

Problemes de Geometria per a l'ESO 20

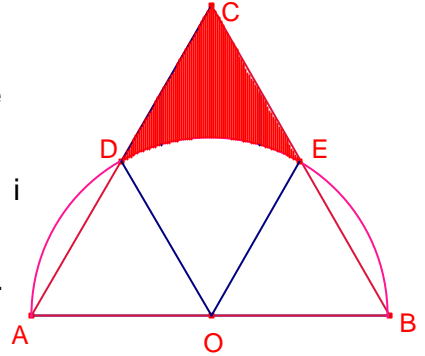
191.- Sobre un semicercle de diàmetre \overline{AB} es dibuixa un triangle equilàter $\triangle ABC$.
 Determineu l'àrea de la regió compresa a l'interior del triangle i exterior al semicercle
Crux Mathematicorum M427

Solució:

Siga O el punt mig del segment \overline{AB} , centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

Siguen D, E els punts d'intersecció del triangle equilàter $\triangle ABC$ i l'arc.

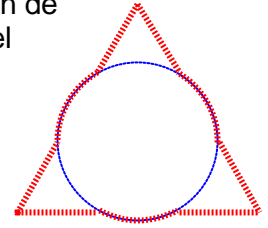
Notem que el triangles $\triangle DEC$, $\triangle DEO$ són equilàters de costat r.



L'àrea de l'interior del triangle $\triangle ABC$ exterior al semicercle es igual al doble de l'àrea del triangle equilàter de costat r menys la sisena part del cercle de radi r.

$$S = 2 \left(\frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \frac{1}{6} \pi \cdot r^2 = \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \right) r^2.$$

192.- Un triangle equilàter de costat e i un cercle de radi 1 se superposen de manera que els centre de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?
Proves cangur 2009, nivell 4, p16.



Solució 1:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat 3 i centre O

\overline{AO} és i qual a $\frac{2}{3}$ de l'altura del triangle $\triangle ABC$.

$$\overline{AO} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \right) = \sqrt{3}.$$

Siga la circumferència de centre O i radi $r = 1$ que talla el costat en els punts P, Q.

Siga $x = \overline{AP}$. $\overline{AQ} = 3 - x$.

Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AO}^2 - r^2.$$

$$x(3 - x) = 2.$$

Resolent l'equació: $x = 1$.

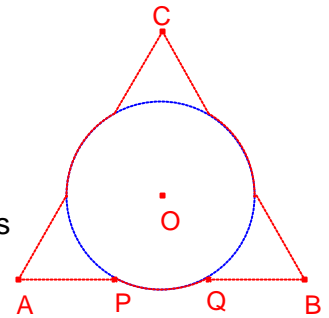
aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{AQ} = 1$.

Aleshores, el triangle $\triangle OPQ$ és equilàter.

Aleshores, l'arc de circumferència abraça 60° .

Per tant el perímetre de la figura és:

$$p = 6 \cdot \overline{AP} + \frac{1}{2}(2\pi r) = 6 + \pi.$$



Solució 2:

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} .

\overline{MO} és i qual a $\frac{1}{3}$ de l'altura del triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Aleshores, } \overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PMO$:

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}. \text{ Aleshores, } \overline{PQ} = 1$$

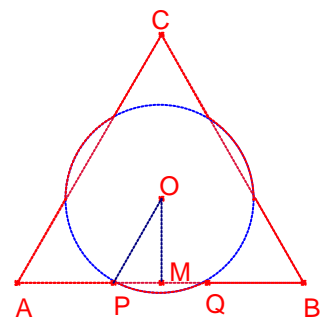
$$\overline{AP} = \overline{BQ}. \text{ Aleshores, } \overline{AP} = \overline{BQ} = 1.$$

Aleshores, el triangle $\triangle OPQ$ és equilàter.

Aleshores, l'arc de circumferència abraça 60° .

Per tant el perímetre de la figura és:

$$p = 6 \cdot \overline{AP} + \frac{1}{2}(2\pi r) = 6 + \pi.$$



193.- En un triangle $\triangle ABC$ $\overline{AB} < \overline{BC}$, L és el punt mig del costat \overline{AC} i M és el punt mig del costat \overline{AB} . Si P és un punt del segment \overline{LM} tal que $\overline{MP} = \overline{MA}$. Proveu que $\angle PBA = \angle PBC$.

Crux Mathematicorum M433

Solució:

El segment \overline{ML} és paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABC$.
Aleshores $\angle AML = B$.

