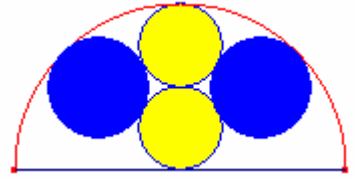


Problemes de Geometria per a l'ESO 39

381.- En un semicercle de radi R s'han inscrit 4 circumferències com els de la figura, dues tenen el centre en el radi perpendicular al diàmetre i les altres són tangents a les dues circumferències anteriors i al semicercle. Calculeu el radi de les quatre circumferències.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = R$.
Siguen P i Q el centres de les circumferències que el centre estan en el radi \overline{OC} perpendicular al diàmetre \overline{AB} .

Siga N el punt de tangència de les dues circumferències.

El radi d'aquestes dues circumferències és:

$$\overline{PO} = \frac{1}{4}R.$$

Siga M el centre d'una de les circumferències tangents a les dues anteriors.

Siga $r = \overline{MT}$ el seu radi.

\overline{MN} és perpendicular a \overline{OC} .

$$\overline{QN} = \frac{R}{4}, \quad \overline{ON} = \frac{R}{2}. \quad \overline{QM} = \frac{R}{4} + r, \quad \overline{OM} = R - r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MNQ$:

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MNO$:

$$\overline{MN}^2 = (R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$\left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 = (R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2. \text{ Simplificant:}$$

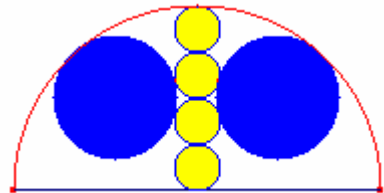
$$\frac{5}{2}Rr = \frac{3}{4}R^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } r:$$

$$r = \frac{3}{10}R.$$

Altres problema:

En un semicercle de radi R s'han inscrit 6 circumferències com els de la figura, dues tenen el centre en el radi perpendicular al diàmetre i les altres són tangents a les circumferències i al semicercle.

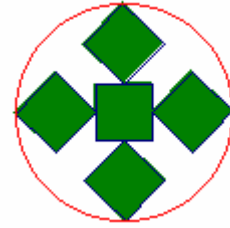
Calculeu el radi de les sis circumferències.



Solució:

El radi de les 4 menudes és $s = \frac{1}{8}R$. El radi de les altres dues és $r = \frac{1}{3}R$.

382.- En la figura els 5 quadrats són iguals i el radi de la circumferència és R.
 Determineu el costat dels quadrats.
Sangaku



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Siga $c = \overline{AC}$ costat del quadrat.

$$\overline{OB} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle ABC$:

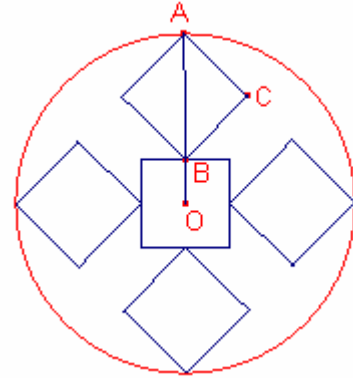
$$\overline{AB} = c\sqrt{2}.$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{AB}.$$

$$R = \frac{c}{2} + c\sqrt{2}.$$

Resolent l'equació en la incògnita c:

$$c = \frac{4\sqrt{2} - 2}{7}.$$



383.- En la figura els 5 quadrats són iguals i el radi de la circumferència és R .
 Determineu el costat dels quadrats.



