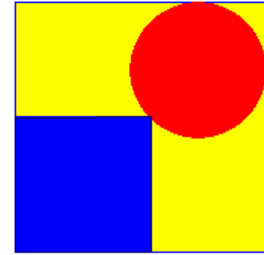


21.- En la següent figura el quadrat gran té costat  $a$  i el costat del quadrat menut i el diàmetre del cercle són iguals. Calculeu el radi del cercle.

Sangaku pàgina 67.



Solució:

Siga  $a = \overline{AB}$  el costat del quadrat ABCD.

Siga  $x = \overline{OF} = \overline{OP} = \overline{OQ}$  el radi del cercle.

Siga AEFG el quadrat menut.

Per hipòtesi  $\overline{AE} = 2x$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AEF$ :

$$\overline{AF} = 2x\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ABC$ :

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OQC$ :

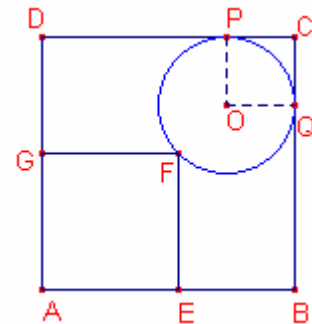
$$\overline{OC} = x\sqrt{2}.$$

Notem que  $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FO} + \overline{OC}$ :

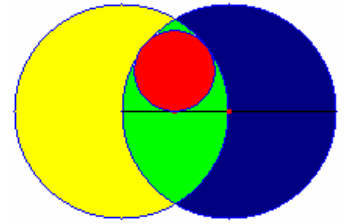
$$a\sqrt{2} = 2x\sqrt{2} + x + x\sqrt{2}.$$

$a\sqrt{2} = (1 + 3\sqrt{2})x$ . Resolent l'equació en la incògnita  $x$ :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} a = \frac{6 - \sqrt{2}}{17} a.$$



22.- Les circumferències grans tenen diàmetre  $d$ , i cadascuna de elles passa pel centre de l'altra. La circumferència menuda és tangent interior a les dues grans i al diàmetre. Calculeu el radi de la circumferència menuda.



Solució:

Siga  $d = \overline{AB}$  el diàmetre de la circumferència gran, siga  $O$  el centre.

Siga  $A$  el centre de l'altra circumferència que passa per  $O$ .

Siga  $P$  el centre de la circumferència menuda i  $T$  el punt de tangència amb el diàmetre  $\overline{AB}$ .

Siga  $r$  el radi de la circumferència menuda  $r = \overline{PT}$ .

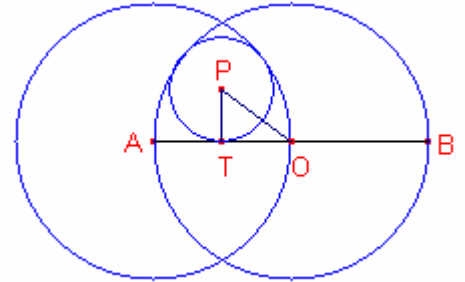
$$\overline{OT} = \frac{d}{4}.$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} - r = \frac{d}{2} - r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OTP$ :

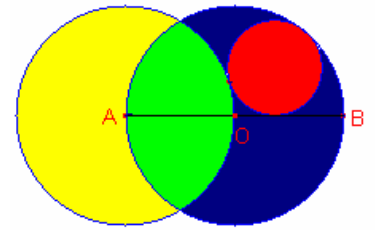
$$\left(\frac{d}{2} - r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } r:$$

$$r = \frac{3}{16}d.$$



23.- Les circumferències grans tenen diàmetre  $d$ , i cadascuna de elles passa pel centre de l'altra. La circumferència menuda és tangent interior a una de les grans i exterior a l'altra i al diàmetre. Calculeu el radi de la circumferència menuda.

Shariguin I126



Solució:

Siga  $d = \overline{AB}$  el diàmetre de la circumferència gran, siga O el centre.

Siga A el centre de l'altra circumferència que passa per O.

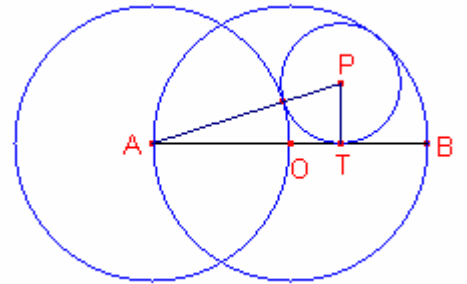
Siga P el centre de la circumferència menuda i T el punt de tangència amb el diàmetre  $\overline{AB}$ .

