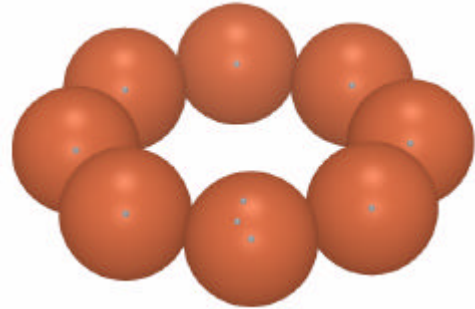
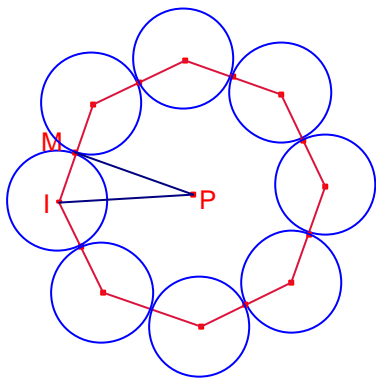


Problemes de Geometria per a l'ESO 41

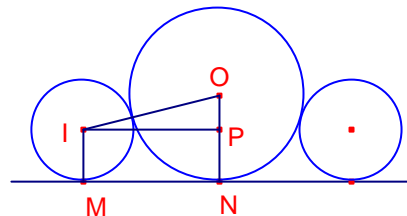
401.- Vuit esferes iguals de radi r i tangents dos a dos reposen sobre un plànol horitzontal i els seus centres formen un octògon regular. Determineu el radi de l'esfera tangent al plànol horitzontal i tangent a les vuit esferes.
KöMaL, C789.



Solució:



Vista de la secció que passa pels centres de les esferes.



Vista frontal amb una secció de plànol que passa per I i P, perpendicular al plànol horitzontal.

Siga I el centre de una de les esferes de radi r .
 Siga M el punt de tangència de dos esferes.
 Siga O el centre de l'esfera tangent a les vuit esferes i tangent al plànol horitzontal.
 Siga M el punt projecció del punt I sobre el plànol horitzontal.
 Siga N la projecció del punt O sobre el plànol horitzontal.
 Siga $R = \overline{ON}$.

$$\overline{IM} = r, \overline{IO} = r + R, \overline{OP} = R - r.$$

Notem que $\angle IPM = \frac{45^\circ}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle IPM$:

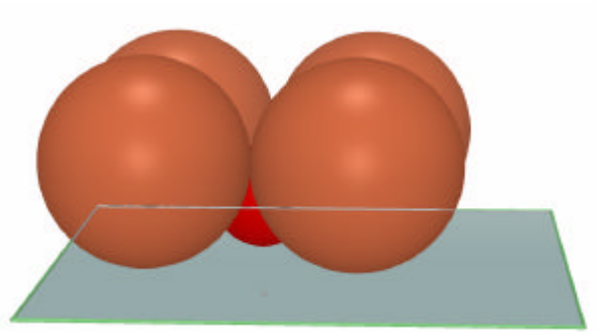
$$\overline{IP} = \frac{r}{\sin \frac{45^\circ}{2}}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle IPO$:

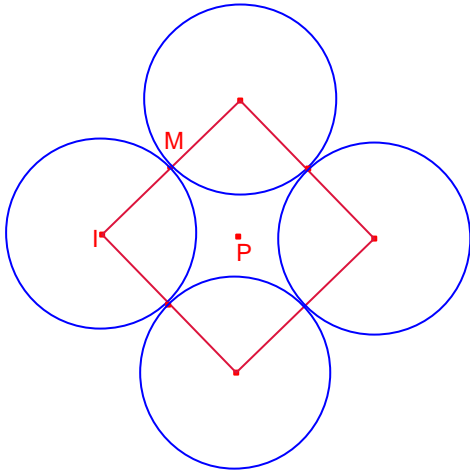
$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{r}{\sin \frac{45^\circ}{2}} \right)^2.$$

$$4Rr = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{45^\circ}{2}}. \text{ Aleshores, } R = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} r.$$

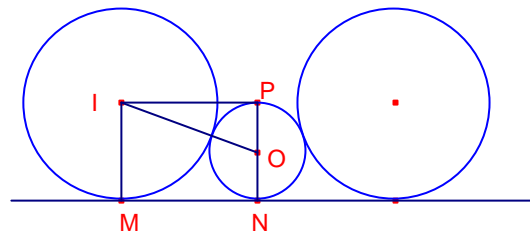
402.- Quatre esferes iguals de radi r i tangents dos a dos reposen sobre un plànol horitzontal i els seus centres formen un quadrat. Determineu el radi de l'esfera tangent al plànol horitzontal i tangent a les quatre esferes.



Solució:



Vista de la secció que passa pels centres de les esferes.



Vista frontal amb una secció de plànol que passa per I i P, perpendicular al plànol horitzontal.

Siga I el centre de una de les esferes de radi r .

Siga M els punt de tangència de dos esferes.

Siga O el centre de l'esfera tangent a les vuit esferes i tangent al plànol horitzontal.

Siga M el punt projecció del punt I sobre el plànol horitzontal.

Siga N la projecció del punt O sobre el plànol horitzontal.

Siga $s = \overline{ON}$.

$\overline{IM} = r$, $\overline{IO} = r + s$, $\overline{OP} = r - s$.

