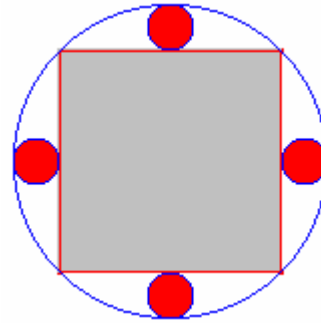


Problemes de Geometria per a l'ESO 37

361.- Determineu la suma de les àrees de les quatre circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r .



Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior de radi r .

Siga M el punt mig de costat \overline{CD} .

Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P

$\overline{OT} = r$.

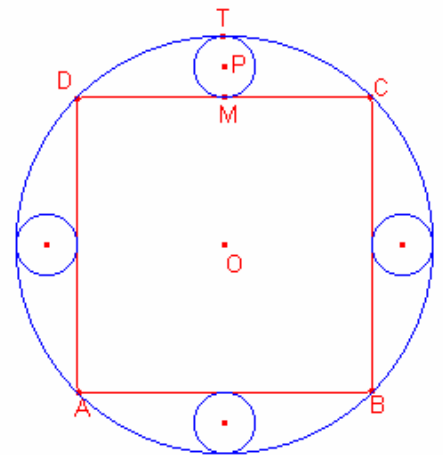
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OMD$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2} r.$$

$$\overline{PM} = \frac{\overline{OT} - \overline{OM}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} r.$$

La suma de les àrees de les quatre circumferències menudes és:

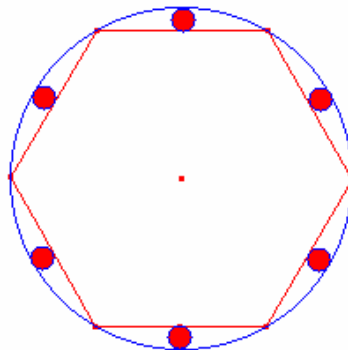
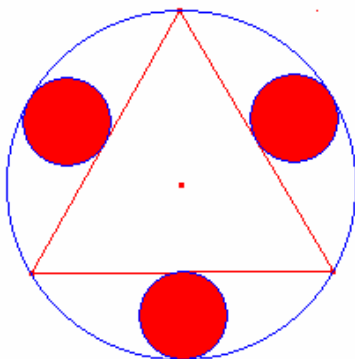
$$S = 4 \left(\pi \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} r \right)^2 \right) = \frac{\pi(3 - 2\sqrt{2})}{2} r^2.$$



Altres problemes:

a) Determineu la suma de les àrees de les tres circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r .

b) Determineu la suma de les àrees de les sis circumferències menudes de la figura si la circumferència exterior té radi r .

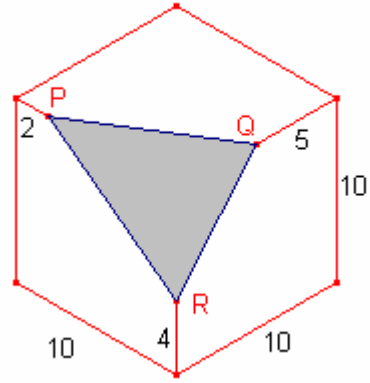


Solució:

$$\text{a) } S = 3 \left(\pi \left(\frac{r}{4} \right)^2 \right) = \frac{3\pi}{16} r^2, \quad \text{b) } S = 6 \left(\pi \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} r \right)^2 \right).$$

362.- En la figura, un cub d'aresta 10, té un plànol que talla les arestes en els punts P, Q, R.

Calculeu l'àrea de triangle $\triangle PQR$.



Solució:

P pertany a l'aresta \overline{OE} , $\overline{OP} = 8$.

Q pertany a l'aresta \overline{AD} , $\overline{OQ} = 5$.

R pertany a l'aresta \overline{OB} , $\overline{OR} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ORQ$:

$$\overline{RQ} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPR$:

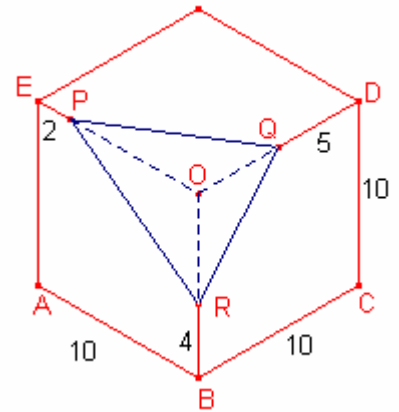
$$\overline{PR} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPQ$:

