

Problemes de Geometria per a l'ESO 36

351.- Determineu l'àrea de la lúnula la corda comuna de la qual mesura 24m i els radis de 15m i 20m.

Solució:

Siga $\overline{AB} = 24$ la corda comuna.

Siga O_1 el centre de l'arc de radi 20, O_2 el centre de l'arc de radi 15.

Siga M el punt mig de la corda \overline{AB} .

$\overline{O_1A} = 20$, $\overline{AM} = 12$. Aplicant el teorema de Pitàgores i

raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AMO_1$:

$\overline{O_1M} = 16$, $\angle AO_1B = 73^\circ 44' 23''$.

$\overline{O_2A} = 15$, $\overline{AM} = 12$. Aplicant el teorema de Pitàgores i

raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AMO_2$:

$\overline{O_2M} = 9$, $\angle AO_2B = 106^\circ 15' 37''$.

$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1M} - \overline{O_2M} = 16 - 9 = 7$.

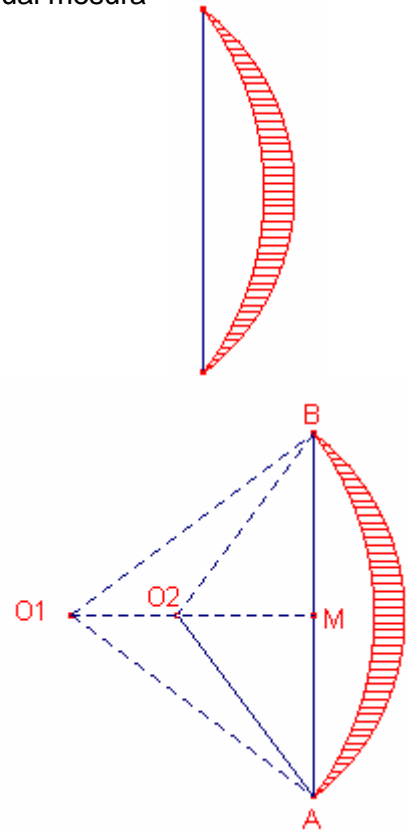
L'àrea de la lúnula és igual a l'àrea del sector de radi 15 i corda \overline{AB} , menys l'àrea del sector de radi 20 i corda \overline{AB} , més el doble de l'àrea del triangle $\triangle O_1O_2A$.

L'àrea del triangle $\triangle O_1O_2A$ és:

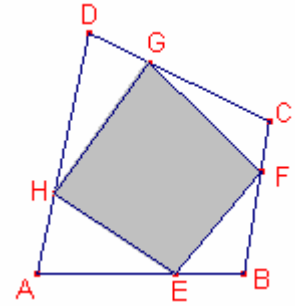
$$S_{O_1O_2A} = \frac{\overline{O_1O_2} \cdot \overline{AM}}{2} = \frac{7 \cdot 12}{2} = 42.$$

L'àrea de la lúnula és:

$$S = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 106^\circ 15' 37''}{360^\circ} - \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 73^\circ 44' 23''}{360^\circ} + 2 \cdot 42 \approx 35'24\text{m}^2.$$



352.- Siguen E; F, G i H punts dels costats quadrilàter convex ABCD tal que $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{BE}$, $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{CF}$, $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{DG}$, $\overline{DH} = 2 \cdot \overline{AH}$.
 Determineu la proporció entre les àrees dels quadrilàters ABCD i EFGH.
Garcia Ardura2. p729



Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\triangle CFG$.

Els triangles $\triangle CFG$, $\triangle BFG$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$S_{BFG} = 2S.$$

$$S_{CBG} = 3S.$$

Els triangles $\triangle CBG$, $\triangle BDG$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$S_{BDG} = \frac{1}{2} 3S = \frac{3}{2} S.$$

$$S_{BCD} = \frac{9}{2} S_{CFG} \quad (1)$$

Anàlogament:

$$S_{BAD} = \frac{9}{2} S_{AHE} \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$S_{ABCD} = \frac{9}{2} (S_{CFG} + S_{AHE}) \quad (3)$$

Anàlogament:

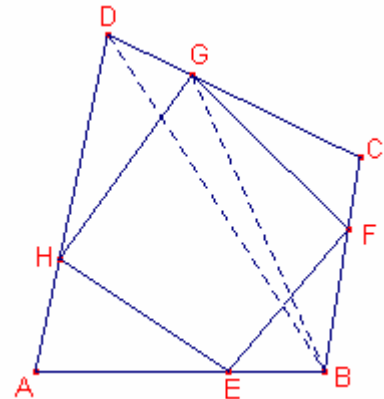
$$S_{ABCD} = \frac{9}{2} (S_{BEF} + S_{DGH}) \quad (4)$$

Sumant les expressions (3) (4):

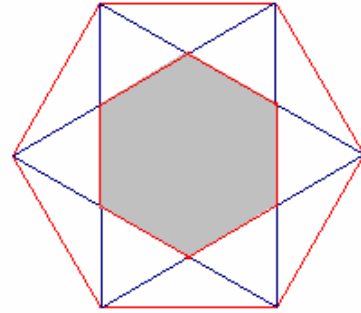
$$2 \cdot S_{ABCD} = \frac{9}{2} (S_{CFG} + S_{AHE} + S_{BEF} + S_{DGH}) = \frac{9}{2} (S_{ABCD} - S_{EFGH}).$$

$$9 \cdot S_{EFGH} = 5 \cdot S_{ABCD}.$$

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}.$$



353.- En un hexàgon regular s'ha inscrit dos triangles equilàters que formen un altre hexàgon regular en l'interior.
 Determineu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.



Solució 1:

Siga $ABCDEF$ l'hexàgon regular exterior, $GHIJKL$ l'hexàgon regular interior.

Siga P el punt mig del costat \overline{AB} .

Siga $c = \overline{AB}$ costat de l'hexàgon exterior.

Per ser $ABCDEF$ un hexàgon regular:

$\angle CAE = 60^\circ$, $\angle ABG = \angle BAC = 30^\circ$.

Els triangles isòscels $\triangle ABG$, $\triangle AFL$ són iguals ja que tenen un costat igual i els angles adjacents al costats iguals, per tant:

$\overline{AG} = \overline{AL}$.

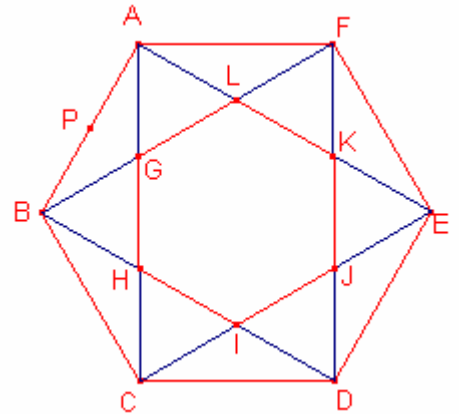
Aleshores, $\triangle ALG$ és un triangle equilàter.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle APG$:

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AP} = \frac{c}{2}$. Aleshores, $\overline{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}c$.

Els dos hexàgons regulars són semblants, la raó de les àrees és igual a quadrat de la raó dels costats:

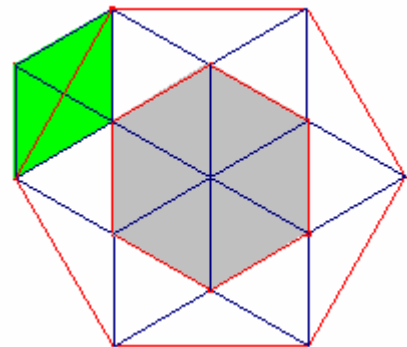
$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{\overline{AM}}{\overline{BC}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}c}{c}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$



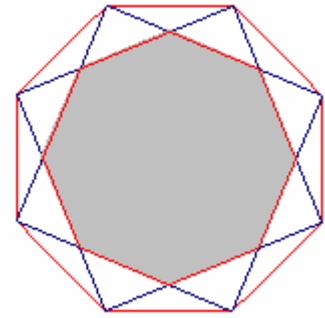
Solució 2:

L'hexàgon interior conté 6 triangle equilàters, l'hexàgon exterior en conté 18.

La proporció entre les àrees és $\frac{1}{3}$.