Siga  $r$  el radi de la circumferència menuda  $r = \overline{PT}$ .

Siga  $\overline{OT} = x$ .  $\overline{AT} = \frac{d}{2} + x$ .

$$\overline{AP} = \frac{d}{2} + r.$$

$$\overline{OP} = \frac{d}{2} - r.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ATP$ :

$$\left(\frac{d}{2} + r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$dr - x^2 - dx = 0 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OTP$ :

$$\left(\frac{d}{2} - r\right)^2 = x^2 + r^2. \text{ Simplificant:}$$

$$d^2 - 4x^2 - 4dx = 0 \quad (2)$$

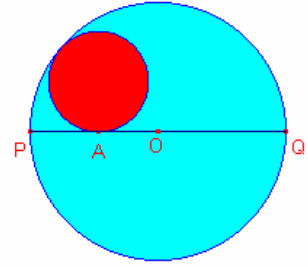
Considerem els sistema format per les expressions (1), (2)

$$\begin{cases} dr - x^2 - dx = 0 \\ d^2 - 4x^2 - 4dx = 0 \end{cases}. \text{ Resolent el sistema:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}-1}{4}d \\ r = \frac{\sqrt{3}}{8}d \end{cases}.$$

Shariguin I126

24.- En una circumferència de radi  $R$  s'ha dibuixat un diàmetre i sobre aquest s'agafa el punt  $A$  a un distància  $a$  del centre.  
 Determineu el radi de la segona circumferència tangent interior a la primera circumferència i tangent al diàmetre en el punt  $A$ .  
 Es pot construir la segona circumferència amb regla i compàs?  
 Shariguin 175.



Solució:

Siga  $\overline{PQ} = 2R$  diàmetre de la circumferència.

Siga  $a = \overline{OA}$ .

Siga  $T$  el centre de la segona circumferència.

Siga  $\overline{TA} = r$ , radi de la segona circumferència.

$\overline{OT} = R - r$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OAT$ :

$$(R - r)^2 = r^2 + a^2.$$

Resolent l'equació en la incògnita  $r$ :

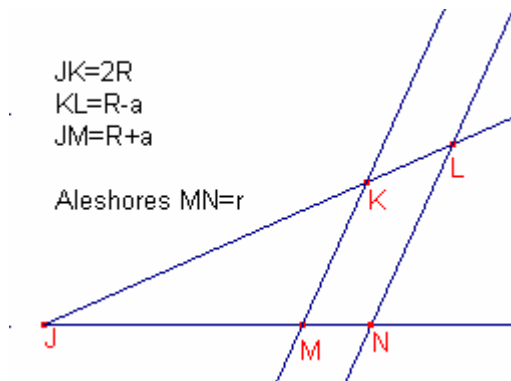
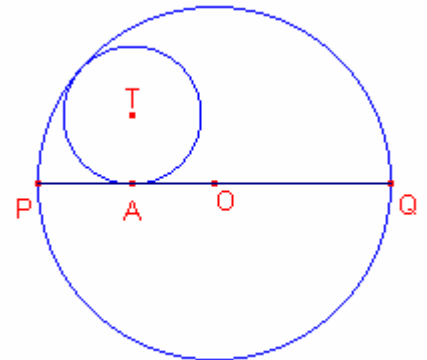
$$r = \frac{R^2 - a^2}{2R}$$

Vegem que el problema és pot construir amb regla i compàs.

$$r = \frac{(R + a)(R - a)}{2R}.$$

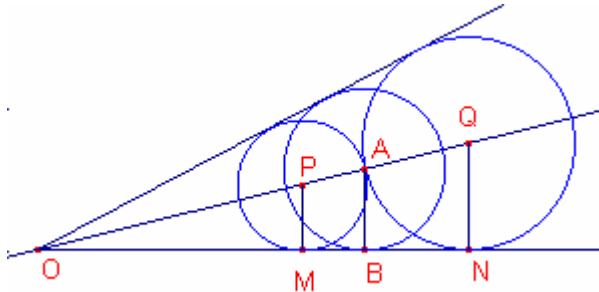
$$\frac{2R}{R + a} = \frac{R - a}{r}.$$

Aleshores  $r$  és quarta proporcional de  $2R, R + a, R - a$ .