$$\overline{PQ} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}.$$

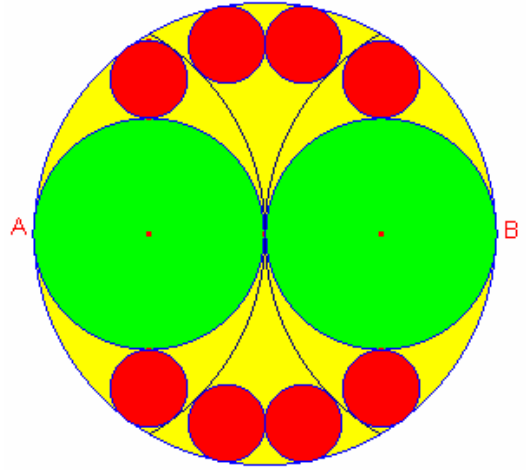
Aplicant la fórmula d'Heró per a calcular l'àrea del triangle $\triangle PQR$:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{(10 + \sqrt{61} + \sqrt{89})(-10 + \sqrt{61} + \sqrt{89})(10 - \sqrt{61} + \sqrt{89})(10 + \sqrt{61} - \sqrt{89})}}{4} = \sqrt{1201}.$$



363.- En una circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$ i dos arcs de radi r i centres A i B . S'han inscrit 10 circumferències tangents. Calculeu el radi de les vuit circumferències menudes.

Sangaku 1865.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

El radi de les circumferències mitjanes és $\overline{DA} = \frac{r}{2}$

Siga la circumferència de centre E i radi $s = \overline{EF}$.

$\overline{AE} = r - s$, $\overline{DE} = \frac{r}{2} + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle ADE$:

$$(r - s)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + s\right)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$s = \frac{r}{6}.$$

Siga la circumferència de centre M i radi $t = \overline{ML}$.

Siga K la projecció de M sobre \overline{AO} .

$\overline{OK} = t$.

$\overline{AM} = r + t$, $\overline{OM} = r - t$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KOM$:

$$\overline{KM}^2 = (r - t)^2 - t^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KAM$:

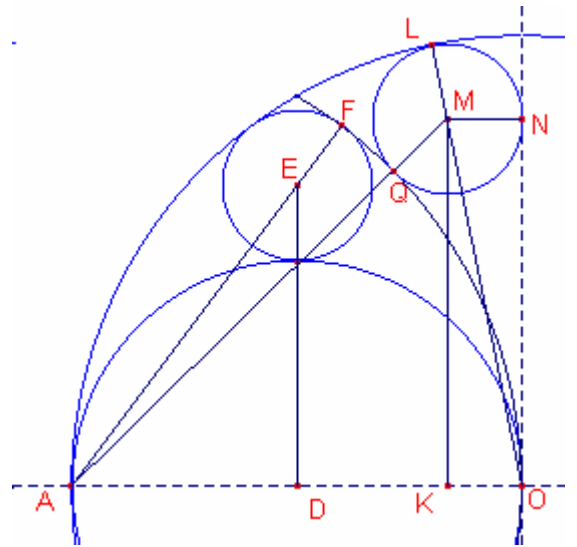
$$\overline{KM}^2 = (r + t)^2 - (r - t)^2.$$

Igualant ambdues expressions:

$$(r - t)^2 - t^2 = (r + t)^2 - (r - t)^2.$$

$$t = \frac{r}{6}.$$

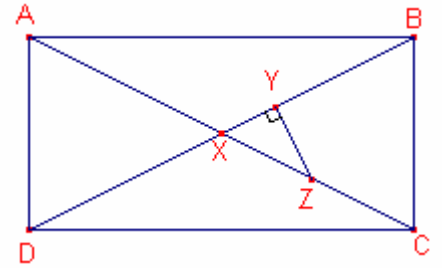
Notem que les 8 circumferències menudes tenen el mateix radi.



364.- Siga X la intersecció de les diagonals del rectangle ABCD.

Siga Z un punt de \overline{XC} , i siga Y la projecció de Z sobre \overline{XB} .

Si $\overline{XY} = 3$ i $\overline{YZ} = 4$, calculeu $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.



Solució 1:

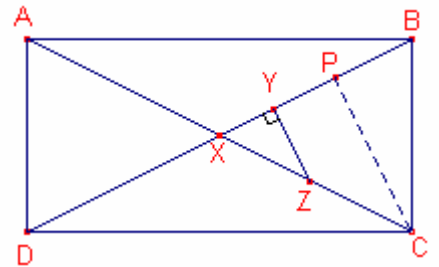
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle XYZ$:
 $\overline{XZ} = 5$.

Siga P la projecció de C sobre \overline{XB} .

Els triangles $\triangle XYZ$, són semblants.

Siga $\overline{XP} = 3x$, $\overline{CP} = 4x$, $\overline{CX} = 5x$.

