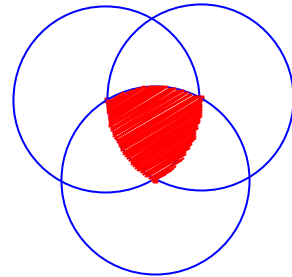


Problemes de Geometria per a l'ESO 31

301.- En la figura hi ha tres cercles de radi 2. El centre de cada cercle és la intersecció de altres dos. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Els centres A, B, C dels 3 cercles formen un triangle equilàter de costat 2.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a la suma de les àrees del triangle equilàter de costat 2 i l'àrea de 3 segments circulars de 60° i radi 2.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

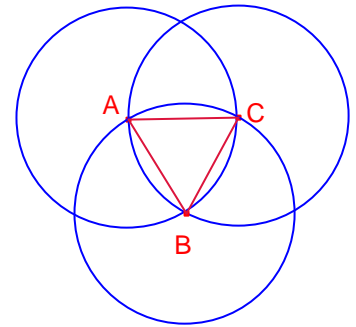
$$S_{ABC} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

L'àrea d'un segment circular de radi 2 i 60° és:

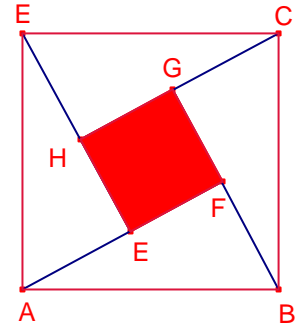
$$S_{\text{segment}} = \frac{1}{6} \pi \cdot 2^2 - \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = S_{ABC} + 3 \cdot S_{\text{segment}} = \sqrt{3} + 3 \left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = 2\pi - 2\sqrt{3}.$$



302.- En el dibuix, ABCD és un quadrat de costat 17, Els triangles $\triangle ABF$, $\triangle DAE$, $\triangle BCG$ i $\triangle CDH$ són rectangles i iguals. Si $\overline{BF} = 8$ determineu l'àrea del quadrilàter EFGH ombrejat.



Solució:

Notem que EFGH és un quadrat, ja que els quatre triangles de l'enunciat són iguals.

$$\overline{AE} = \overline{BF} = 8 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABF$:

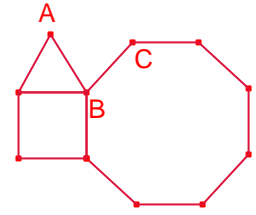
$$\overline{AF} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 .$$

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = 15 - 8 = 7 .$$

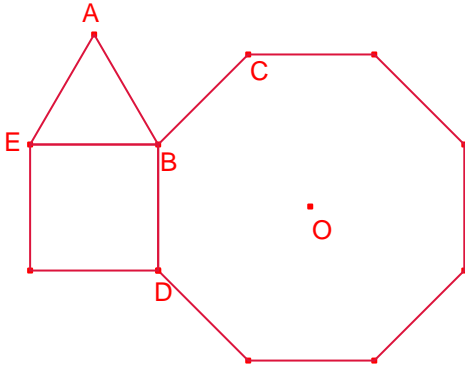
L'àrea del quadrat EFGH és:

$$S_{EFGH} = \overline{EF}^2 = 7^2 = 49 .$$

303.- En la figura, sobre un costat d'un octògon regular s'ha dibuixat un quadrat i sobre el costat d'un quadrat s'ha dibuixat un triangle equilàter. Calculeu l'angle $\angle BAC$.



Solució:



Notem que els costats de l'octògon el quadrat i el triangle equilàter són iguals.

Aleshores, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Per tant, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

L'angle interior de l'octògon regular és:

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 135^\circ.$$

$$\angle ABC = 360^\circ - (\angle CBD + \angle DBE + \angle ABE) = 360^\circ - (135^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 75^\circ.$$

$$\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 75^\circ}{2} = 52^\circ 30'.$$

304.- La circumferència $x^2 + y^2 = 1$ s'intersecta amb la recta $y = 7x + 5$ en els punts A i B.

Si O és el centre de la circumferència, calculeu la mesura de l'angle $\angle AOB$.

Solució:

$x^2 + y^2 = 1$ és la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi 1.