25.- Dues circumferències de radis  $R$  i  $r$  són tangents exteriors i tangents als costats d'un angle. Calculeu el radi d'una tercera circumferència tangent als costats de l'angle i que té centre en el punt de tangència de les dues circumferències.  
 Shariguin I140.

Solució:



Siga  $O$  el vèrtex de l'angle.

Els centres de les tres circumferències pertanyen a la bisectriu de l'angle.

Siga la circumferència de centre  $P$  i radi  $r = \overline{PM}$ .

Siga la circumferència de centre  $Q$  i radi  $R = \overline{QN}$ .

Siga  $A$  el punt de tangència de les dues circumferències.

Siga  $\overline{AB} = s$  el radi de la tercera circumferència que cerquem.

Siga  $a = \overline{OP}$ .

Els triangles  $\triangle OMP$ ,  $\triangle OBA$ ,  $\triangle ONQ$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{a} = \frac{s}{a+r} = \frac{R}{a+r+R}.$$

$$\frac{r}{a} = \frac{R}{a+r+R}, \text{ aleshores, } a = \frac{(R+r)r}{R-r} \quad (1)$$

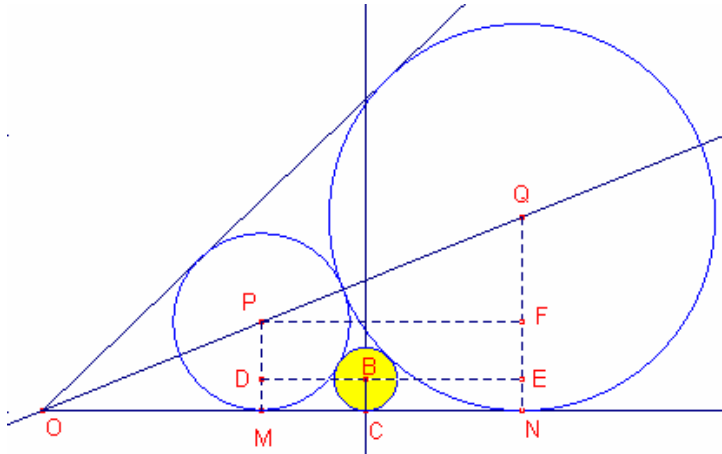
$$\frac{r}{a} = \frac{s}{a+r}, \text{ } s = \frac{(a+r)r}{a} \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$s = \frac{\left( \frac{(R+r)r}{R-r} + r \right) r}{\frac{(R+r)r}{R-r}} = \frac{2Rr}{R+r}.$$

26.- Dues circumferències de radis  $R$  i  $r$  són tangents exteriors i tangents als costats d'un angle. Calculeu el radi d'una tercera circumferència tangent exterior a les dues circumferències i tangent a un costat de l'angle.

Solució:



En la figura siga  $O$  el vèrtex de l'angle. Els centres de les tres circumferències pertanyen a la bisectriu de l'angle.

Siga la circumferència de centre  $P$  i radi  $r = \overline{PM}$ . Siga la circumferència de centre  $Q$  i radi  $R = \overline{QN}$ . Siga  $B$  el centre de la tercera circumferència tangent exterior a les dues anteriors i tangent a costat  $ON$  de l'angle. Siga  $s = \overline{BC}$  el seu radi.

$$\overline{PQ} = R + r.$$

$$\overline{QF} = R - r.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle PFQ$ :

$$\overline{PF} = \overline{MN} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

$$\overline{PB} = r + s.$$

$$\overline{PD} = r - s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle PDB$ :

$$\overline{DB} = \overline{MC} = \sqrt{(r + s)^2 - (r - s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$

$$\overline{QB} = R + s.$$

$$\overline{QE} = R - s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle QEB$ :

$$\overline{EB} = \overline{CN} = \sqrt{(R + s)^2 - (R - s)^2} = 2\sqrt{Rs}.$$

$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN}$ , aleshores:

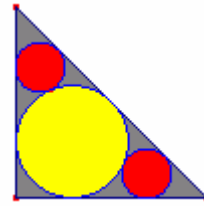
$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{rs} + 2\sqrt{Rs}. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$Rr = rs + Rs + 2\sqrt{Rrs}.$$

$(r + R + 2\sqrt{Rr}) = Rr$ . Aïllant la incògnita  $s$ :

$$s = \frac{Rs}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

27.- En un triangle rectangle i isòsceles s'ha dibuixat la circumferència inscrita i dues circumferències iguals tangents exteriors a la circumferència inscrita i tangent a la hipotenusa i un catet. Calculeu la proporció entre els radis de les circumferències distintes.



