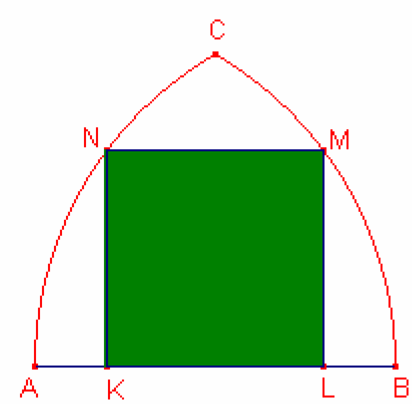
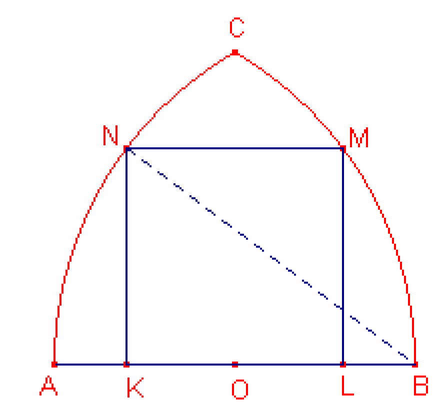
Problemes de Geometria per a l'ESO 23

221.- En la figura els arcs $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ tenen centre B, A, respectivament.
Si $\overline{AB}$ mesura 10cm calculeu el costat del quadrat KLMN.



Solució:
Siga $\overline{AB} = r$ radi dels dos arcs.
Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Siga $x = \overline{KL} = \overline{KN}$ costat del quadrat.



$\overline{BN} = r$, $\overline{BO} = \frac{r}{2}$, $\overline{KO} = \frac{x}{2}$.

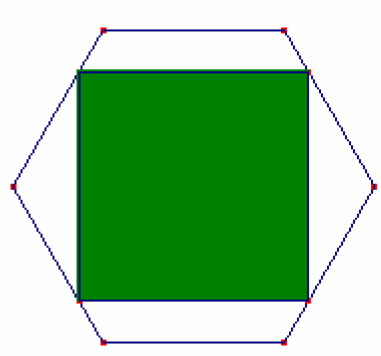
$\overline{BK} = \frac{x+r}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKN}$:

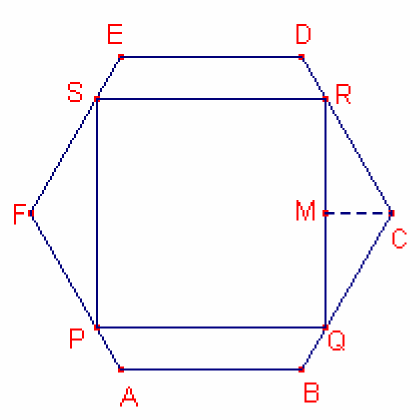
$r^2 = x^2 + \left(\frac{x+r}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = \frac{3}{5}r$.

222.- Dins de l'hexàgon regular de costat 10 s'ha inscrit un quadrat.
Calculeu la mesura del costat del quadrat.



Solució:



Siga $c=\overline{AB}$ costat de l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga $x=\overline{PQ}$ costat del quadrat PQRS.
Siga M el punt mig del costat $\overline{QR}$.

$\overline{FC}=2c$. $\overline{MR}=\dfrac{x}{2}$.

$\angle MRC=30^{o}$.

$\overline{MC}=\dfrac{2c-x}{2}$.