354.- En un octògon regular s'ha inscrit dos quadrats que formen un altre octògon regular en l'interior.
 Determineu la proporció entre les àrees dels dos octògon.



Solució:

Siga ABCDEFGH l'octògon regular exterior, IJKLMNPQ

l'octògon regular interior.

Siga S el punt mig del costat \overline{AB} .

Siga $c = \overline{AB}$ costat de l'octògon exterior.

Per ser ABCDEFGH un octògon regular:

$$\angle CAE = 90^\circ, \angle ABG = \angle BAC = \frac{45^\circ}{2}.$$

Els triangles isòceles $\triangle ABI$, $\triangle AHQ$ són iguals ja que tenen un costat igual i els angles adjacents al costats iguals, per tant:

$$\overline{AI} = \overline{AQ}.$$

Aleshores, $\triangle ALG$ és un triangle rectangle isòceles.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ASI$:

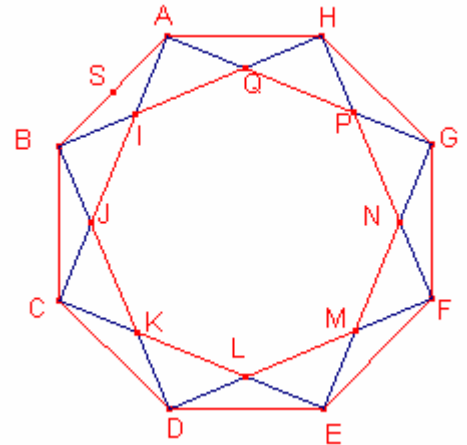
$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AI}} = \cos \frac{45^\circ}{2}, \overline{AS} = \frac{c}{2}. \text{ Aleshores, } \overline{AI} = \frac{1}{2 \cdot \cos \frac{45^\circ}{2}} c.$$

$$\overline{QI} = \overline{AI} \sqrt{2}.$$

$$\overline{QI} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \cos \frac{45^\circ}{2}} c.$$

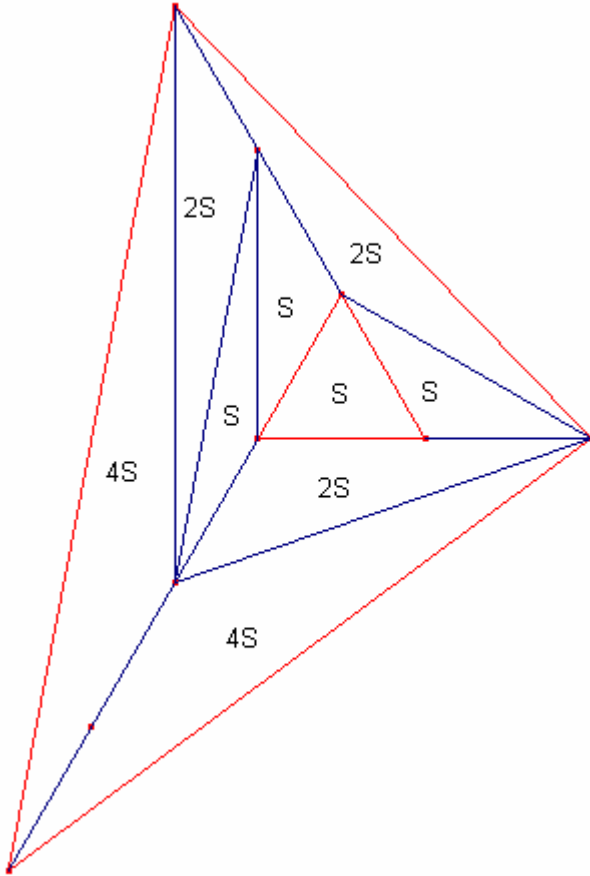
Els dos octògons regulars són semblants, la raó de les àrees és igual a quadrat de la raó dels costats:

$$\frac{S_{IJKLMNPQ}}{S_{ABCDEFGH}} = \left(\frac{\overline{QI}}{\overline{BC}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{45^\circ}{2}} c}{c} \right)^2 = 2 - \sqrt{2}.$$



356.- En les prolongacions d'un triangle equilàter de costat c , en el mateix sentit, s'agafen unes longituds c , $2c$, $3c$. Calculeu la raó entre les àrees del triangle que resulta d'unir les prolongacions i el triangle equilàter.
García Ardura2. problema 764.