El triangle $\triangle AMP$ és isòsceles, $\overline{MP} = \overline{MA}$. Aleshores, $\angle PAM = 90^\circ - \frac{B}{2}$.

\overline{PM} és mitjana del triangle $\triangle APM$. $\overline{MP} = \overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

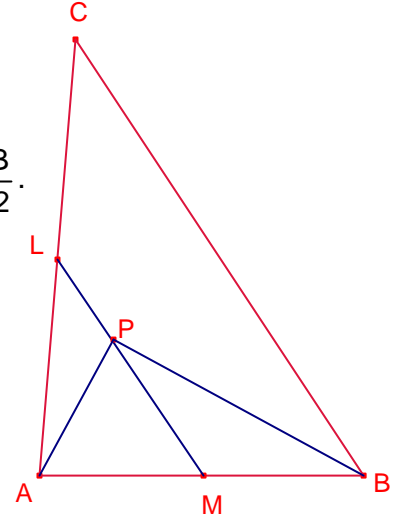
Aleshores el triangle $\triangle APM$ és rectangle, $\angle APB = 90^\circ$.

Per tant, $\angle PBA = 90^\circ - \angle PAB = \frac{B}{2}$.

$\angle PBC = B - \angle PBA = \frac{B}{2}$.

Aleshores, $\angle PBA = \angle PBC$.

Si eliminem la condició $\overline{AB} < \overline{BC}$ i considerem el punt P sobre la recta LM la propietat s'acompleix anàlogament.



194.- Les bases d'un trapezi mesuren 62 i 20cm i els costats laterals 45 i 39cm.
 Calculeu la seu àrea.
 Gúsiév 256

Solució:

Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles

$\overline{AB} = 62$, $\overline{CD} = 20$ i costats laterals $\overline{AD} = 45$,
 $\overline{BC} = 39$.

Siga $\overline{DK} = \overline{CL} = h$ altures del trapezi.

Siga $x = \overline{BL}$, aleshores, $\overline{AK} = 42 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles

rectangles $\triangle AKD$, $\triangle LBC$, respectivament:

$$45^2 = h^2 + (42 - x)^2.$$

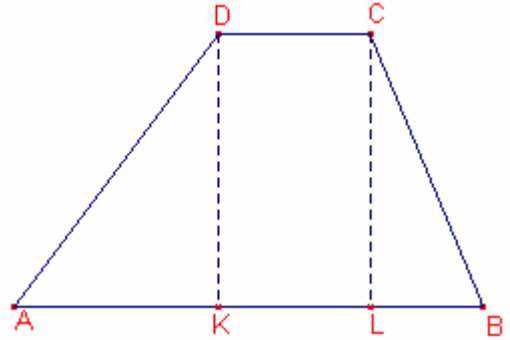
$$39^2 = h^2 + x^2.$$

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x = 15 \\ h = 36 \end{cases}$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{62 + 20}{2} \cdot 36 = 1476 \text{cm}^2.$$



195.- Les bases d'un trapezi mesuren 30 i 12cm i les diagonals 20 i 34cm.
Calculeu la seu àrea.

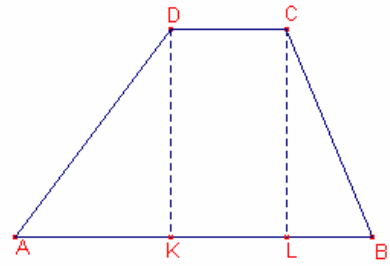
Gúsiév 257

Solució:

Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB} = 30$,
 $\overline{CD} = 12$ i diagonals $\overline{AC} = 20$, $\overline{BD} = 34$.

Siga $\overline{DK} = \overline{CL} = h$ altures del trapezi.

Siga $x = \overline{AK}$, aleshores, $\overline{KB} = 30 - x$, $\overline{AL} = 12 + x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangles $\triangle ALC$, $\triangle BKD$, respectivament:

$$20^2 = h^2 + (12 + x)^2.$$

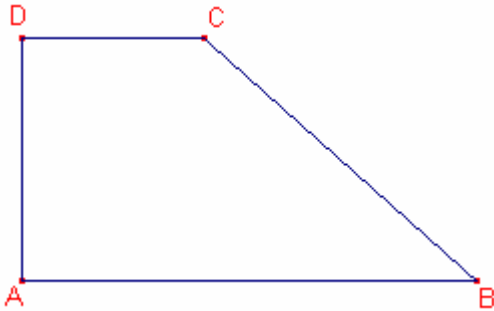
$$34^2 = h^2 + (30 - x)^2.$$

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x = 0 \\ h = 16 \end{cases}. \text{ Notem que el trapezi és isòsceles.}$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{30 + 12}{2} 16 = 336 \text{cm}^2.$$



196.- Una de les bases d'un trapezi és 7.