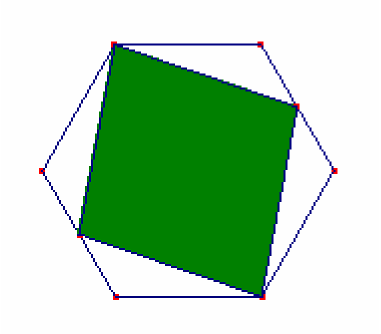
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMR}$:
$\overline{CR}=2\cdot\overline{CM}=2c-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMR}$:

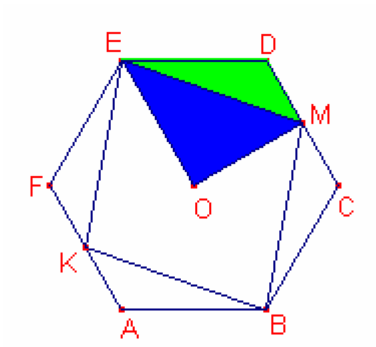
$(2c-x)^2=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2c-x}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x=\left(3-\sqrt{3}\right)c$.

223.- Dins d'un hexàgon regular s'ha dibuixat un rombe els vèrtexs del qual són dos vèrtexs oposats de l'hexàgon i dos punts mig de dos costats oposats. Calculeu la proporció entre les àrees del rombe i de l'hexàgon.
Sangaku.

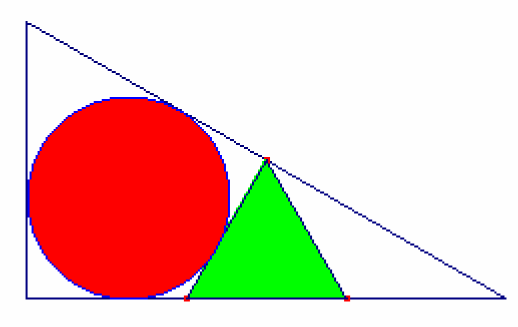


Solució:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O



Els triangles $\overset{\Delta}{OEM}$, $\overset{\Delta}{DME}$ tenen la mateixa altura sobre les bases $\overline{OE}$, $\overline{DM}$, respectivament.
Aleshores, les àrees són proporcionals a les bases.
Aleshores, $S_{OEM} = 2 \cdot S_{DME}$
L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és:
$S_{ABCDEF} = 4 \cdot S_{OMDE} = 4(S_{OEM} + S_{DME}) = 12 \cdot S_{DME}$.
L'àrea del rombe KBME és:
$S_{KBME} = 4 \cdot S_{OEM} = 8 \cdot S_{DME}$.
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{KBME}} = \frac{12 \cdot S_{DME}}{8 \cdot S_{DME}} = \frac{3}{2}.$$

224.- En un triangle rectangle un dels angles aguts mesura 30º i el catet menut 10.
Dins del triangle s'ha inscrit una circumferència i un triangle equilàter tangent a la circumferència i amb un costat sobre el catet major i el vèrtex oposat sobre la hipotenusa.
Calculeu el radi de la circumferència i el costat del triangle rectangle.
Sangaku



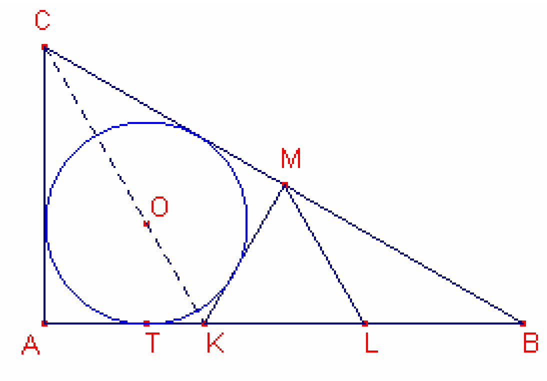
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o, B = 30^o, \overline{AC} = c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = 2c, \overline{AB} = c\sqrt{3}$.

Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el catet $\overline{AB}$.
El radi és:

$$r = \overline{OT} = \overline{AT} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c.$$



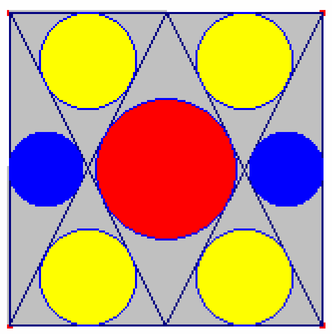
Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ el triangle equilàter.
$\angle AKM = 120^o$. Aleshores, $\angle KMC = 90^o$.
El quadrilàter AKMC està circumscrit a una circumferència, aleshores la suma dels costats oposats és igual:
$\overline{AC} + \overline{KM} = \overline{AK} + \overline{CM}$.

