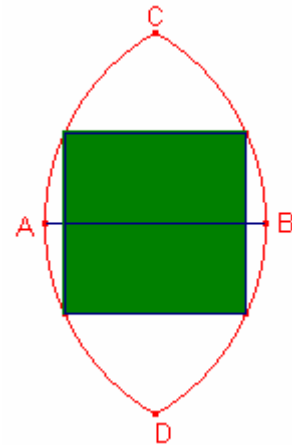


Problemes de Geometria per a l'ESO 38

371.- En la figura els arcs \widehat{CAD} , \widehat{CBD} tenen centre B, A, respectivament.
Si $\overline{AB} = r$ calculeu el costat del quadrat inscrit en els arcs.



Solució:

Siga el quadrat PQRS de costat $c = \overline{PQ}$.

El segment \overline{AB} talla el quadrat en els punts M, N.

Siga $x = \overline{AM} = \overline{BN}$.

$\overline{AB} = 2\overline{AM} + \overline{PQ}$.

$$r = 2x + c \quad (1)$$

$$\overline{AR} = r, \overline{RN} = \frac{c}{2}$$

$$\overline{AN} = x + c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ANR$

$$r^2 = (x + c)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Considerem els sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 2x + c = r \\ (x + c)^2 + \frac{c^2}{4} = r^2 \end{cases} \text{ Resolent el sistema en les incògnites } x, c:$$

$$\begin{cases} x = \frac{r}{4}(3 - \sqrt{7}) \\ c = \frac{r}{2}(\sqrt{7} - 1) \end{cases}$$

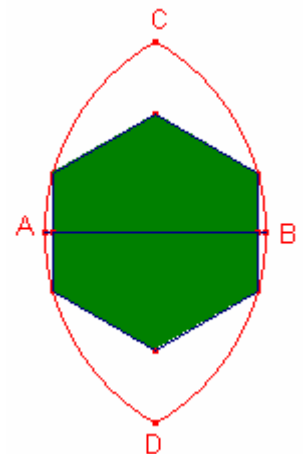
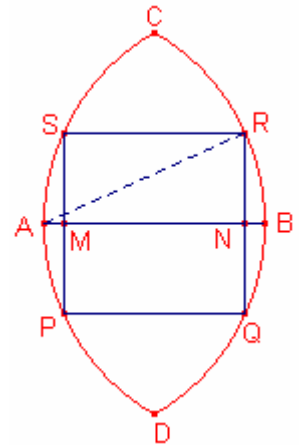
Altre problema:

En la figura els arcs \widehat{CAD} , \widehat{CBD} tenen centre B, A, respectivament.

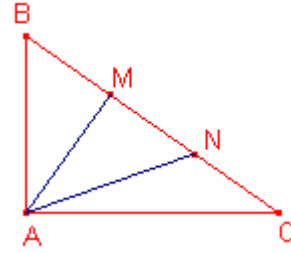
Si $\overline{AB} = r$ calculeu el costat de l'hexàgon regular inscrit en els arcs (veure figura).

Solució:

El costat de l'hexàgon és $c = \frac{r}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$.



372.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.
 Siguen M, N punt del segment \overline{BC} tal que $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{CN}$.
 Si $x = \overline{AM}$ i $y = \overline{AN}$ determineu \overline{MN} .



Solució:

Siga $z = \overline{MN}$, aleshores, $\overline{BC} = 3z$.

Siga $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ABC$.

$$\cos C = \frac{b}{3z}, \quad \cos B = \frac{c}{3z}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ANC$:

$$y^2 = z^2 + b^2 - 2bz \frac{b}{3z}. \text{ Simplificant:}$$

$$y^2 = z^2 + \frac{1}{3}b^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AMB$:

$$x^2 = z^2 + c^2 - 2cz \frac{c}{3z}. \text{ Simplificant:}$$

$$x^2 = z^2 + \frac{1}{3}c^2 \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$x^2 + y^2 = 2z^2 + \frac{1}{3}(b^2 + c^2) \quad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$b^2 + c^2 = (3z)^2 \quad (4)$$