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Siga $c = \overline{AB} = \overline{CD}$ costats dels quadrats.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\triangle COD$:

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2} c.$$

$$\overline{AM} = \frac{c}{2}, \overline{DM} = c, \overline{OM} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} c.$$

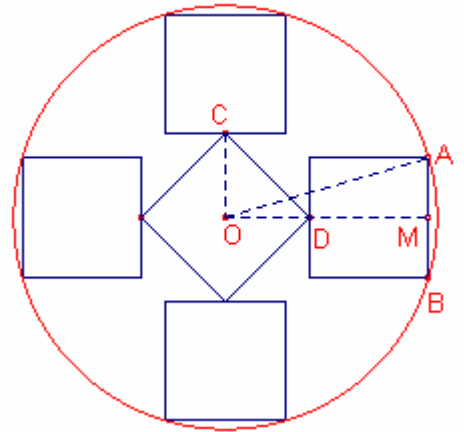
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle OMA$:

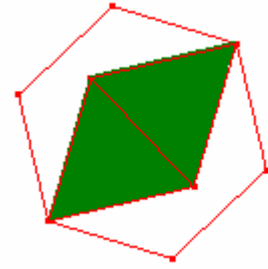
$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} c\right)^2$$

$$R^2 = \frac{7 + 4\sqrt{2}}{4} c^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } c:$$

$$c = 2R \cdot \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{2}}{17}}.$$



384.- En un hexàgon regular de costat c s'han dibuixat dos triangles equilàters iguals (veure figura). Calculeu la Proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon.



Solució 1:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O i costat $\overline{AB} = c$.
 $\overline{AO} = c$.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} de l'hexàgon regular. $\overline{AM} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOM$: $\overline{OM} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és:

$$S_{\text{ABCDEF}} = 6 \frac{c^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} c^2 \sqrt{3}.$$

Siga el triangle equilàter $\triangle APQ$ de costat $x = \overline{AP}$. $\overline{OP} = \frac{x}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AOP$:

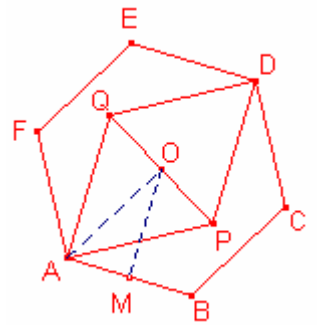
$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + c^2. \quad x^2 = \frac{4}{3} c^2.$$

La suma de les àrees dels dos triangles equilàters

$$S_{\text{APDQ}} = 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} c^2 \sqrt{3}.$$

La proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{\text{APDQ}}}{S_{\text{ABCDEF}}} = \frac{\frac{2}{3} c^2 \sqrt{3}}{\frac{3}{2} c^2 \sqrt{3}} = \frac{4}{9}.$$



Solució 2:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de centre O.

Siga APDQ el rombe format pels dos triangles equilàters.

$\angle FAE = 30^\circ$, aleshores, Q pertany a la diagonal \overline{AE} .

$\angle QED = 90^\circ$.

Els triangles $\triangle QOD$, $\triangle QED$ són iguals.

Els triangles $\triangle APD$, $\triangle BPC$ són semblants i de raó 2:1.

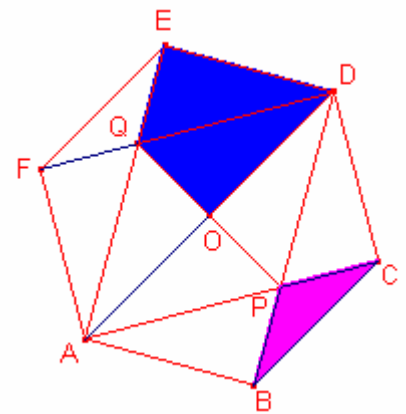
L'àrea del triangle $\triangle APD$ és 4 vegades $\triangle BPC$, aleshores, l'àrea del triangle $\triangle QOD$ és 2 vegades $\triangle BPC$.

L'àrea del rombe APDQ és igual a 4 vegades l'àrea del triangle $\triangle QOD$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és 9 vegades l'àrea del triangle $\triangle QOD$.

La proporció de les àrees de la suma dels dos triangles equilàters i la de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{\text{APDQ}}}{S_{\text{ABCDEF}}} = \frac{4}{9}.$$



385.- Les quatre puntes de l'estel inscrit en el quadrat de costat c mesuren 30° .
 Determineu l'àrea de l'estel.



Solució:

Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} .

Siga P un dels vèrtexs de l'estel.