Siga $x = \overline{KL} = \overline{LM} = \overline{KM}$ el costat del triangle equilàter.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{MBK}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KB} = 2x$, $\overline{BM} = x\sqrt{3}$.
Aleshores, $\overline{AK} = c\sqrt{3} - 2x$, $\overline{CM} = 2c - x\sqrt{3}$.
$c + x = \left(c\sqrt{3} - 2x\right) + \left(2c - x\sqrt{3}\right)$
Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

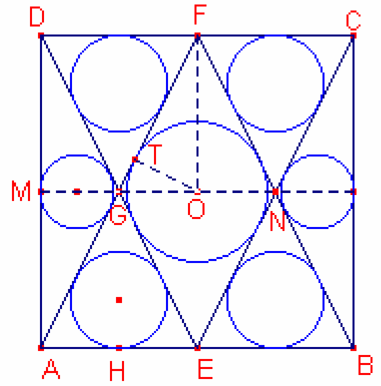
Notem que $\overline{CK}$ passa pel punt O ja que $\frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg30^o$.



225.- En la figura el quadrat ABCD té costat 10.
E i F són els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
Determineu els radis dels 3 tipus de cercles.
Sangaku.

Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $c=\overline{AB}$.
Siga G la intersecció de les rectes AF, DE.

Calculem el radi r_1 de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AEG}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{2}c$$

$$\overline{GE}=\overline{GA}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{4}.\quad \overline{GH}=\frac{c}{2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEG}$ és:

$$S_{AEG}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{GH}}{2}=\frac{\overline{AE}+\overline{AG}+\overline{GE}}{2}r_1.$$

$$\frac{1}{8}c^2=\frac{\frac{1}{2}c+2\frac{\sqrt{5}}{4}}{2}r_1.$$ Resolent l'equació: $r_1=\frac{\sqrt{5}-1}{8}c$.

Calculem el radi r_2 de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADG}$.

$$\overline{MG}=\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{c}{4}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADG}$ és:

$$S_{ADG}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{MG}}{2}=\frac{\overline{AD}+\overline{AG}+\overline{DG}}{2}r_2.$$

$$\frac{1}{8}c^2=\frac{c+2\frac{\sqrt{5}}{4}}{2}r_2.$$ Resolent l'equació: $r_2=\frac{\sqrt{5}-2}{2}c$.

Calculem el radi $r_3=\overline{OT}$ de la circumferència inscrita al rombe ENFG.

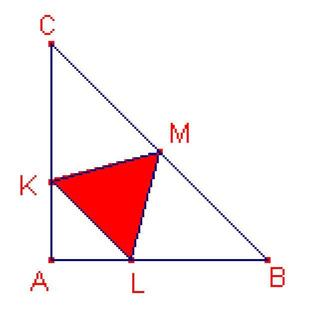
$$\overline{GO}=\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{c}{4}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GOF}$ és:

$$S_{ADG}=\frac{\overline{GO}\cdot\overline{OF}}{2}=\frac{\overline{GF}\cdot r_3}{2}.$$

$$\frac{1}{16}c^2=\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}r_3}{2}.$$ Resolent l'equació: $r_3=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

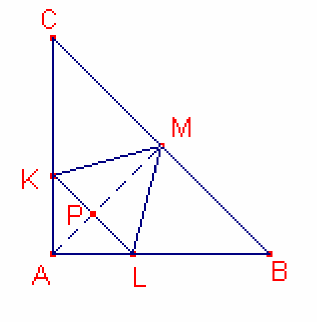
226.- Sobre els costats d'un triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$,
$A = 90^{o}$ de catet 10 s'ha inscrit un triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ (M en la hipotenusa) tal que la recta AM és perpendicular a $\overline{KL}$.
Calculeu el costat del triangle equilàter.



