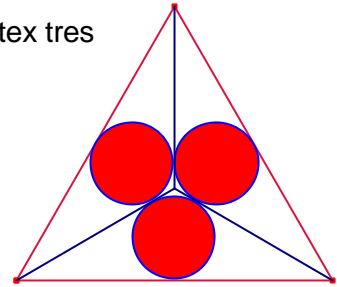


### Problemes de Geometria per a l'ESO 24

231.- El centre d'un triangle equilàter de costat  $c$  forma amb el vèrtex tres triangles iguals.

Calculeu el radi de les tres circumferències inscrites.



Solució:

Siga el triangle equilàter  $\triangle ABC$  de costat  $c = \overline{AB}$ .

Siga  $O$  el centre del triangle equilàter.

Siga  $D$  el punt mig del costat  $\overline{AB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ADC$ :

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Aplicant la propietat del baricentre del triangle:

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}c. \quad \overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

L'àrea del triangle  $\triangle ABO$  és:

$$S_{ABO} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OD}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}c^2.$$

$$S_{ABO} = \frac{\overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB}}{2}r \quad \text{en } r \text{ és el radi de la circumferència}$$

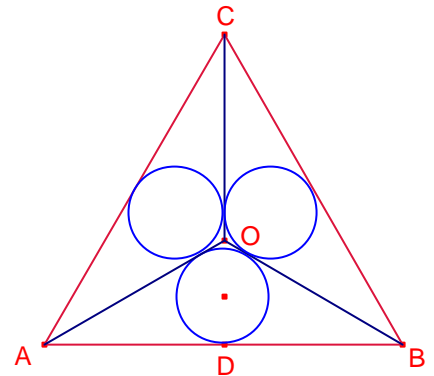
inscrita al triangle  $\triangle ABO$ .

$$S_{ABO} = \frac{(3 + 2\sqrt{3})c}{6}r.$$

Igualant les àrees:

$$\frac{\sqrt{3}}{12}c^2 = \frac{(3 + 2\sqrt{3})c}{6}r. \quad \text{Resolent l'equació:}$$

$$r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}c.$$



232.- Siga el quadrat ABCD de costat  $c$ . Siga M el punt mig del costat  $\overline{AB}$ .

La perpendicular al segment  $\overline{CM}$  que passa per M talla el costat  $\overline{AD}$  en el punt K

a) Proveu que  $\angle BCM = \angle KCM$ .

b) Proveu que el triangle  $\triangle KDM$  és semblant al triangle rectangle 3-4-5.

Solució:

Siga  $\alpha = \angle BCM$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MBC$ :

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

$\angle AMK = \alpha$ , aleshores, els triangles  $\triangle MBC$ ,  $\triangle KAM$  són semblants i la raó de semblança és 2:1.

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{CM}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{MB}}{\overline{CB}}. \text{ Aleshores, } \angle BCM = \angle KCM.$$

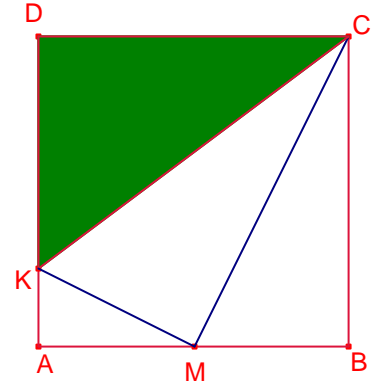
Per tant, els triangles rectangles  $\triangle MBC$ ,  $\triangle KMC$  són semblants.

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2}. \text{ Aleshores, } \overline{AK} = \frac{1}{4}c.$$

$$\text{Per tant, } \overline{KD} = \frac{3}{4}c.$$

$$\overline{DC} = \frac{4}{4}c.$$

Aleshores el triangle rectangle  $\triangle KDM$  és semblant al triangle rectangle 3-4-5.



233.- Donat el quadrat ABCD de centre O dibuixem la bisectriu a l'angle  $\angle ACD$  i la perpendicular a la bisectriu pel punt B que talla la diagonal  $\overline{AC}$  en el punt P i al costat  $\overline{CD}$  en el punt Q. Proveu que  $\overline{DQ} = 2 \cdot \overline{EP}$ .