Solució:



El triangle format per les prolongacions té 18 vegades l'àrea del triangle equilàter interior.

356.- Determineu la longitud d'un arc capaç de $32^{\circ}54'$ dibuixat sobre un segment de 54m.

García Ardura2. Problema 774.

Solució:

Siga el segment $\overline{AB} = 54$.

Siga O el centre de l'arc capaç.

$$\angle AOB = 2 \cdot 32^{\circ}54' = 65^{\circ}48'$$

Siga M el punt mig del segment \overline{AB} .

$$\overline{AM} = 27, \angle AOM = 32^{\circ}54'$$

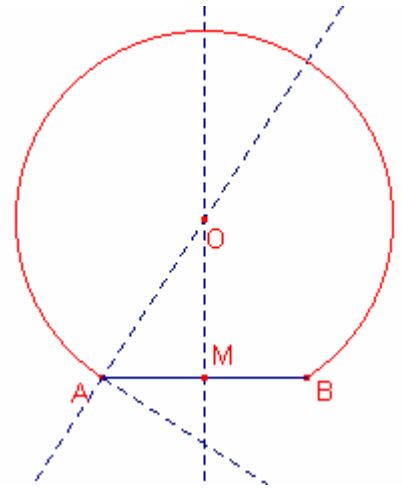
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AMO$:

$$\overline{OA} = \frac{27}{\sin 32^{\circ}54'}$$

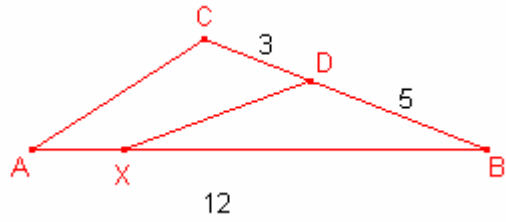
L'arc abraça $360^{\circ} - 65^{\circ}48' = 294^{\circ}12'$.

La mesura de l'arc és:

$$L_{\text{arc}} = \frac{2\pi \frac{27}{\sin 32^{\circ}54'} \cdot 294^{\circ}12'}{360^{\circ}} = 255'24m.$$



357.- En la figura l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és el doble de l'àrea del triangle $\triangle XBD$.
 Si $\overline{AB} = 12$, $\overline{BD} = 5$ i $\overline{CD} = 3$, calculeu la mesura del segment \overline{BX} .
García Ardura. Problema 599.



Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\triangle BDX$.

$$S_{ABC} = 2S$$

Els triangles $\triangle BDX$ i $\triangle CDX$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{CDX}}{S_{BDX}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Aleshores, } S_{CDX} = \frac{3}{5}S.$$

figura l'àrea del triangle $\triangle ABC$ és el doble de l'àrea del triangle $\triangle XBD$, aleshores l'àrea del quadrilàter $ACDX$ és igual a l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Per tant, } S_{AXC} + S_{CDX} = S.$$

$$\text{Aleshores, } S_{AXC} = \frac{2}{5}S.$$

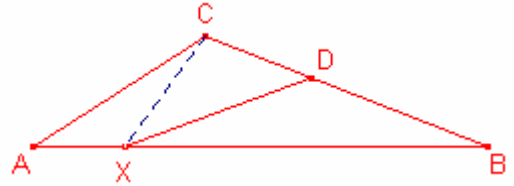
$$S_{XBC} = S_{ABC} + S_{CDX} = \frac{8}{5}S.$$

Els triangles $\triangle XBC$ i $\triangle ABC$ tenen la mateixa altura, aleshores:

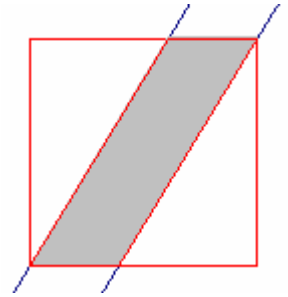
$$\frac{S_{XBC}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{\frac{8}{5}S}{2S} = \frac{\overline{BX}}{12}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\overline{BX} = \frac{48}{5}.$$



358.- Pels vèrtexs oposats d'un quadrat de costats 6cm es tracen dues rectes paral·leles que equidisten 2cm. Determineu l'àrea del paral·lelogram que determinen les rectes i el quadrat.
García Ardura. Problema 692.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 6$

La recta que passa pel vèrtex A talla el costat \overline{CD} en el punt P.