Solució:

Siga $c = \overline{AB} = \overline{AC}$ catets del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga $x = \overline{KL}$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.
Si AM és perpendicular a $\overline{KL}$, $\angle ALK = 45^{o}$.
Aleshores, $\angle MAL = 45^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c \qquad (1)$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$.

$$\overline{PL} = \overline{AP} = \frac{x}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{PM} = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PM} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x \qquad (2)$$

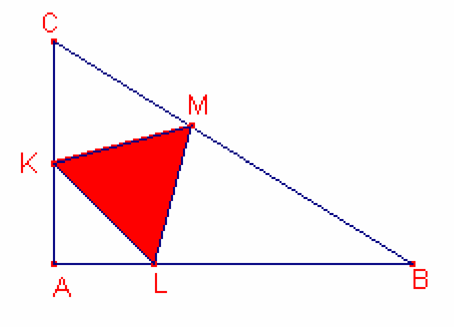
Igualant les expressions (1) i (2):

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Generalització:

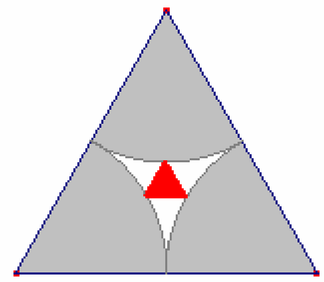
Sobre els costats d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$,
$A = 90^{o}$ de catets $b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$ 10 s'ha inscrit un triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ (M en la hipotenusa) tal que la recta AM és perpendicular a $\overline{KL}$.
Calculeu el costat del triangle equilàter.



Solució:

$$\overline{KL} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)bc}{b+c}.$$

227.- Dins d'un triangle equilàter de costat 10 s'ha dibuixat tres arcs de centres els vèrtexs i radis la meitat del costat del triangle.
Amb els punts migs dels arcs s'ha dibuixat un triangle equilàter.
Calculeu el costat d'aquest triangle equilàter

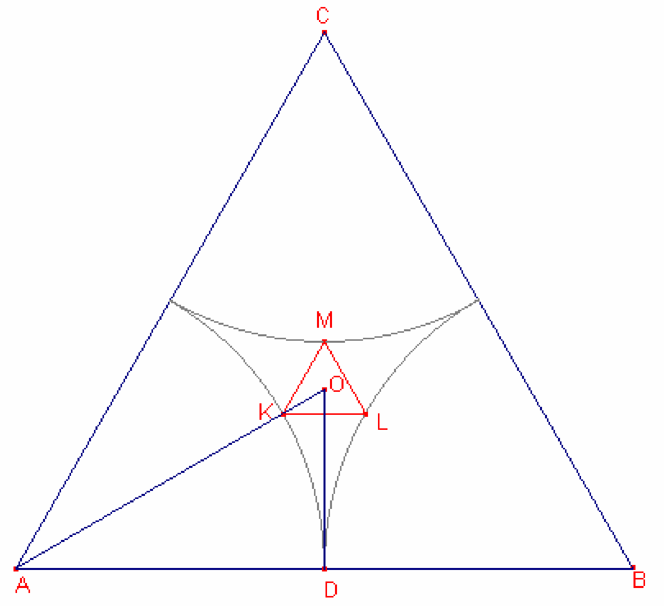


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $c=\overline{AB}$ i centre O.
Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADO}$:

$$\overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}c\,.$$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ format pels punts migs dels arcs
Siga $x=\overline{KL}$.



