^2 = 100. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$b = \frac{5}{2}. \quad d = \frac{13}{2}.$$



145.- Siga a el costat d'un dodecàgon regular i R el radi de la circumferència circumscriba al dodecàgon. Proveu que $a^3 + R^3 = 3aR^2$.

Solució:

Siga el dodecàgon regular ABCDEFGHIJKL de costat $a = \overline{AB}$. Siga O el centre de la circumferència circumscriba al dodecàgon regular.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{12} = 20^\circ.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABO$:

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{R}{\sin 80^\circ}.$$

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{R}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}.$$

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{R}{4 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}.$$

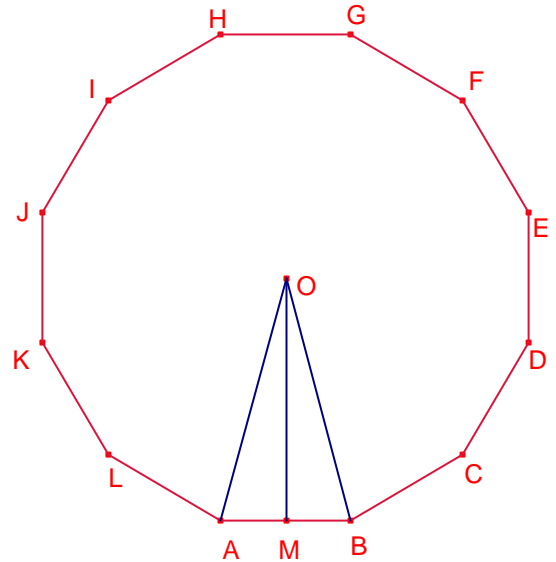
$$a = \frac{R}{4 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}. \text{ Transformant productes en sumes:}$$

$$a = \frac{R}{2(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)}.$$

$$a = \frac{R}{1 + 2 \cdot \cos 20^\circ}. \text{ Aplicant raons trigonomètriques de l'angle doble:}$$

$$a = \frac{R}{1 + 2(1 - 2 \cdot \sin^2 10^\circ)}.$$

$$a = \frac{R}{3 - 4 \cdot \sin^2 10^\circ}.$$



Siga M el punt mig del costat \overline{AB} . Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle

$\triangle OMA$:

$$\sin 10^\circ = \frac{a}{2R}.$$

Aleshores:

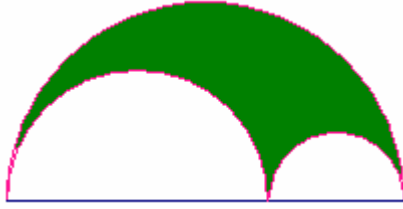
$$a = \frac{R}{3 - 4 \cdot \left(\frac{a}{2R}\right)^2}.$$

$$a = \frac{R}{3 - \frac{a^2}{R^2}}.$$

$$a = \frac{R^3}{3R^2 - a^2}.$$

$$a^3 + R^3 = 3aR^2.$$

146.- El radi de la semicircumferència gran és R calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Siga r el radi de la circumferència mitjana, aleshores el radi de la circumferència menuda és:

$$s = \frac{2R - 2r}{2} = R - r .$$

El perímetre de la regió és la suma de les longituds de les tres semicircumferències:

$$P = \pi R + \pi r + \pi(R - r) = 2\pi R .$$

És a dir, el perímetre és igual a la longitud de la circumferència gran.

147.- Un cub d'aresta a , un tetraedre regular d'aresta b i un octaedre regular d'aresta c tenen la mateixa superfície. Calculeu el valor de $\frac{\sqrt{bc}}{a}$.

Crux Mathematicorum M410.

Solució:

Les superfícies dels tres cossos són:

$$S_{\text{cub}} = 6a^2, S_{\text{tetraedre}} = b^2\sqrt{3}, S_{\text{octaedre}} = 2c^2\sqrt{3}.$$

Com les tres superfícies són iguals:

$$6a^2 = b^2\sqrt{3} = 2c^2\sqrt{3}.$$

$$b^2\sqrt{3} \cdot 2c^2\sqrt{3} = (6a^2)^2.$$

$$(bc)^2 = 6a^4.$$

$$\left(\frac{bc}{a^2}\right)^2 = 6$$

$$\frac{bc}{a^2} = \sqrt{6}.$$

Aleshores:

$$\frac{\sqrt{bc}}{a} = \sqrt{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}.$$

148.- Donat un quadrat es dibuixen les 4 circumferències de centre els vèrtexs i que passen pel centre del quadrat. Les 4 circumferències tallen en 8 punts els costats del quadrat.

Demostreu que els punts formen un octògon regular.

Kömal C1012, desembre 2009.

Solució:

Siga el quadrat ABCD de centre O.

Sense perdre generalitat podem suposar que els costat del quadrat és $\overline{AB} = 1$.

Siga PQRSTU VW l'octògon que determinen les interseccions de les 4 circumferències i els costats del quadrat ABC.