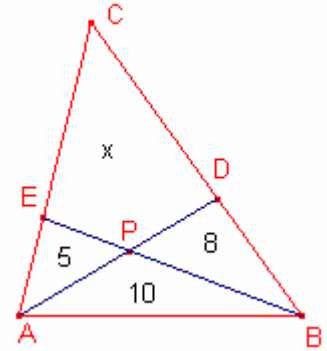
Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):

$$x^2 + y^2 = 2z^2 + \frac{1}{3}(9z^2).$$

$x^2 + y^2 = 5z^2$. Resolent l'equació en z:

$$z = \overline{MN} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{5}}.$$

373.- En la figura les àrees dels triangles $\triangle APE$, $\triangle ABP$, $\triangle BPD$ són, respectivament, 5, 10 i 8. Determineu l'àrea del quadrilàter DCEP.



Solució:

Siga x l'àrea del quadrilàter DCEP.

Siga y l'àrea del triangle $\triangle EPC$, i z l'àrea del triangle $\triangle CPD$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura de les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\triangle APB$, $\triangle DPB$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{10}{8}.$$

Els triangles $\triangle APB$, $\triangle APE$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{EP}} = \frac{10}{5}.$$

Els triangles $\triangle APC$, $\triangle DPC$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{y+5}{z} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} = \frac{10}{8} \quad (1)$$

$$8y - 10z = -40.$$

Els triangles $\triangle BPC$, $\triangle EPC$, tenen la mateixa altura:

$$\frac{z+8}{y} = \frac{\overline{BP}}{\overline{EP}} = \frac{10}{5}.$$

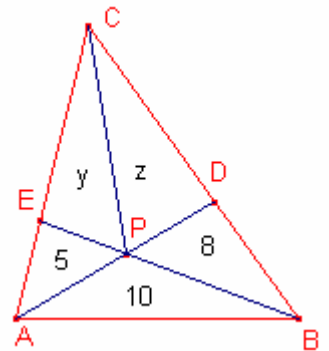
$$-10y + 5z = -40 \quad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 4y - 5z = -20 \\ -2y + z = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 10 \\ z = 12 \end{cases}$$

$$x = y + z.$$

Aleshores l'àrea del quadrilàter DCEP és $x = 22$.



374.- Les interseccions de les rectes que trisecten els angles A i B (distintes de A i B) d'un paral·lelogram ABCD formen un quadrilàter inscritible.

Solució:

Siga el quadrilàter PQRS format per les interseccions de les quatre rectes.

Calculem els angles $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.

Siga $A = 3\alpha$.

$$B = 180^\circ - A = 180^\circ - 3\alpha.$$

$$\angle PAB = \frac{3\alpha}{3} = \alpha, \quad \angle ABP = \frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 60^\circ - \alpha.$$

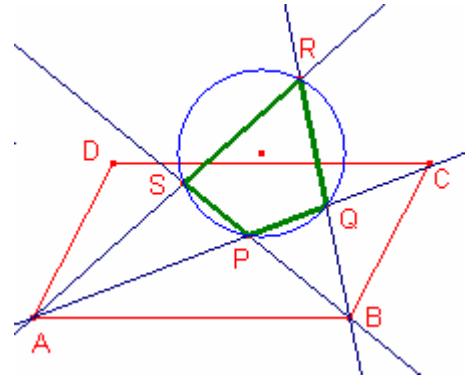
$$\angle APB = 180^\circ - (\angle PAB + \angle ABP) = 60^\circ.$$

$$\angle RAB = 2 \frac{3\alpha}{3} = 2\alpha, \quad \angle ABR = 2 \frac{180^\circ - 3\alpha}{3} = 120^\circ - 2\alpha.$$

$$\angle ARB = 180^\circ - (\angle RAB + \angle ABR) = 120^\circ.$$

Aleshores, $\angle APB = \angle SPQ$ i $\angle ARB = \angle SRQ$ són suplementaris.

Aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter PQRS és inscritible en una circumferència.