La recta que passa pel vèrtex C talla el costat \overline{AB} en el punt Q.

Volem calcular l'àrea del paral·lelogram APCQ.

Siga $x = \overline{BQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle QBC$:

$$\overline{QC} = \sqrt{6^2 + x^2}.$$

Siga S la projecció de Q sobre el segment \overline{AP} .

$$\overline{SQ} = 2, \quad \overline{AQ} = 6 - x.$$

Els triangles rectangles $\triangle ASQ$, $\triangle QBC$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}} \cdot \frac{2}{6-x} = \frac{6}{\sqrt{36+x^2}}.$$

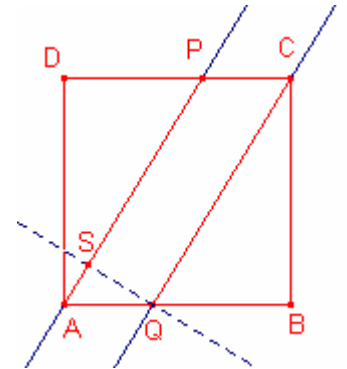
Resolent l'equació:

$$x = \frac{27 - \sqrt{153}}{4}.$$

$$\overline{AQ} = 6 - x = \frac{-3 + \sqrt{153}}{4}.$$

L'àrea del paral·lelogram APCQ és:

$$S_{APCQ} = \overline{AQ} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{-3 + \sqrt{153}}{4} \right) 6 \approx 14,05 \text{ cm}^2.$$



359.- Determineu el mínim de la suma de les àrees de dos quadrats si la suma dels perímetres és 56.

Solució:

Siguen els quadrats ABCD, EFGH, de costats $\overline{AB} = x$, $\overline{EF} = y$.

La funció a optimitzar és la suma de les seues àrees:

$$S(x, y) = x^2 + y^2.$$

La suma dels perímetres dels dos quadrats és 56:

$$4x + 4y = 56.$$

$$y = 14 - x.$$

Aleshores, $S(x) = x^2 + (14 - x)^2$.

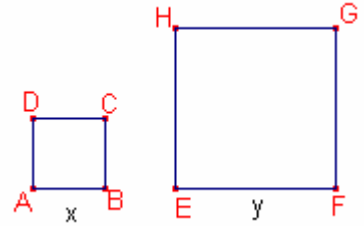
$$S(x) = 2x^2 - 28x + 196.$$

La funció és una paràbola còncaua. El seu mínim s'assoleix en el vèrtex.

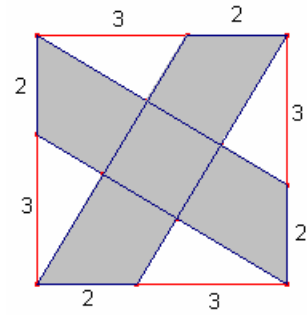
El mínim s'assoleix quan $x = \frac{28}{2 \cdot 2} = 7$.

La suma d'àrees mínima és $S(7) = 98$.

Notem que el mínim s'assoleix quan els dos quadrats són iguals.



360.- En la figura calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

L'àrea del triangle rectangle $\triangle ADP$ és:

$$S_{ADP} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADP$:

$$\overline{AP} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

Els triangles $\triangle ADP$, $\triangle ARQ$ són semblants, aleshores les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:

$$\frac{S_{ARQ}}{S_{ADP}} = \left(\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} \right)^2.$$

$$\frac{S_{ARQ}}{\frac{15}{2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{34}} \right)^2.$$

$$\text{Aleshores, } S_{ARQ} = \frac{15}{2} \cdot \frac{9}{34} = \frac{135}{68}.$$

L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys quatre vegades l'àrea del triangle rectangle $\triangle ARQ$:

$$S = 5^2 - 4 \cdot \frac{135}{68} = \frac{290}{17}.$$