El trapezi té una circumferència inscrita tal que el punt de tangència divideix un dels costats laterals en dos segments de longitud 9 i 4.

Determineu l'àrea del trapezi.

Gúsiév 258.

Solució:

Siga el trapezi ABCD.

Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.

$$\overline{AK} = \overline{AN} = 9.$$

$$\overline{DM} = \overline{DN} = 4.$$

Amb aquestes condicions el costat menor és $\overline{CD} = 7$.

$$\overline{CM} = \overline{CL} = 3.$$

$$\text{Siga } \overline{BK} = \overline{BL} = x.$$

Siga $\overline{DP} = \overline{DQ} = h$ altura del trapezi.

$$\overline{AP} = \overline{AK} - \overline{DM} = 9 - 4 = 5. \quad \overline{BQ} = \overline{BK} - \overline{CM} = x - 3.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles

$\triangle APD$, $\triangle BQC$, respectivament:

$$13^2 = h^2 + 5^2.$$

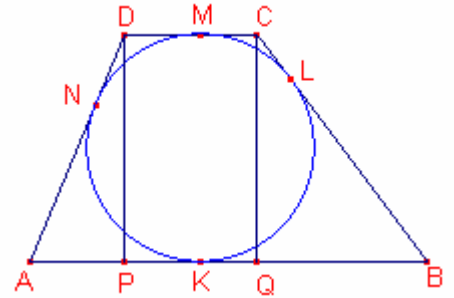
$$(3 + x)^2 = h^2 + (x - 3)^2.$$

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x = 1 \\ h = 12 \end{cases}.$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{21+7}{2} \cdot 12 = 168 \text{cm}^2.$$



197.- Un dels angles aguts d'un trapezi mesura 30° , els costats laterals són perpendiculars.

Una base mesura 8cm i la paral·lela mitjana 10cm.

Calculeu la mesura dels costats i la seua àrea.

Gúsiiev 80.

Solució:

Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = 8$.

Siga $\angle DAB = 30^\circ$.

Siga $\overline{PQ} = 10$ la paral·lela mitjana.

La continuació dels costats laterals s'intersecta en el punt O tal que $\angle AOB = 90^\circ$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle

$\triangle CDO$:

$$\overline{CO} = \frac{\overline{CD}}{2} = 4, \quad \overline{OD} = 4\sqrt{3}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle PQO$:

$$\overline{QO} = \frac{\overline{PQ}}{2} = 5, \quad \overline{OP} = 5\sqrt{3}.$$

$$\overline{QC} = 1, \quad \overline{PD} = \sqrt{3}.$$

Per ser \overline{PQ} paral·lela mitjana:

$$\overline{BP} = \overline{QC} = 1, \quad \overline{AP} = \overline{PD} = \sqrt{3}.$$

$$\overline{BC} = 2, \quad \overline{AD} = 2\sqrt{3}.$$

$$\overline{OB} = 6.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ABO$:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OB} = 12.$$

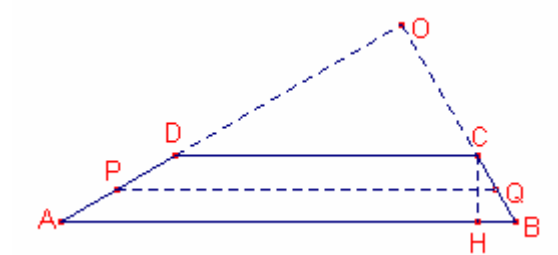
Siga \overline{CH} altura del trapezi ABCD.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CHB$:

$$\overline{CH} = \sqrt{3}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{12+8}{2} \sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$



198.- La corda comuna de dues circumferències que s'intersecten és igual a a , a més a més, per a una circumferència és el costat d'un hexàgon regular inscrit i per a l'altra el costat d'un quadrat inscrit. Calculeu la distància entre els centres de les dues circumferències.

Gúsiev 117.

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ corda comuna a les dues circumferències.

Siga O el centre de la circumferència que té inscrita l'hexàgon regular.

Siga P el centre de la circumferència que té inscrit el quadrat.

Siga M el punt mig de la corda \overline{AB} .