L'àrea de l'estel és igual a l'àrea del quadrat menys 4 vegades l'àrea

del triangle $\triangle ABP$.

$\angle PBQ = 30^\circ$.

Aleshores, $\angle ABP = 30^\circ$.

Siga $x = \overline{PM}$, $\overline{BP} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BMP$:

$$(2x)^2 = x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

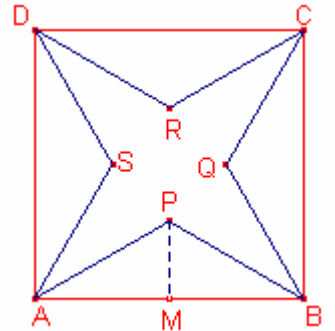
$$\text{Aleshores, } x = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

L'àrea del triangle $\triangle ABP$ és:

$$S_{ABP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PM}}{2} = \frac{c \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}c^2.$$

L'àrea de l'estel és:

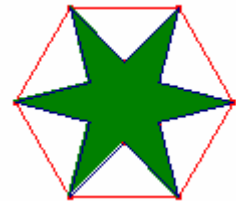
$$S = S_{ABCD} - 4 \cdot S_{ABP} = c^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}c^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}c^2.$$



Altres problemes:

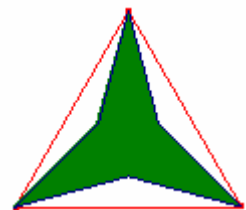
a) Les sis puntes de l'estel inscrit en l'hexàgon regular de costat c mesuren 30° .

Determineu l'àrea de l'estel.



b) Les tres puntes de l'estel inscrit en el triangle equilàter de costat c mesuren 30° .

Determineu l'àrea de l'estel.

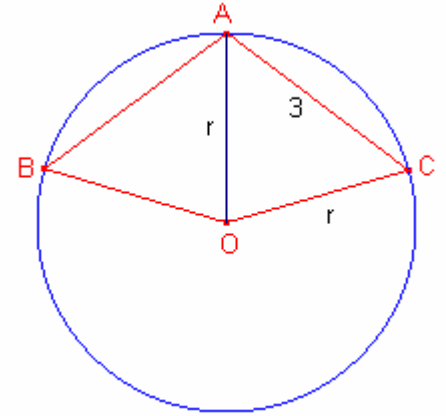
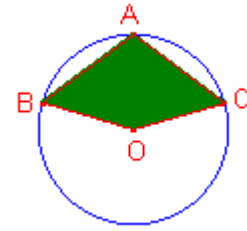


Solució:

a) $S = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2}c^2.$

b) $S = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}c^2.$

386.- En la circumferència de centre O les cordes \overline{AB} , \overline{AC} mesuren 3cm i l'àrea del quadrilàter ABOC és 6cm^2 . Calculeu la mesura del radi.



Solució:

Siga $r = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OA}$ radi de la circumferència.

L'àrea del triangle $\triangle AOC$ és la meitat del quadrilàter ABOC.

$$S_{AOC} = 3 \quad (1)$$

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\triangle AOC$ és:

$$S_{AOC} = \frac{\sqrt{(3+2r)(-3+2r)3^2}}{4} \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

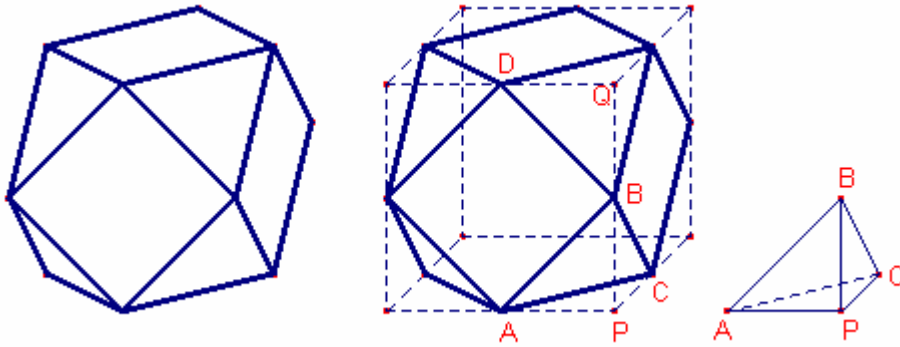
$$3 = \frac{\sqrt{(3+2r)(-3+2r)3^2}}{4} .$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{5}{2} .$$

387.- Sabent que el cuboctaedre es construeix pel truncament del cub per $\frac{1}{2}$ de les arestes.
 Calculeu el volum del cuboctaedre d'aresta a .