Solució:

Siga el triangle rectangle i isòsceles  $\triangle ABC$ ,  $A = 90^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ .

Siga la circumferència inscrita al triangle de centre  $I$  i radi  $r = \overline{IT}$ .

Siga la circumferència tangent a l'anterior de centre  $P$  i radi  $s = \overline{PQ}$ .

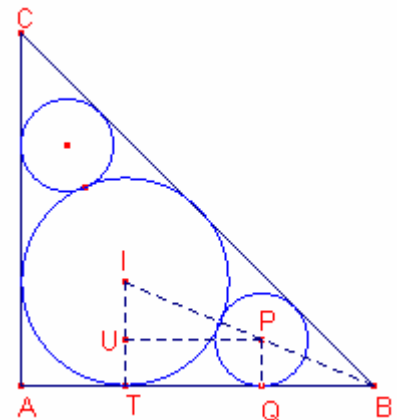
Considerem el triangle rectangle  $IUP$ .

$\overline{IP} = r + s$ ,  $\overline{IU} = r - s$ ,  $\angle IPU = \frac{45^\circ}{2}$ .

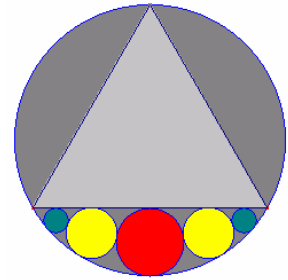
$$\frac{r-s}{r+s} = \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\frac{1-\frac{s}{r}}{1+\frac{s}{r}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } \frac{s}{r}:$$

$$\frac{s}{r} = \frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$



28.- Una circumferència de radi  $R$  té inscrit un triangle equilàter. En l'interior de la circumferència hi ha inscrites cinc circumferències tangents dos a dos i tangents al costat del triangle (veure figura). Calculeu els radis de les cinc circumferències.



Solució:

Siga el triangle equilàter  $\triangle LMN$ .

Siga la circumferència circumscriu al triangle  $\triangle LMN$  de centre  $O$  i radi  $R = \overline{OM}$ .

Siga  $P$  el punt mig del costat  $\overline{LM}$ .

$$\overline{ON} = R, \overline{OP} = \frac{R}{2}.$$

$$\overline{PS} = 2R - \overline{NP} = 2R - \frac{3}{2}R = \frac{R}{2}.$$

Siga la circumferència de centre  $A$  i radi  $r = \overline{AP}$ .

$$r = \overline{AP} = \frac{\overline{PS}}{2} = \frac{R}{4}.$$

Siga la circumferència de centre  $B$  i radi  $s = \overline{BT}$ .

$$\overline{OB} = R - s, \overline{AB} = \frac{1}{4}R + s, \overline{PQ} = \overline{BT} = s, \overline{AQ} = \frac{1}{4}R - s,$$

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}R + s, \overline{OA} = \frac{3}{4}R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle AQB$ :

$$\overline{BQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}R + s\right)^2 - \left(\frac{1}{4}R - s\right)^2} = \sqrt{Rs}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OQB$ :

$$\overline{OQ} = \sqrt{(R - s)^2 - (\sqrt{Rs})^2} = \sqrt{R^2 + s^2 - 3Rs}.$$

$\overline{OA} = \overline{AQ} + \overline{OQ}$ , aleshores:

$$\frac{3}{4}R = \frac{1}{4}R - s + \sqrt{R^2 + s^2 - 3Rs}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } s:$$

$$s = \frac{3}{16}R.$$

Siga la circumferència de centre  $C$  i radi  $t = \overline{CU}$ .