Notem que $\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{TU} = \overline{VW}$,

$\overline{QR} = \overline{ST} = \overline{UV} = \overline{WP}$.

$$\overline{AC} = \sqrt{2}, \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AQ} = \overline{BP} = \overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} + \overline{BP} - \overline{AB} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBR}$:

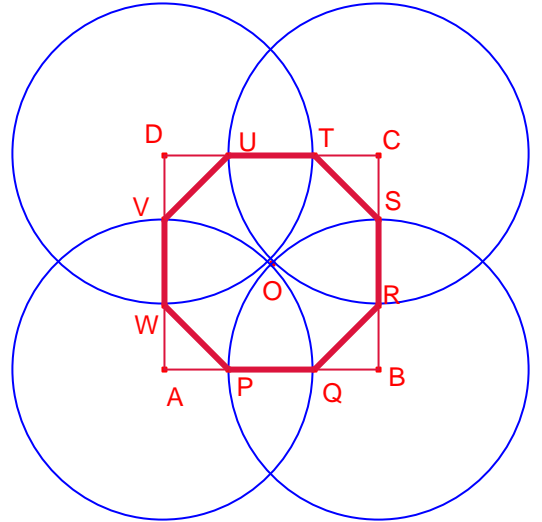
$$\overline{QR} = \overline{QB} \cdot \sqrt{2} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{QR}$. Aleshores els costats de l'octògon són iguals.

$\angle BQR = 45^\circ$.

$\angle PQR = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Aleshores els angles de l'octògon són iguals.

Per tant, l'octògon PQRSTU VW són iguals.



149.- La recta que va des d'un vèrtex d'un paral·lelogram al punt mig d'un dels costats oposats, divideix la diagonal en relació $\frac{1}{3}$.

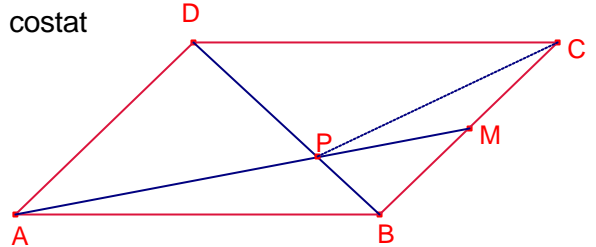
Bruño, problema 125. Pàgina 175.

Solució:

Siga ABCD un paral·lelogram. Sigui M el punt mig del costat \overline{BC}

La recta AM talla la diagonal \overline{BD} en el punt P.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S l'àrea del triangle $\triangle BMP$.

Siga T l'àrea del triangle $\triangle ABP$.

Els triangles $\triangle BMP$, $\triangle MCP$ tenen la mateixa altura i les bases mesuren igual.

Aleshores, $S_{BMP} = S_{MCP} = S$.

Els triangles $\triangle BMP$ i $\triangle DAP$ són semblants i la raó és 1:2.

Aleshores, $S_{DAP} = 2^2 S_{BMP} = 4S$.

Els triangles $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ són iguals.

Aleshores, $S_{ABD} = S_{CDB}$.

$$S_{DCP} = S_{ABD} - (S_{BMP} + S_{MCP}) = T + 4S - (2S) = T + 2S$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABD}} = \frac{T}{4S + T}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{PBC}}{S_{BCD}} = \frac{2S}{4S + T}$$

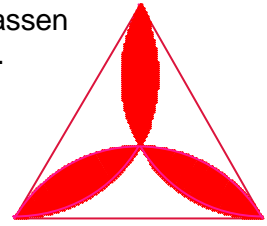
Igalant les expressions anteriors:

$$\frac{T}{4S + T} = \frac{2S}{4S + T}$$

Aleshores: $T = 2S$.

$$\text{Per tant, } \frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{T}{4S + T} = \frac{2S}{6S} = \frac{1}{3}$$

150.- Donat el triangle equilàter de costat $2a$ es dibuixen 3 arcs que passen pels vèrtexs i pel centre del triangle. Calculeu l'àrea de trèvol ombrejat. Bruño 586.



Solució:

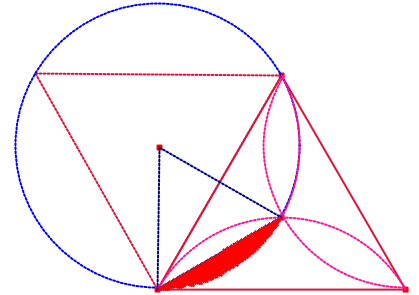
Siga r el radi dels arcs.

Notem que el radi dels arcs és igual a la distància del vèrtex del triangle al centre del triangle.

Aleshores, $r = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

El segment circular ombrejat ocupa un arc de 60° de circumferència.

La seua àrea és igual a la sisena part de l'àrea del cercle de radi r menys l'àrea del triangle equilàter de costat r .



$$S_{\text{segment}} = \frac{1}{6} \left(\pi \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} \right)^2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2.$$

L'àrea del trèvol és igual a sis vegades l'àrea del segment circular anterior:

$$S_{\text{trèvol}} = 6 \left(\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2 \right) = 4 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2.$$