Solució:



Siga $a = \overline{AB} = \overline{BD}$ arestes del cuboctaedre.
 L'aresta del cub del qual el cuboctaedre és truncat mesura:
 $\overline{PQ} = \overline{AD} = a\sqrt{2}$.

Al truncat el cub eliminem 8 piràmides iguals a la piràmide de base triangle

$\triangle APC$ (triangle rectangle) i cúspide B.

L'altura d'aquesta piràmide és \overline{PB} .

$$\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{PB} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

El volum del cuboctaedre és igual al volum del cub menys 8 vegades el volum de la piràmide APCB.

El volum del cub és:

$$V_{\text{cub}} = (a\sqrt{2})^3 = 2a^3\sqrt{2}.$$

El volum del tetraedre APCB és:

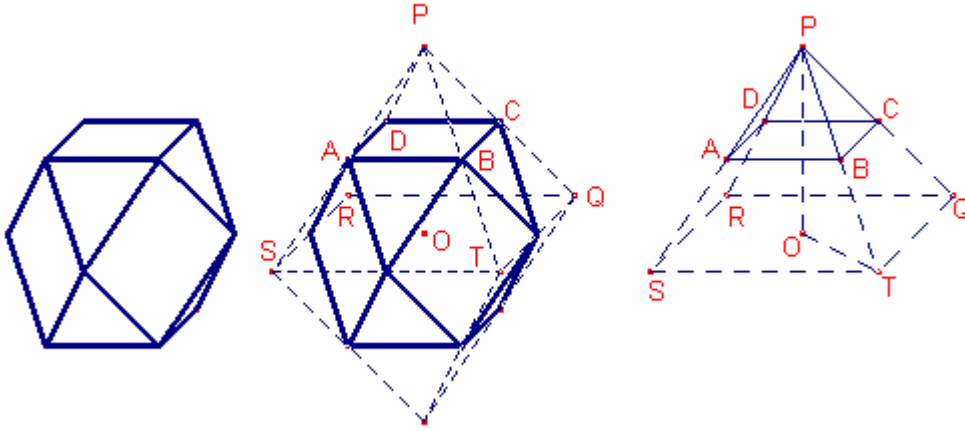
$$V_{\text{APCB}} = \frac{1}{3} \frac{\overline{AP} \cdot \overline{PC}}{2} \overline{PB} = \frac{1}{3} \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

El volum del cuboctaedre:

$$V = V_{\text{cub}} - 8V_{\text{APCB}} = 2a^3\sqrt{2} - 8 \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{5\sqrt{2}}{3} a^3$$

388.- Sabent que el cuboctaedre es construeix pel truncament de l'octaedre per $\frac{1}{2}$ de les arestes.
 Calculeu el volum del cuboctaedre d'aresta a .

Solució:



Siga $a = \overline{AB}$ aresta del cuboctaedre.

L'octaedre del qual es truncat el cuboctaedre té aresta:

$$\overline{PQ} = 2a$$

El octaedre està format per dues piràmides rectes de base un quadrat i costats laterals triangles equilàters.