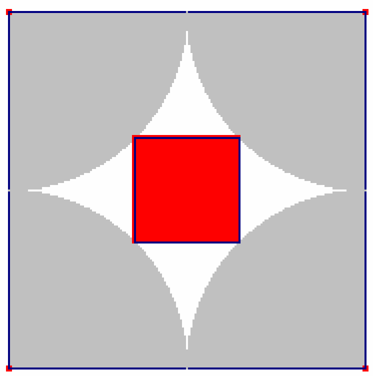
Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{KLO}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OK}}{\overline{OA}}.\quad \overline{OK}=\overline{OA}-\overline{AK}=\frac{\sqrt{3}}{3}c-\frac{1}{2}c$$

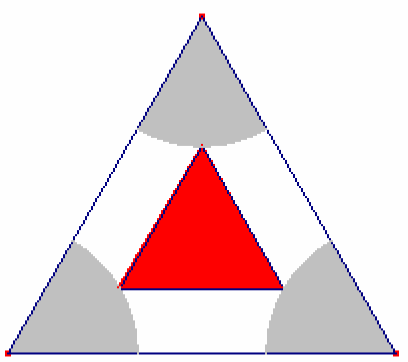
$$\frac{x}{c}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}c-\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{3}}{3}c}$$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{2-\sqrt{3}}{2}c\,.$$

Altres propostes.

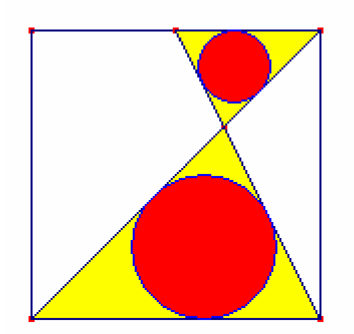


Solució: $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

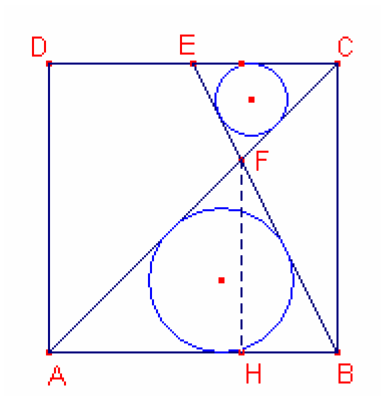


Solució: $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

228.- En el quadrat de costat c del dibuix s'ha dibuixat dos triangles amb una diagonal i un segment que uneix un vèrtex en el punt mig del costat.
En cada triangle s'ha inscrit una circumferència.
Calculeu el radi de les circumferències.
Sangaku.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $c=\overline{AB}$.
Siga E el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga F la intersecció de la diagonal $\overline{AC}$ i el segment $\overline{BE}$.



$\overline{AC}=c\sqrt{2}$, $\overline{BE}=\frac{c\sqrt{5}}{2}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{CEF}$ són semblants i la raó és 2:1.
Aleshores:

$\overline{AF}=\frac{2}{3}\overline{AC}=\frac{2c\sqrt{2}}{3}$, $\overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{BE}=\frac{c\sqrt{5}}{3}$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.

Siga $h=\overline{FH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.

$h=\overline{FH}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2c}{3}$.

L'àrea del triangle és:

$$S_{ABF}=\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{BF}+\overline{AF}}{2}r\,.$$

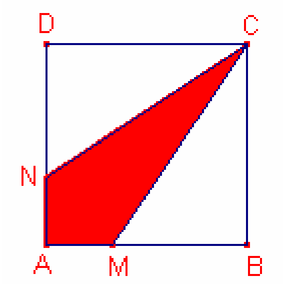
$$\frac{c\,\frac{2c}{3}}{2}=\frac{c+\frac{c\sqrt{5}}{3}+\frac{2c\sqrt{2}}{3}}{2}r\,.$$ Simplificant:

$2c=\left(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)r$. Resolent l'equació:

$$r=\frac{2}{3+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}c\,.$$

El radi de l'altra circumferència és:

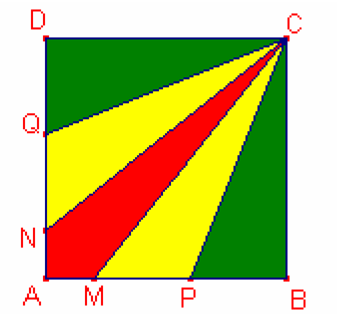
$$\frac{r}{2}=\frac{1}{3+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}c\,.$$



229.- En el quadrat ABCD de costat 10, s'ha dibuixat el quadrilàter AMCN tal que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{MBC}$, $\overset{\Delta}{NCD}$ i del quadrilàter AMCN són iguals.
Calculeu les mesures dels segments $\overline{AM}$, $\overline{AN}$.

Solució:
Siga $c = \overline{AB}$ costat del quadrat.
Siga $x = \overline{AM}$.
Com que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}$, $\overset{\Delta}{NCD}$ tenen la mateixa àrea i un catet igual a ambdós, els altres catets són iguals.
Aleshores, $\overline{MB} = \overline{ND}$, per tant, $x = \overline{AM} = \overline{AN}$.
$S_{MBC} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$.
$\frac{(c-x)c}{2} = c^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:
$x = \overline{AM} = \overline{AN} = \frac{c}{3}$.

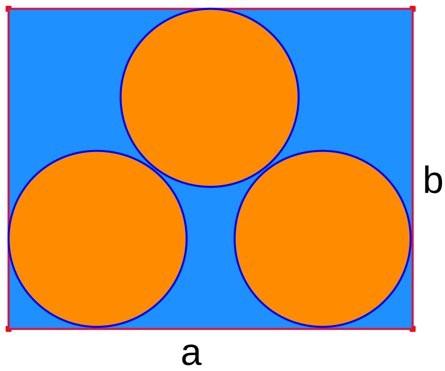
Altra proposta:



En el quadrat ABCD de costat 10, s'ha dibuixat els punts M, P sobre $\overline{AB}$ i els punts N, Q sobre $\overline{AD}$ tal que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{MPC}$, $\overset{\Delta}{PBC}$, $\overset{\Delta}{NQC}$, $\overset{\Delta}{QDC}$ i del quadrilàter AMCN són iguals.
Calculeu les mesures dels segments $\overline{AM}$, $\overline{MP}$.

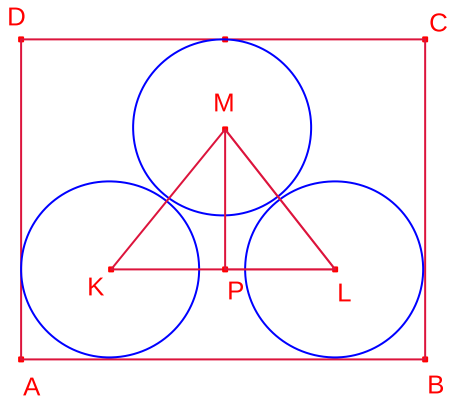
Solució:
$\overline{AM} = \frac{1}{5}c$, $\overline{MP} = \frac{2}{5}c$ on c és el costat del quadrat.

230.- Donat el rectangle de costats a, b s'han dibuixat 3 circumferències iguals.
Calculeu el radi de les circumferències.
Sangaku.



Solució:

Siga el rectangle ABCD $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$.
Siguen K, L, M els centre de les tres circumferències.
Siga r el seu radi.



$\overline{KM} = \overline{ML} = 2r$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és isòsceles.
Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$.

$\overline{PL} = \dfrac{a-2r}{2}$. $\overline{PM} = b - 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLM}$:

$(2r)^2 = (b-2r)^2 + \left(\dfrac{a-2r}{2}\right)^2$. Simplificant:

$r^2 - (4b+a)r + b^2 + \dfrac{a^2}{4} = 0$. Resolent l'equació:

$r = \dfrac{a + 4b - \sqrt{12b^2 + 8ab}}{2}$.