$\overline{PB} = 2x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CPB$:

$$\overline{BC} = \sqrt{(4x)^2 + (2x)^2} = 2x\sqrt{5}.$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{XC} = 10x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\overline{BC} = \sqrt{(10x)^2 - (2x\sqrt{5})^2} = 4x\sqrt{5}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4x\sqrt{5}}{2x\sqrt{5}} = 2.$$

Solució 2:

Siga $\alpha = \angle BXC$. Siga M el punt mig del costat \overline{BC} .

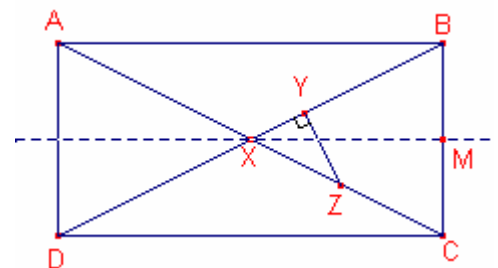
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle XYZ$:
 $\overline{XZ} = 5$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle XYZ$:

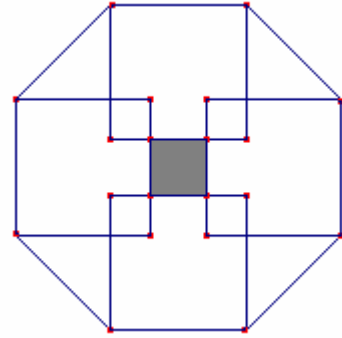
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

$$\angle BXM = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{XM}}{\overline{BM}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}}} = 2.$$



365.- Sobre quatre costats d'un octògon regular de costat 1 de la figura s'han dibuixat quatre quadrats interiors a l'octògon. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Siga ABCDEFGH l'octògon de costat 1.

La zona ombrejada és un quadrat PQRS.

Siga X la intersecció de les diagonals \overline{AF} , \overline{CH}

Siga $x = \overline{AX} = \overline{HX}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AXH$:

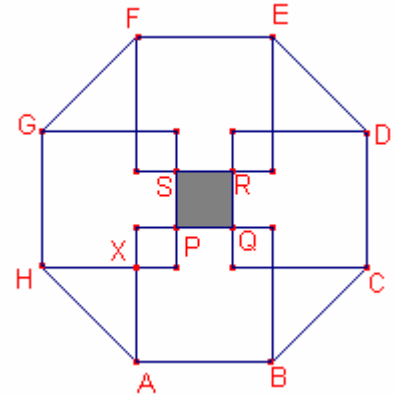
$$x^2 + x^2 = 1^2.$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AF} = 2 \cdot \overline{AX} + \overline{AB} = 1 + \sqrt{2}.$$

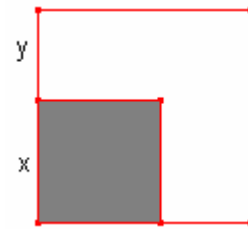
$$\overline{PS} = \overline{AF} - 2 \cdot \overline{AB} = \sqrt{2} - 1.$$

$$S_{PQRS} = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$



366.- En la figura hi ha dos quadrats l'àrea del quadrat menut és la tercera part de l'àrea del quadrat gran.

Calculeu $\frac{x}{y}$.



Solució:

Dos quadrats són semblants la raó de les àrees és igual al quadrat de la raó dels costats:

$$\left(\frac{x+y}{x}\right)^2 = 3.$$

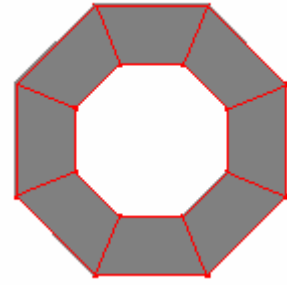
$$\frac{x+y}{x} = \sqrt{3}.$$

$$1 + \frac{y}{x} = \sqrt{3}.$$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{3} - 1.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

367.- La figura octogonal s'ha construït adherint 8 trapezis isòsceles iguals de manera que tots els costats menors del trapezi mesuren 1.
Calculeu el costat de l'octògon regular exterior.



Solució:

Siga $x = \overline{AB}$ costat de l'octògon regular exterior.