La intersecció de la circumferència i la recta és la solució dels sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 7x + 5 \end{cases}, \text{ les solucions d'aquest són } \begin{cases} x = \frac{-3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{-4}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \end{cases}.$$

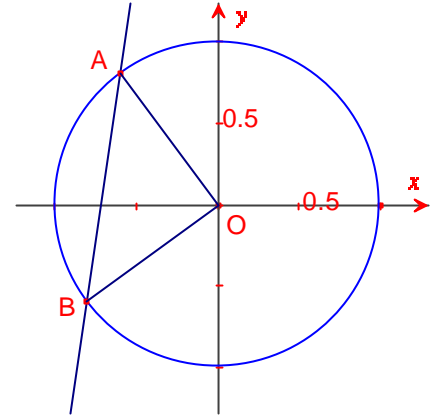
Les coordenades dels punts d'intersecció són:

$$A\left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right), B\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right).$$

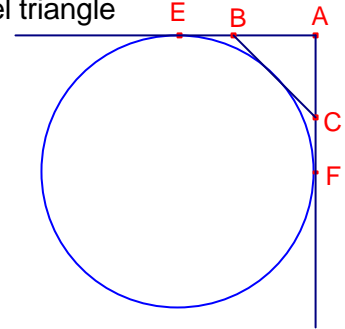
Per ser A i B de la circumferència, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{-4}{5} - \frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Aleshores, $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, aleshores, el triangle $\triangle OAB$ és rectangle i isòsceles, per tant, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$.



305.- En la figura, la circumferència és tangent a la hipotenusa del triangle rectangle i isòsceles $\triangle ABC$, la recta AC és tangent a la circumferència en el punt F i la recta AB és tangent a la circumferència en el punt E.



Si l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és 9, quina és l'àrea del cercle?.

Solució:

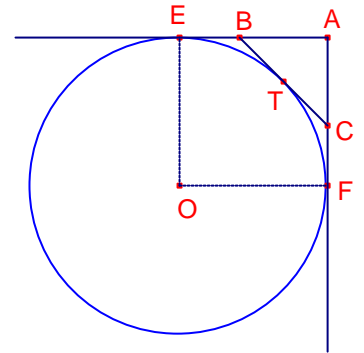
Siga O en el centre de la circumferència.

Per ser E, F punts de tangència, $\overline{AE} = \overline{AF}$.

\overline{OF} és perpendicular a la recta AC, \overline{OE} és perpendicular a la recta AE.

Aleshores, OFAE és un quadrat.

El radi de la circumferència és $r = \overline{OF} = \overline{AE}$.



Si l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és):

$$9 = \frac{1}{2} \overline{AB}^2, \overline{AB}^2 = 18. \overline{AB} = 3\sqrt{2}.$$

$$\overline{BC}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 = 2 \cdot 18 = 36.$$

Aleshores, $\overline{BC} = 6$.

Siga T el punt de tangència de la hipotenusa \overline{BC} i la circumferència.

Per ser, E i T punts de tangència: $\overline{BT} = \overline{BE}$.

Per ser, F i T punts de tangència: $\overline{CT} = \overline{CF}$.

Com que $\overline{AE} = \overline{AF}$ i $\overline{AB} = \overline{AC}$, tenim que $\overline{BE} = \overline{CF}$.

Per tant, $\overline{BT} = \overline{CT} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3$.

El radi de la circumferència és:

$$r = \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = 3\sqrt{2} + 3.$$

L'àrea del cercle és:

$$S_{\text{cercle}} = \pi(3\sqrt{2} + 3)^2 = 9\pi(3 + 2\sqrt{2}).$$

306.- Considerem els punts $A(0,0)$, $B(b,2)$, $C(b,5)$, $D(0,d)$, on b i d són enters positius, que formen un trapezi d'àrea 25.
 Determineu els valors possibles de b i d .
Kömal K292.

Solució:

Els segments $\overline{AD} = d$, $\overline{BC} = 3$ són paral·lels.

L'altura de trapezi és: $\overline{BH} = b$.