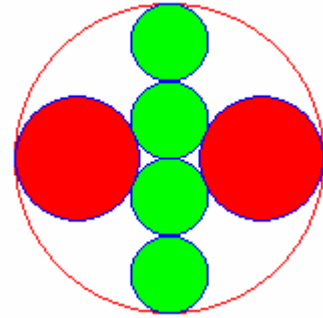


375.- En la figura les quatre circumferències menudes tenen el mateix radi, són tangents i els centres estan sobre el diàmetre de la circumferència gran.

Les circumferències mitjanes són tangents a la circumferència gran i a les dues circumferències menudes centrals.

Si el radi de la circumferència gran és R calculeu el radi de les circumferències mitjanes.

Sangaku



Solució:

Siga O el centre de la circumferència gran, de diàmetre $\overline{AB} = 2R$.
Siga Q en centre d'una de les circumferències menudes centrals.

$$\overline{OQ} = \frac{R}{4}.$$

Siga P el centre d'una de les dues circumferències menudes.

Siga $s = \overline{AP}$ el seu radi.

$$\overline{PQ} = s + \frac{R}{4}, \quad \overline{OP} = R - s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle POQ$:

$$\left(s + \frac{R}{4}\right)^2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 + (R - s)^2. \text{ Simplificant:}$$

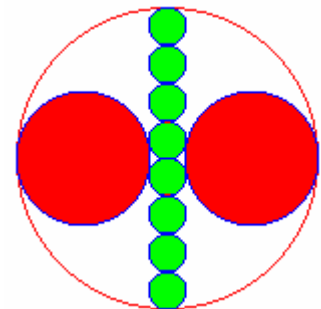
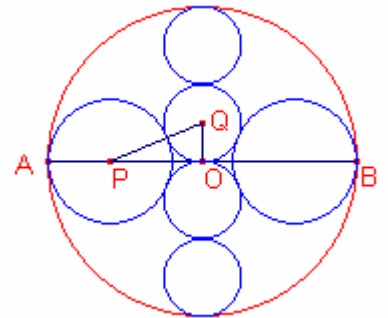
$$\frac{1}{2}Rs = R^2 + 2Rs. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } s:$$

$$s = \frac{2}{5}R.$$

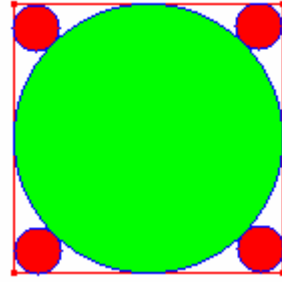
Generalització:

Si en lloc de quatre circumferències menudes hi ha $2n$ circumferències el radi de les circumferències mitjanes és:

$$s = \frac{n}{2n+1}R$$



376.- En un quadrat de costat c s'ha inscrit una circumferència.
 Calculeu el radi de les quatre circumferències tangents
 exteriors a la circumferència inscrita al quadrat i tangents
 als costats del quadrat.



Solució

Siga O el centre de la circumferència inscrita al quadrat.

Siga $\overline{AB} = c$ diàmetre de la circumferència.

Siga Q en centre d'una de les quatre circumferències.

Siga $\overline{TQ} = s$ el seu radi.

Siga P la projecció de Q sobre el diàmetre \overline{AB} .

$$\overline{OQ} = \frac{c}{2} + s. \quad \overline{OP} = \frac{c}{2} - s.$$

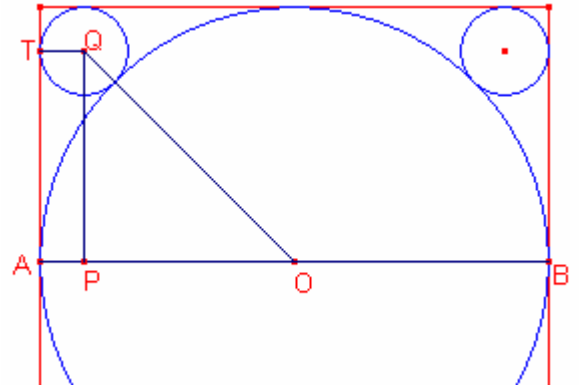
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle isòsceles $\triangle OPQ$:

$$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = 2\left(\frac{c}{2} - s\right)^2. \text{ Simplificant:}$$