Solució:

Siga F la intersecció de la bisectriu i la recta perpendicular a la bisectriu.

Notem que  $\angle FCQ = \angle FCP = \frac{45^\circ}{2}$ .

Aleshores,  $\overline{CQ} = \overline{CP}$ .

Notem que  $\angle FCQ = \angle QBC$ .

Aleshores,  $\angle EBP = \frac{45^\circ}{2}$ .

Els triangles rectangles  $\triangle PEB$ ,  $\triangle QCB$  són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

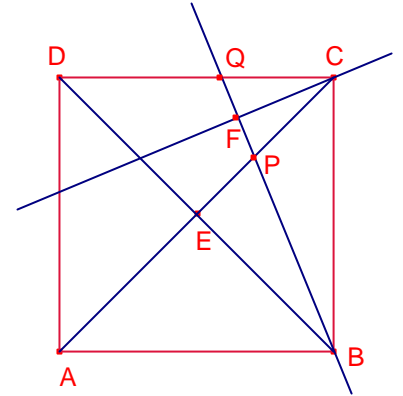
$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Els triangles  $\triangle DQB$ ,  $\triangle CPB$  són semblants.

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{c\sqrt{2}}{c} = \sqrt{2} \quad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{PE}} = 2.$$



234.- Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$  de catets  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BC} = a$ .  
 Sobre la hipotenusa  $\overline{AB}$  i exterior al triangle es dibuixa el quadrat  $ABLH$ .  
 Determineu la mesura del segment  $\overline{CH}$ .

Solució:

Siga  $P$  la projecció de  $H$  sobre la recta  $CA$ .

$\overline{AH} = \overline{AB}$ ,  $\angle CAB = \angle AHP$ .

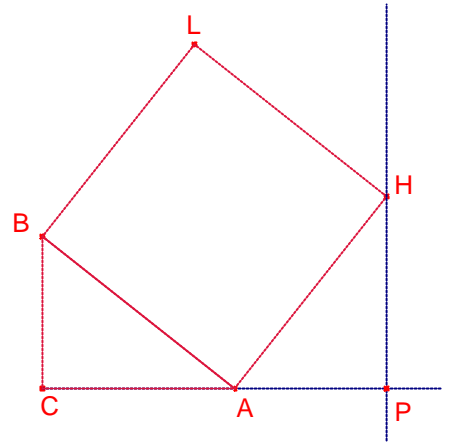
Aleshores els triangles rectangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle HAP$  són iguals.

Per tant,  $\overline{AP} = a$ ,  $\overline{HP} = b$ .

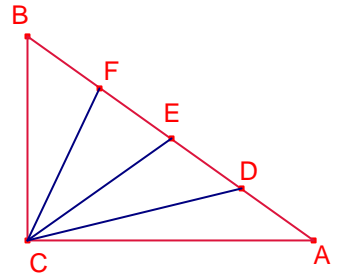
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CPH$ :

$$\overline{CH} = \sqrt{(a+b)^2 + b^2}.$$

Anàlogament,  $\overline{CL} = \sqrt{(a+b)^2 + a^2}$ .



235.- Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$  d'hipotenusa  $\overline{AB} = c$ .  
 La hipotenusa  $\overline{AB}$  s'ha dividit en quatre parts iguals pels punts D, E, F.  
 Calculeu la suma dels quadrats dels segments formats des de C als punts D, E, F.

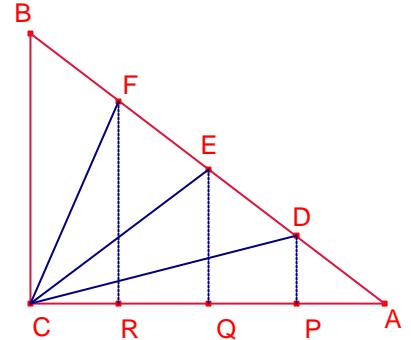


Solució:

Siga  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$  catets del triangle rectangle  $\triangle ABC$ .  
 Aplicant el teorema de Pitàgores,  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Siga A, D, E, F, B (en aquest ordre) els punts que divideixen la hipotenusa en quatre parts iguals.