L'àrea del trapezi és:

$$\frac{(d+3)b}{2} = 25.$$

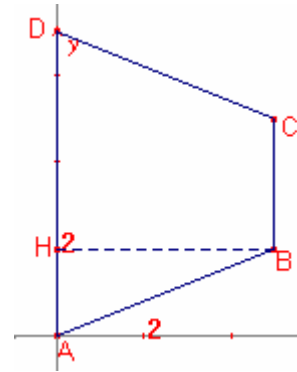
$$(d+3)b = 50, \quad d, b \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} d+3 = 5 \\ b = 10 \end{cases}, \text{ aleshores, } \begin{cases} d = 2 \\ b = 10 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} d+3 = 10 \\ b = 5 \end{cases}, \text{ aleshores, } \begin{cases} d = 7 \\ b = 5 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} d+3 = 25 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ aleshores, } \begin{cases} d = 22 \\ b = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} d+3 = 50 \\ b = 1 \end{cases}, \text{ aleshores, } \begin{cases} d = 47 \\ b = 1 \end{cases}.$$



307.- ABCDE és un pentàgon que té vèrtexs $A(0, 0)$, $B(11, 0)$, $C(11, 2)$, $D(6, 2)$, $E(0, 8)$.

Volem dividir el pentàgon en dos polígons d'igual àrea mitjançant una recta de la forma $x = k$. Determineu el valor de k .

Solució:

Siga D' la projecció de D sobre el costat \overline{AB} .

L'àrea del polígon ABCDE és igual a la suma l'àrea del rectangle BCDD' i l'àrea del trapezi AD'DE.

$$S_{ABCDE} = 5 \cdot 2 + \frac{8+2}{2} \cdot 6 = 40.$$

L'àrea del rectangle BCDD' és 10 per tant el valor de k pertany a $]0,6[$.

La recta $x = k$ talla el segment $\overline{AD'}$ en el punt P , i el segment \overline{DE} en el punt Q .

La recta DE té equació: $r_{DE} \equiv y = -x + 8$.

Les coordenades de P i Q són:

$$P(k, 0), \quad Q(k, 8 - k)$$

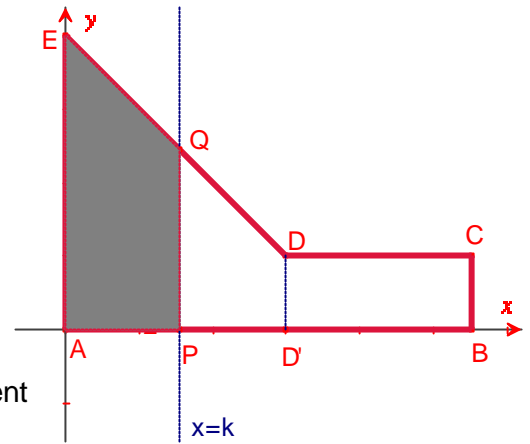
$$\overline{PQ} = 8 - k.$$

L'àrea del trapezi APQE és la meitat del pentàgon ABCDE, és a dir, 20.

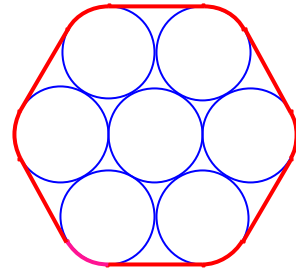
$$S_{APQE} = \frac{\overline{AE} + \overline{PQ}}{2} \cdot \overline{AP}.$$

$$\frac{8 + 8 - k}{2} \cdot k = 20.$$

Resolent l'equació $k = 8 - 2\sqrt{6}$.



308.- La imatge mostra 7 monedes iguals de radi 1 que s'han col·locat tangents unes a les altres. Hem posat un cordó al voltant de les monedes. Quina és la longitud del cordó?
Cangur 2011. nivell 3. problema 9.



Solució:

Els centres de les 6 circumferències (monedes) exterior formen un hexàgon regular de costat 2.

Considerem la circumferència de centre A.

Siguin P i Q els punt de tangència del cordó i la circumferència.

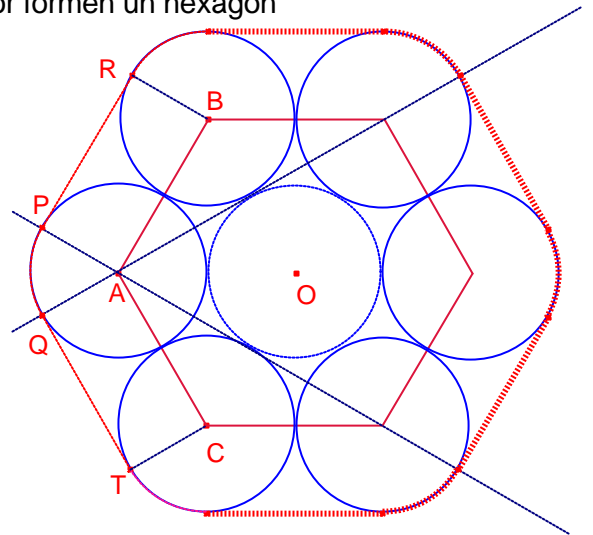
Considerem la circumferència de centre B, Siga R el punt de tangència del cordó i la circumferència més proper a P.