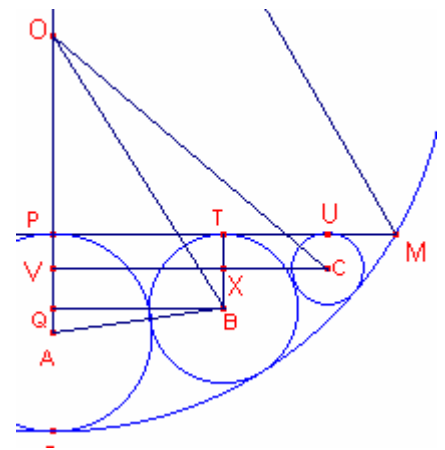
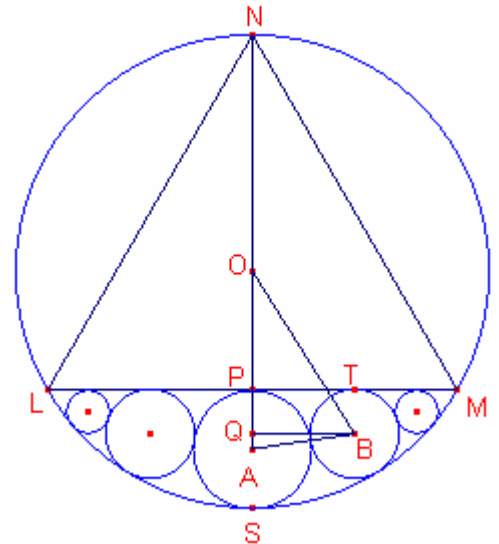
$$\overline{OC} = R - t, \overline{BC} = s + t = \frac{3}{16}R + t, \overline{BX} = s - t = \frac{3}{16}R - t.$$

$$\overline{OV} = \frac{1}{2}R + t, \overline{VX} = \overline{BQ} = \sqrt{Rs} = \frac{\sqrt{3}}{4}R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CXB$ :

$$\overline{CX} = \sqrt{\left(\frac{3}{16}R + t\right)^2 - \left(\frac{3}{16}R - t\right)^2} = \frac{\sqrt{3Rt}}{2}.$$

$$\overline{VC} = \overline{CX} + \overline{VX} = \frac{\sqrt{3Rt}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}R.$$



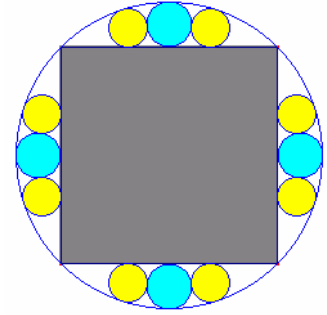
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $OVC$   <sup>$\Delta$</sup> :

$$(R - t)^2 = \left(\frac{1}{2}R + t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}Rt}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\right)^2.$$

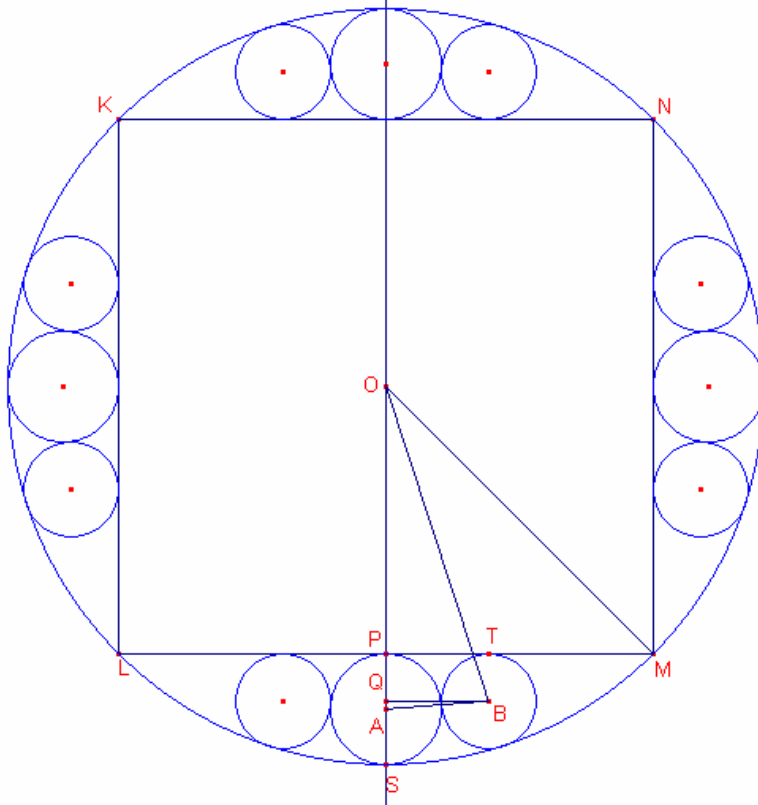
Resolent l'equació en la incògnita t:

$$t = \frac{9}{100}R.$$

29.- Una circumferència de radi  $R$  té inscrit un quadrat. En l'interior de la circumferència hi ha inscrites dotze circumferències tangents dos a dos i tangents als costats del quadrat (veure figura). Calculeu els radis de les cinc circumferències.