Siguen P, Q, R les projeccions de D, E, F sobre el catet  $\overline{AC}$  respectivament.



$\overline{CR} = \frac{1}{4}b$ ,  $\overline{FR} = \frac{3}{4}a$ . Aplicant el teorema de Pitàgores al

triangle rectangle  $\triangle CRF$ :

$$\overline{CF}^2 = \frac{1}{16}b^2 + \frac{9}{16}a^2.$$

$\overline{CQ} = \frac{1}{2}b$ ,  $\overline{EQ} = \frac{1}{2}a$ . Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CQE$ :

$$\overline{CE}^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

$\overline{CP} = \frac{3}{4}b$ ,  $\overline{DP} = \frac{1}{4}a$ . Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CPD$ :

$$\overline{CD}^2 = \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{16}a^2.$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 = \frac{7}{8}(a^2 + b^2) = \frac{7}{8}c^2.$$

236.- Siga el triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

Sobre la altura  $\overline{AD}$  com a diàmetre es dibuixa una circumferència que talla els costats  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  en els punts E, F, respectivament. Calculeu la raó entre els segments  $\overline{EF}$ ,  $\overline{BC}$ .

Solució 1:

Siga c el costat del triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ADE$ :

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Notem que  $\overline{AE} = \overline{EF}$ .

Siga,  $x = \overline{AE}$ ,  $y = \overline{DE}$ .

El triangle  $\triangle AED$  és rectangle en E ja que abraça un diàmetre. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4} c^2 \quad (1)$$

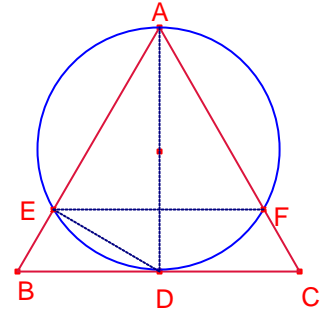
El triangle  $\triangle BED$ . Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$(c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4} c^2 \quad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} c^2 \\ (c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4} c^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} c \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4} c \end{cases}.$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{3}{4} c}{c} = \frac{3}{4}.$$



Solució 2:

Siga c el costat del triangle equilàter  $\triangle ABC$ .

El triangle  $\triangle AEF$  és equilàter.

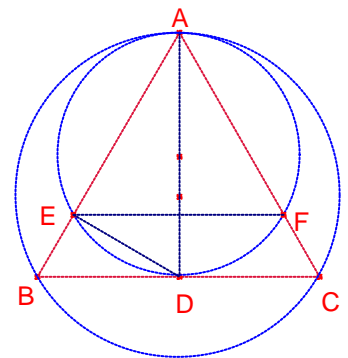
El radi de la circumferència inscrita al triangle  $\triangle ABC$  és:

$$R = \frac{2}{3} \overline{AD}.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle  $\triangle AEF$  és:

$$r = \frac{1}{2} \overline{AD}.$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{1}{2} \overline{AD}}{\frac{2}{3} \overline{AD}} = \frac{3}{4}.$$



237.- Sobre la circumferència circumscriu al quadrat ABCD de costat  $c$  es troba el punt E.

Calculeu  $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$ .

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores les diagonals del quadrat mesuren:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 = 2c^2.$$

Les diagonals del quadrat són diàmetres de la circumferència.