Considerem la circumferència de centre C, Siga T el punt de tangència del cordó i la circumferència més proper a Q.

Per ser el cordó tangent a les circumferències:

\overline{AP} és perpendicular a \overline{PR} i a \overline{AB} .

\overline{AQ} és perpendicular a \overline{QT} i a \overline{AC} .



L'angle interior d'un hexàgon regular és $\angle BAC = 120^\circ$.

Aleshores, $\angle PAQ = 60^\circ$.

El perímetre p de la corda és igual a una circumferència de radi 1 i 6 segments iguals a

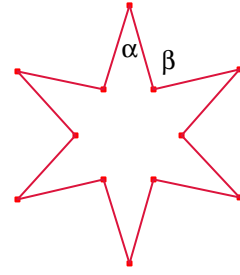
$\overline{PR} = \overline{AB} = 2$.

El perímetre és:

$$p = 2\pi \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 12 + 2\pi.$$

309.- Lluïsa ha dibuixat una estrella de 6 puntes regular de tal forma que l'angle exterior β és el doble de l'angle interior α .
Calculeu l'angle α .

Proves Cangur 2011. Nivell 3. problema 15.



Solució:

L'estrella està inscrita en un hexàgon regular de centre O.

Siguen A i B, C tres vèrtexs consecutius de l'estrella.

$\triangle OAC$ és un triangle equilàter, $\angle OAC = 60^\circ$

$$\angle OAB = \frac{\alpha}{2}.$$

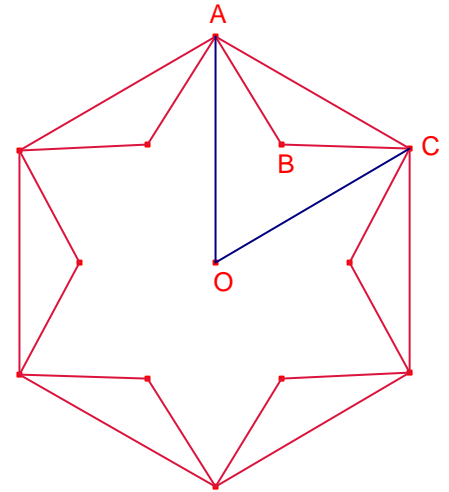
Per ser el triangle $\triangle ABC$ isòsceles, $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

$$\text{Aleshores, } \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 60^\circ.$$

Per hipòtesi $\beta = 2\alpha$.

$$\text{Resolent el sistema } \begin{cases} \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 60^\circ \\ \beta = 2\alpha \end{cases} :$$

$$\begin{cases} \alpha = 60^\circ \\ \beta = 120^\circ \end{cases}.$$



L'àrea d'un triangle rectangle $\triangle ABC$ és 54 i la longitud del catet \overline{AC} és mitjana aritmètica del catet \overline{AB} i la hipotenusa \overline{BC} . Quina és la longitud de l'altura sobre la hipotenusa?

Proves Cangur 2011. Nivell 3. Problema 21.

Solució:

Siga $h = \overline{AH}$ altura sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{ah}{2} = 54.$$

Aleshores, $bc = 108$.

Per hipòtesi $b = \frac{a+c}{2}$.

Aleshores, $a = 2b - c$. Elevant al quadrat:

$$a^2 = 4b^2 + c^2 - 4bc. \text{ Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle } \triangle ABC:$$

$$b^2 + c^2 = 4b^2 + c^2 - 4bc. \text{ Simplificant:}$$

$$3b^2 - 4bc = 0.$$

$$3b^2 - 4 \cdot 108 = 0. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$b = 12.$$

$$12c = 108. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$c = 9.$$

$$a = 2 \cdot 12 - 9 = 15.$$

Calculem l'altura sobre la hipotenusa del triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{15 \cdot h}{2} = 54. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$h = \frac{36}{5}.$$