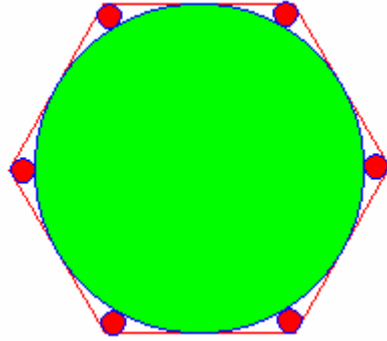
$4s^2 - 12cs + c^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita s :

$$s = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} c.$$



377.- En un hexàgon regular de costat c s'ha inscrit una circumferència.

Calculeu el radi de les sis circumferències tangents exteriors a la circumferència inscrita a l'hexàgon i tangents als costats de l'hexàgon.



Solució:

Siga $\overline{CD} = c$ costat de l'hexàgon regular de centre O .

$\overline{OC} = \overline{OD} = c$.

Siga P el centre d'una de les sis circumferències menudes.

Siga $\overline{PT} = s$ el radi.

Siga M el punt mig del costat \overline{CD} .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle $\triangle OMC$:

$$\overline{OM} = \overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{CT} = \overline{OC} - \overline{OT} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c.$$

$$\angle CAT = 30^\circ.$$

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CT} = (2 - \sqrt{3})c,$$

$$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AC} = \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}\right)c.$$

$$\overline{AB} = (2\sqrt{3} - 3)c.$$

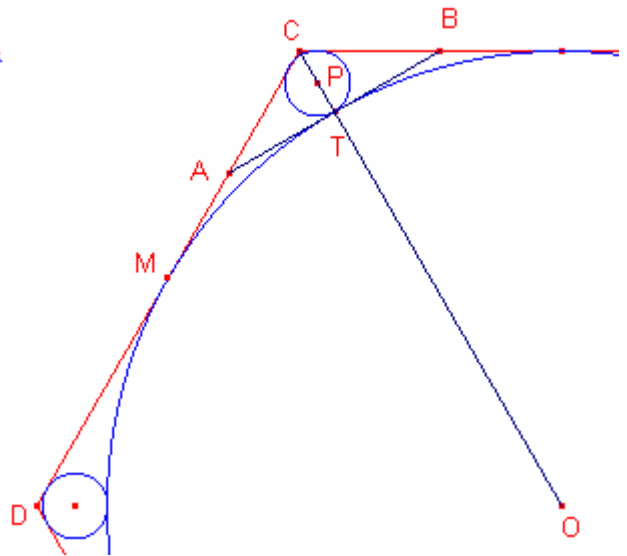
Calculant l'àrea del triangle $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CT}}{2} = \left(\frac{\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AT}}{2}\right) \overline{PT}.$$

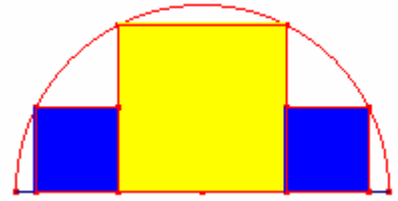
$$\frac{(2\sqrt{3} - 3)c \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)c}{2} = \frac{(2\sqrt{3} - 3)c + 2(2 - \sqrt{3})c}{2} s.$$

Resolent l'equació en la incògnita s :

$$s = \frac{7\sqrt{3} - 12}{2}c.$$



378.- En un semicercle de radi R s'han inscrit 3 quadrats (veure figura).
Determineu la mesura dels costats dels quadrats.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$.

Siga $KLMN$ el quadrat gran de costat $x = KL$.