Notem que el triangle  $\triangle AEC$  ja que abraça un diàmetre de circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 = 2c^2.$$

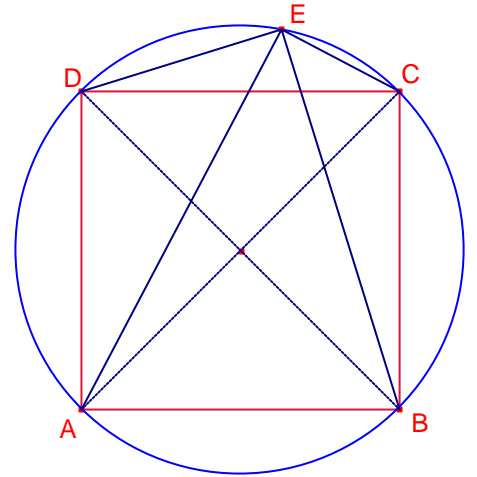
Notem que el triangle  $\triangle BED$  ja que abraça un diàmetre de circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

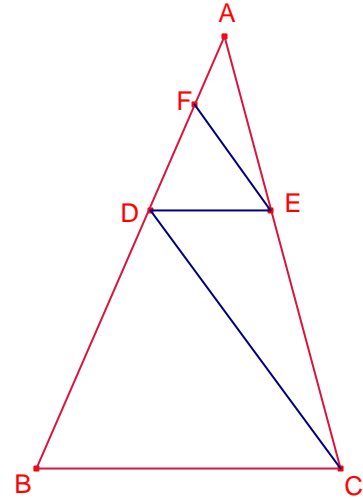
$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BD}^2 = 2c^2.$$

Sumant ambdues expressions:

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 4c^2.$$



238.- En el triangle  $\triangle ABC$  de la figura  $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$  i  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ .  
Si  $\overline{AF} = 4$  i  $\overline{DF} = 6$ . Calculeu  $\overline{BD}$ .



Solució:

Siga  $x = \overline{BD}$ .

Siga  $\overline{EF} = a$  i  $\overline{DE} = b$ .

Els triangles  $\triangle AFE$ ,  $\triangle ADC$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}. \quad \overline{CD} = \frac{10}{4}a = \frac{5}{2}a.$$

Els triangles  $\triangle DEF$ ,  $\triangle BCD$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}. \quad \overline{BC} = \frac{10}{4}b = \frac{5}{2}b.$$

Els triangles  $\triangle ADE$ ,  $\triangle ABC$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

$$\frac{10+x}{10} = \frac{5}{2}. \quad \text{Aleshores, } x = \overline{BD} = 15.$$

Generalització:

En el triangle  $\triangle ABC$  de la figura  $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$  i  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ .

Si  $\overline{AF} = m_1$  i  $\overline{DF} = m_2$  aleshores,  $\overline{BD} = \frac{(m_1 + m_2)m_2}{m_1}$ .

239.- Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$ ,  $C = 90^\circ$ .

Siguen els punts D, E de la hipotenusa tal que  $\overline{AE} = \overline{AC}$ ,  $\overline{BD} = \overline{BC}$ .

Siga F la projecció de E sobre el catet  $\overline{BC}$ .

Siga G la projecció de D sobre el catet  $\overline{AC}$ .

Proveu que  $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$ .

Solució:

Siga  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle ABC$ :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

$$\overline{DE} = \overline{BD} - (\overline{AB} - \overline{AE}) = a - (c - b) = a + b - c.$$

Els triangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ADG$  són semblants, aplicant el teorema de Tales:

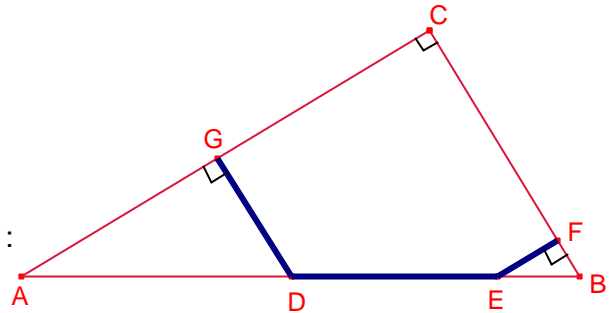
$$\frac{\overline{DG}}{c - a} = \frac{a}{c}. \text{ Aleshores, } \overline{DG} = \frac{a(c - a)}{c}.$$

Els triangles  $\triangle ABC$ ,  $\triangle EBF$  són semblants, aplicant el teorema de Tales:

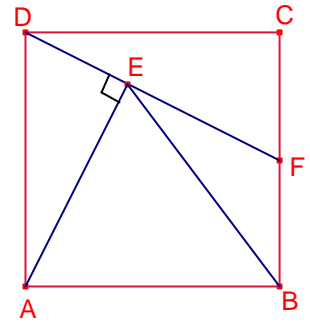
$$\frac{\overline{EF}}{c - b} = \frac{b}{c}. \text{ Aleshores, } \overline{EF} = \frac{b(c - b)}{c}.$$

$$\overline{EF} + \overline{DG} = \frac{b(c - b)}{c} + \frac{a(c - a)}{c} = \frac{bc - b^2 + ac - a^2}{c} = \frac{bc + ac - c^2}{c} = a + b - c.$$

Aleshores,  $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$ .



240.- El costat del quadrat ABCD és c.  
 F és el punt mig del costat  $\overline{BC}$ .  
 Siga E la projecció de A sobre el segment  $\overline{DF}$ .  
 Calculeu la mesura del segment  $\overline{BE}$ .



Solució 1:

Efectuem el gir de  $-90^\circ$  i centre A del triangle  $\triangle AED$  que el transforma en el triangle  $\triangle ABE'$ .  
 El costat  $\overline{GE'}$  quadrat  $AE'GE$  conté el punt B.

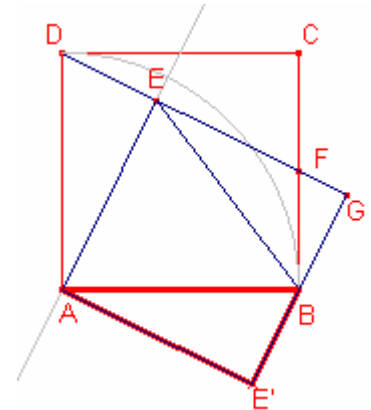
Els triangles  $\triangle FCD$ ,  $\triangle DEA$  són semblants:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores,  $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BE'}}{\overline{AE'}} = \frac{1}{2}.$

Per tant, B és el punt mig del costat  $\overline{GE'}$ .

Aleshores,  $\overline{BE} = \overline{AB}.$



Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle FCD$ :

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

Els triangles  $\triangle FCD$ ,  $\triangle DEA$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}. \quad \frac{\overline{DE}}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}. \quad \text{Aleshores, } \overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{5}c.$$

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c.$$

Siga H la projecció de E sobre el segment  $\overline{AB}$

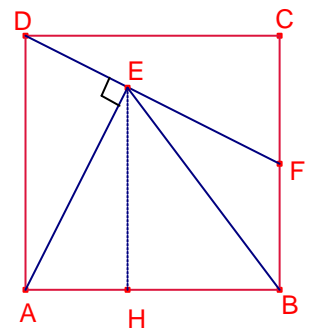
Els triangles  $\triangle FCD$ ,  $\triangle AHE$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}. \quad \frac{\overline{EH}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}c} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}. \quad \text{Aleshores, } \overline{EH} = \frac{4}{5}c.$$

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{EH} = \frac{2}{5}c.$$

$$\overline{BH} = c - \overline{AH} = \frac{3}{5}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BHE$ ,  $\overline{BE} = c.$



Solució 3:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle FCD$ :  $\overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$ .

Els triangles  $\triangle FCD$ ,  $\triangle DEA$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} \quad \frac{\overline{DE}}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c} \quad \text{Aleshores, } \overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{5}c.$$

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c \quad \overline{EF} = \overline{DF} - \overline{DE} = \frac{3\sqrt{5}}{10}c \quad \overline{AF} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

El quadrilàter ABFE és inscriptible ja que té dos angles oposats rectes. Aplicant el teorema de Tolomeu:

$$\overline{EF} \cdot \overline{AB} + \overline{AE} \cdot \overline{BF} = \overline{AF} \cdot \overline{BE}.$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{10}c \cdot c + \frac{2\sqrt{5}}{5}c \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}c \cdot \overline{BE} \quad \text{Resolent l'equació:}$$

$$\overline{BE} = c.$$