Solució:



Siga el quadrat  $KLMN$

Siga la circumferència circumscriu al quadrat de centre  $O$  i radi  $R = \overline{OM}$ .

Siga  $P$  el punt mig del costat  $\overline{LM}$ .

$$\overline{OS} = R, \quad \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

$$\overline{PS} = R - \overline{OP} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}R.$$

Siga la circumferència de centre  $A$  i radi  $r = \overline{AP}$ .

$$\overline{AP} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R.$$

Siga la circumferència de centre  $B$  i radi  $s = \overline{BT}$ .

$$\overline{OB} = R - s, \quad \overline{AB} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R + s, \quad \overline{PQ} = \overline{BT} = s, \quad \overline{AQ} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}R - s, \quad \overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}R + s,$$

$$\overline{OA} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}R.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AQB$ :

$$\overline{BQ} = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}R+s\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}R-s\right)^2} = \sqrt{(2-\sqrt{2})Rs}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $OQB$ :

$$\overline{OQ} = \sqrt{(R-s)^2 - \left(\sqrt{(2-\sqrt{2})Rs}\right)^2} = \sqrt{R^2 + s^2 + (-4 + \sqrt{2})Rs}.$$

$\overline{OA} = \overline{AQ} + \overline{OQ}$ , aleshores:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}R = \frac{2-\sqrt{2}}{4}R - s + \sqrt{R^2 + s^2 + (-4 + \sqrt{2})Rs}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } s:$$

$$s = \frac{1}{8}R.$$

30.- Els angles aguts d'un rombe mesuren  $60^\circ$  i el costat  $c$ . Dins del rombe s'han inscrit cinc circumferències (veure figura). Calculeu el radi de les cinc circumferències.

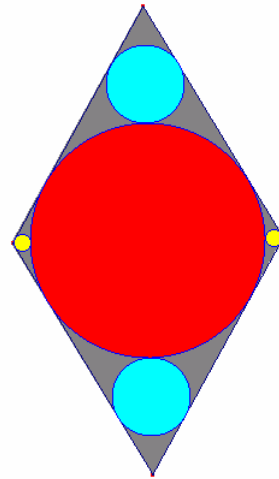
Solució:

Considerem el rombe  $ABCD$   $c = \overline{AB}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ .  
Siga la circumferència de centre  $O$  i radi  $r = \overline{OP}$ .

El triangle  $ACD$  és equilàter,  $\overline{AC} = c$ .

$\overline{OA} = \frac{c}{2}$ ,  $\angle PAO = 60^\circ$ . Aleshores  $\overline{AP} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{c}{4}$ ,

$r = \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$ .



Considerem la circumferència de centre  $N$  i radi  $s = \overline{MN} = \overline{TN}$ .

$\overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$ ,  $\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ ,

$\overline{BN} = \overline{OB} - \overline{OT} - \overline{TN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{4}c - s$ .

$\angle NBM = 30^\circ$ , Aleshores,  $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BN}$ .

$s = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c - s}{2}$ . Resolent l'equació en la incògnita  $s$ :

$s = \frac{\sqrt{3}}{12}c$ .

Considerem la circumferència de centre  $K$  i radi  $t = \overline{KL} = \overline{KQ}$ .

$t = \overline{KL} = \overline{KQ}$ .

$\overline{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$ ,  $\overline{OC} = \frac{1}{2}c$ ,

$\overline{CK} = \overline{OC} - \overline{OQ} - \overline{KQ} = \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{3}}{4}c - t$ .

$\angle LKC = 30^\circ$ , Aleshores,  $\overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CK}$ .

$t = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{4}c - t \right)$ .

Resolent l'equació en la incògnita  $t$ :

$t = \frac{7\sqrt{3} - 12}{4}c$ .