Siga O el centre de l'octaedre.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OST$:

$$\overline{OT} = a\sqrt{2}.$$

$$\overline{OP} = \overline{OT} = a\sqrt{2}.$$

El volum de la piràmide $PQRST$ és:

$$V_{PQRST} = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}.$$

La piràmide $PCDAB$ és semblant a la piràmide $PQRST$ i la raó de semblança és 1:2.

$$V_{PCDAB} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_{PQRST} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

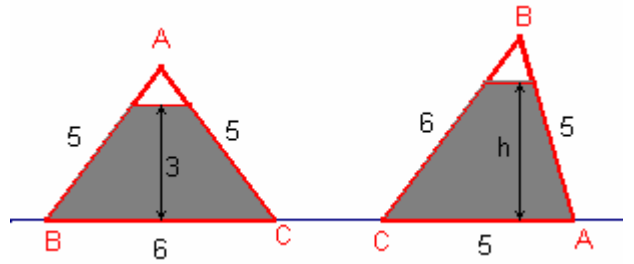
El volum del cuboctaedre és igual al volum de dues piràmides $PQRST$ menys el volum de sis piràmides $PCDAB$.

$$V = 2 \cdot V_{PQRST} - 6 \cdot V_{PCDAB} = 2 \frac{4a^3\sqrt{2}}{3} - 6 \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{3} a^3.$$

389.- Un petjapapers té forma triangular de costats $\overline{BC} = 6\text{cm}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\text{cm}$ està parcialment ple d'aigua.

Quan el petjapapers reposa sobre el costat \overline{BC} l'aigua té una altura de 3cm.

Quina és l'altura de l'aigua quan el petjapapers reposa sobre el costat \overline{CA} .



Solució:

La superfície del trapezi de l'esquerra BCDE, i del trapezi de la dreta CAPQ són iguals.

Siga $\overline{FG} = 3$, $\overline{RS} = h$.

Apliquem la fórmula d'Heró per a calcular l'altura

del triangle $\triangle ABC$ sobre el costat \overline{BC} :

$$\overline{AF} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a} = \frac{\sqrt{16 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = 4.$$

Apliquem la fórmula d'Heró per a calcular l'altura del triangle $\triangle ABC$ sobre el costat \overline{AC} :

$$\overline{BR} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2b} = \frac{\sqrt{16 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 5} = \frac{24}{5}.$$

$$\overline{AG} = \overline{AF} - 3 = 1.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AED$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\right)^2. S_{AED} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 12 = \frac{3}{4}.$$

$$S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{AED} = 12 - \frac{3}{4} = \frac{45}{4}.$$

$$\overline{BS} = \overline{BR} - h = \frac{24}{5} - h.$$

Els triangles $\triangle BCA$, $\triangle BQP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{BQP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{BS}}{\overline{BR}}\right)^2. S_{BQP} = \left(\frac{\frac{24}{5} - h}{\frac{24}{5}}\right)^2 \cdot 12 = \left(1 - \frac{5h}{24}\right)^2 \cdot 12.$$

$$S_{CAPQ} = S_{ABC} - S_{BQP} = 12 - \left(1 - \frac{5h}{24}\right)^2 \cdot 12.$$

Com que les àrees dels trapezis BCDE, CAPQ són iguals.

$$12 - \left(1 - \frac{5h}{24}\right)^2 \cdot 12 = \frac{45}{4}. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$h = \frac{18}{5} = 3'6\text{cm}$$

390.- Considerem el rectangle $ABCD$ i la circumferència de centre D i radi \overline{DA} , que talla la prolongació del costat \overline{AD} en el punt P . La recta PC talla la circumferència en el punt Q i la prolongació del costat \overline{AB} en el punt R . Demostreu que $\overline{QB} = \overline{BR}$.

Solució:

Els triangles rectangles $\triangle PDC$, $\triangle CBR$ són iguals, aleshores:

$$\overline{CD} = \overline{BR}.$$

Siga $\alpha = \angle DCP$.

Com que $\overline{DP} = \overline{DQ}$, $\angle CQD = 90^\circ + \alpha$.

$$\angle BCQ = 90^\circ + \alpha.$$

$$\overline{DQ} = \overline{BC}.$$

Aleshores els triangles $\triangle CQD$, $\triangle QCB$ són iguals, aleshores:

$$\overline{CD} = \overline{BQ}.$$

Per tant, $\overline{QB} = \overline{BR}$.