Siga $H I J K$ un dels quadrats menuts de costat $y = JK$.

$$\overline{OK} = \frac{x}{2}, \overline{ON} = R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OKN$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } x:$$

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}R.$$

$$\overline{OJ} = \overline{OK} + \overline{JK} = \frac{x}{2} + y, \overline{OI} = R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OJI$:

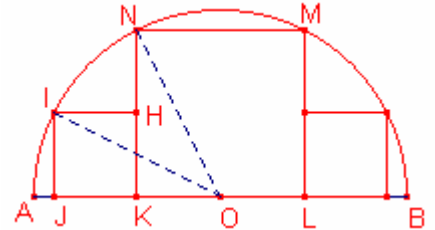
$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + y^2 = R^2.$$

$$\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + y^2 = R^2. \text{ Simplificant:}$$

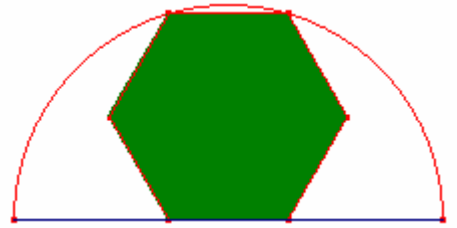
$$5y^2 + \sqrt{5}Ry - 2R^2 = 0. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } y:$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}R.$$

Notem que el costat del quadrat menut és la meitat del costat del quadrat gran.



379.- En un semicercle de radi r s'ha inscrit un hexàgon regular (veure figura).
 Calculeu la mesura del costat de l'hexàgon regular.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

Siga PQRSTU L'hexàgon regular de costat $x = PQ$.

$\overline{QT} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PQT$:

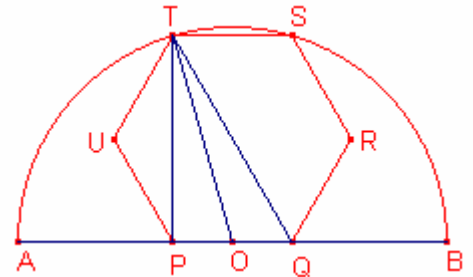
$\overline{PT} = x\sqrt{3}$.

$\overline{OP} = \frac{x}{2}$, $\overline{OT} = r$.

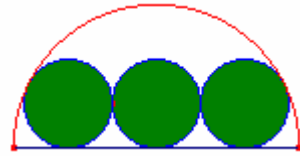
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPT$:

$r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x\sqrt{3})^2$. Resolent l'equació en la incògnita x :

$x = \frac{2\sqrt{13}}{13}R$.



380.- En un semicercle de radi r s'han inscrit 3 circumferències iguals, tangents al diàmetre i les dues més externes tangents al semicercle (veure figura).
 Determineu la mesura dels radis de les 3 circumferències.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

Siga P el centre de la circumferència i $\overline{PQ} = \overline{PT} = s$ el seu radi.

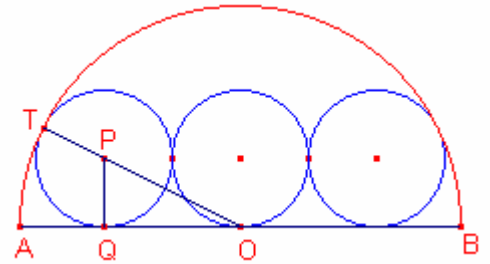
$\overline{OQ} = 2s$, $\overline{OP} = r - s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle OPQ$:

$(r - s)^2 = s^2 + (2s)^2$. Resolent l'equació en la incògnita s :

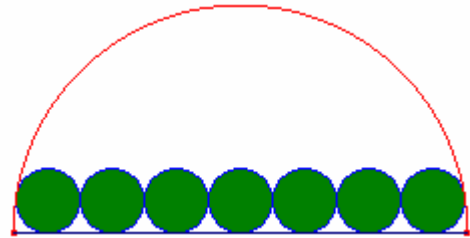
$$s = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} r = \frac{1}{2\Phi} r.$$



Generalització:

En un semicercle de radi r s'han inscrit $2n+1$ circumferències iguals, tangents al diàmetre i les dues més externes tangents al semicercle (veure figura).

Determineu la mesura dels radis de les $2n+1$ circumferències.



Solució:

El radi és: $s = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2}}{4n^2} r.$