Considerem el trapezi isòsceles ABPQ tal que

$$\overline{AQ} = \overline{PQ} = \overline{BP} = 1.$$

L'angle interior d'un octògon regular mesura $\angle ABC = 135^\circ$.

$$\angle ABP = \frac{135^\circ}{2}.$$

Siga M la projecció de Q sobre el costat \overline{AB}

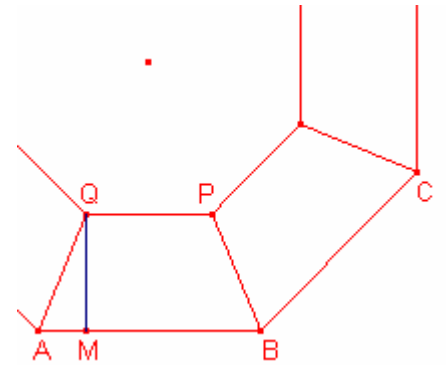
$$\overline{AM} = \frac{x-1}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AMQ$:

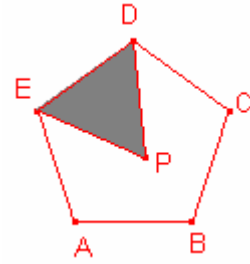
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}} = \cos \frac{135^\circ}{2}.$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \text{ resolent l'equació:}$$

$$x = 1 + \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$



368.- Siga P un punt interior del pentàgon regular ABCDE tal que el triangle $\triangle DEP$ és equilàter. Determineu la mesura de l'angle $\angle APB$.



Solució:

L'angle interior d'un pentàgon regular mesura $\angle AED = 108^\circ$.

$$\angle AEP = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ.$$

$$\overline{AE} = \overline{EP}.$$

$$\text{Aleshores, } \angle APE = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ.$$

$$\angle CP = 48^\circ.$$

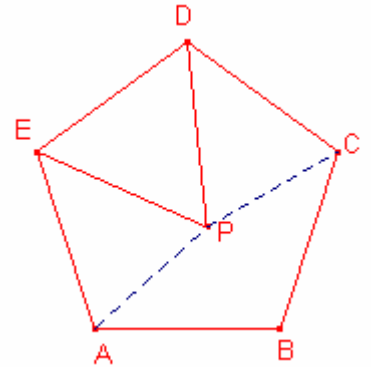
$$\overline{AE} = \overline{DP}.$$

Els triangles isòsceles $\triangle APE$, $\triangle PCE$ són iguals, aleshores,

$$\overline{AP} = \overline{CP},$$

$$\angle APC = 360^\circ - (\angle DPE + 2 \cdot \angle APE) = 360^\circ - (60^\circ + 2 \cdot 66^\circ) = 168^\circ.$$

$$\text{Com que } \overline{AP} = \overline{CP}, \overline{AB} = \overline{BC}, \text{ aleshores, } \angle APB = \frac{1}{2} \angle APC = 84^\circ.$$



369.- Donada una piràmide de base quadrada i que totes les seues arestes mesuren 2, determineu el radi de la màxima esfera interior a la piràmide.

Solució:

Siga ABCDE la piràmide de base quadrat ABCD.

Les cares laterals de la piràmide són triangles equilàters de costat 2.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Siga M el punt mig de l'aresta \overline{AD} .

Siga N el punt mig de l'aresta \overline{BC} .

L'esfera de radi màxim la seua circumferència màxima ha de ser

inscrita en el triangle $\triangle MNE$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ENC$:

$$\overline{NE} = \overline{ME} = \sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EON$:

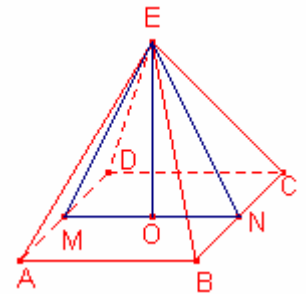
$$\overline{OE} = \sqrt{2}.$$

Siga r el radi de la circumferència inscrita del triangle $\triangle MNE$.

L'àrea del triangle $\triangle MNE$ $S_{MNE} = \frac{\overline{MN} + 2\overline{ME}}{2} r = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{OE}}{2}$:

$$\frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} r = \frac{2\sqrt{2}}{2}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$



370.- Les interseccions de les rectes que trisecten els angles A i B (distintes de A i B) d'un paral·lelogram ABCD formen un quadrilàter inscritible.

Solució:

Siga el quadrilàter PQRS format per les interseccions de les quatre rectes.

Calculem els angles $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.

Siga $A = 3\alpha$.

$$B = 180^\circ - A = 180^\circ - 3\alpha.$$

$$\angle PAB = \frac{3\alpha}{3} = \alpha, \quad \angle ABP = \frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 60^\circ - \alpha.$$

$$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle ABP) = 60^\circ.$$

$$\angle RAB = 2 \frac{3\alpha}{3} = 2\alpha, \quad \angle ABR = 2 \frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 120^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle ARB = 180^\circ - (\angle RAB + \angle ABR) = 120^\circ.$$

Aleshores, $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.

Aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter PQRS és inscritible en una circumferència.