Hi ha dues solucions a aquest problema.

a) El quadrat i l'hexàgon només s'intersecten en la corda \overline{AB} .

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{AM} = \frac{a}{2}.$$

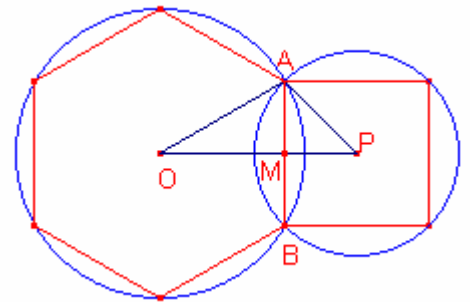
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMA$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{MP} = \frac{a}{2}.$$

Aleshores, la distància entre els centres és:

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}a.$$



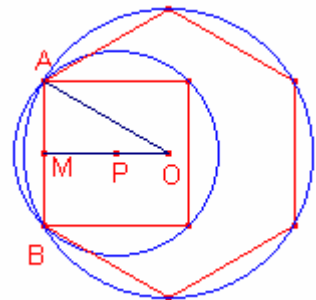
b) El quadrat és interior a l'hexàgon.

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{AM} = \frac{a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMA$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad \overline{MP} = \frac{a}{2}.$$

Aleshores, la distància entre els centres és: $\overline{OP} = \overline{OM} - \overline{MP} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}a$.



199.- Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB} = 20$, $\overline{CD} = 5$.

Es dibuixa una paral·lela a les bases que divideix el costat \overline{BC} en dos segments, el contigu a la base \overline{AB} mesura 6 i l'altre 9.

Calculeu la mesura del segment que forma la paral·lela i el trapezi.

García Ardura, problema 404.

Solució:

Siga el segment \overline{PQ} paral·lel a les bases tal que

$\overline{BQ} = 6$, $\overline{CQ} = 9$.

Les rectes BC i AD s'intersecten en el punt O.

Siga $\overline{OA} = a$.

$\overline{BC} = 15$.

Els triangles $\triangle ABO$, $\triangle DCO$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

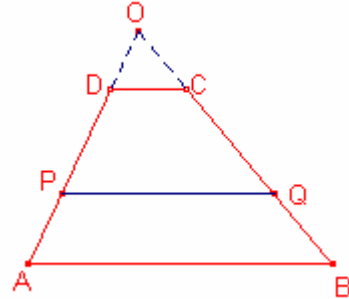
$$\frac{5}{a} = \frac{20}{15+a} . \text{ Resolent l'equació:}$$

$$a = 5 .$$

Els triangles $\triangle PQO$, $\triangle DCO$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{5}{a} = \frac{\overline{PQ}}{9+a} .$$

$$\overline{PQ} = 14 .$$



200.- Per un punt M de l'exterior d'un quadrat ABCD de costat 15m, que dista 9m del vèrtex C i 12m del vèrtex B, s'ha dibuixat la recta AM que talla el costat \overline{BC} en el punt N.

Calculeu la distància entre els punts A, N.
García Ardura, problema 405.

Solució:

Notem que el triangle $\triangle BCM$ és rectangle ja que $\overline{CB}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{BM}^2$.

Siga P la projecció de M sobre la recta AB.

Siga Q la projecció de M sobre la recta CD.

Siga $x = \overline{BP}$, $y = \overline{MP}$.

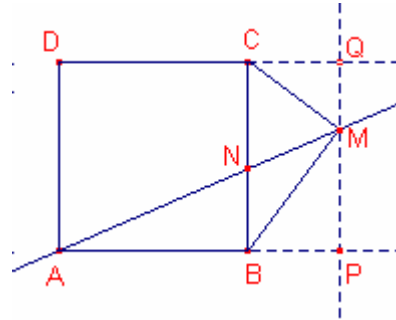
L'àrea del triangle $\triangle BCM$ és:

$$S_{\triangle BCM} = \frac{\overline{BC} \cdot x}{2} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{BM}}{2}.$$

$$\frac{15x}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$x = \frac{36}{5}.$$

$$\overline{AP} = 15 + x = \frac{111}{5}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BPM$:

$$y = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \frac{48}{5}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle APM$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 + \left(\frac{111}{5}\right)^2} = 3\sqrt{65}.$$

Els triangles $\triangle APM$, $\triangle ABN$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}.$$

$$\frac{\overline{AN}}{15} = \frac{3\sqrt{65}}{\frac{111}{5}}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\overline{AN} = \frac{75\sqrt{65}}{37} \approx 16,34\text{m}.$$