Notem que $\angle IPM = 45^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle IPM :

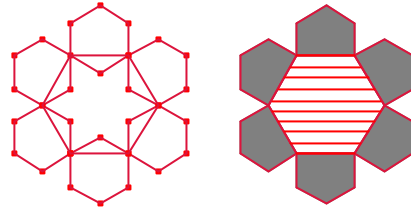
$$\overline{IP} = r\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle IPO :

$$(r + s)^2 = (r - s)^2 + (r\sqrt{2})^2.$$

$$4rs = 2r^2. \text{ Aleshores, } s = \frac{1}{2}r.$$

403.- Per fer un logotip (figura de la dreta) s'ha utilitzat dos tipus diferents d'hexàgons regulars (figura esquerra).
 Calculeu la proporció entre l'àrea grisa i la ratllada.
KöMaL, K57.



Solució:

Els triangles blau i verd tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base $\overline{AB} = \overline{BC}$ i la mateixa altura sobre aquestes bases.

Considerarem aquests triangles com unitat d'àrea de mesura.

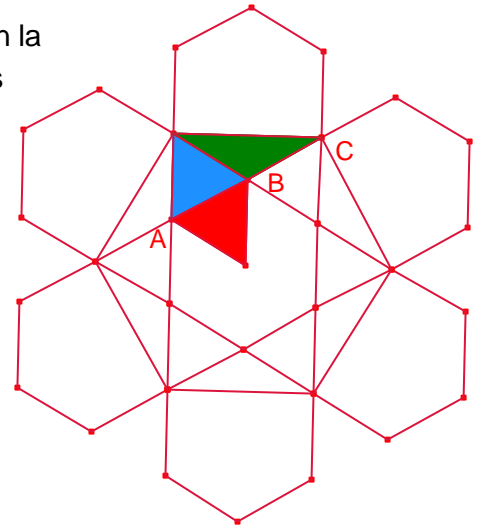
L'àrea de l'hexàgon ratllat té 18 triangles d'àrea

Cada pentàgon gris té 5 triangles d'àrea.

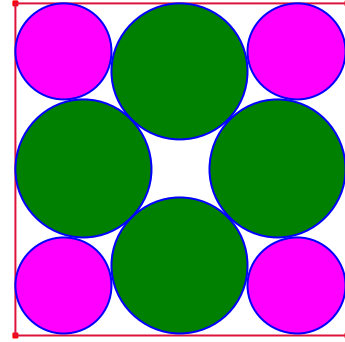
L'àrea grisa ocupa 30 triangles d'àrea.

La proporció entre l'àrea grisa i la ratllada és:

$$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}.$$



404.- En el quadrat de costat c s'han dibuixat 8 cercles. Determineu el radi dels dos tipus de cercles.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $c = \overline{AB}$.

Siga $r = \overline{PM} = \overline{QN} = \overline{FH}$ el radi dels 4 cercles grans.

$\overline{HP} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i

isòsceles $\triangle PHQ$:

$$\overline{PQ} = 2r\sqrt{2}.$$

$\overline{MN} = 2r + 2r\sqrt{2} = c$. Resolent l'equació en la incògnita r :

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c.$$

Siga $s = \overline{DE} = \overline{EG}$ el radi dels 4 cercles menuts.

Siga la projecció de G sobre el segment \overline{FH} .

$$\overline{EF} = \frac{c}{2} - s, \quad \overline{HJ} = r - s, \quad \overline{GH} = r + s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i

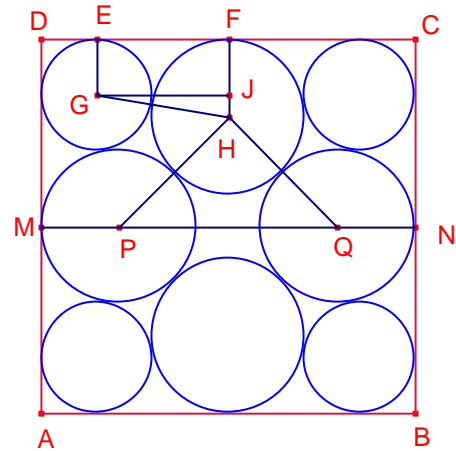
isòsceles $\triangle GJH$:

$$(r + s)^2 = (r - s)^2 + \left(\frac{c}{2} - s\right)^2.$$

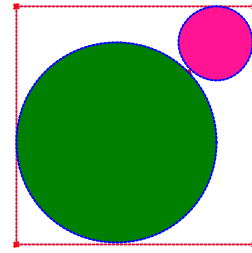
$$s^2 - (4r + c)s + \frac{c^2}{4} = 0.$$

$s^2 - (2\sqrt{2} - 1)cs + \frac{c^2}{4} = 0$. Resolent l'equació en la incògnita s :

$$s = \frac{2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}c.$$



405.- En un triangle de costat c s'han inscrit dues circumferències tangents.
 Proveu que la suma dels radis de les circumferències és constant.
 Calculeu el valor de la constant.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $c = \overline{AB}$.

Siga $r = \overline{PG} = \overline{AG}$ radi d'una de les circumferències.

Considerem la recta EF que passa per Q i és perpendicular al costat \overline{AB} .

Siga $s = \overline{EQ} = \overline{BF}$ radi de l'altra circumferència.

Siga M la projecció de P sobre la recta EF .

$\overline{QM} = c - (r + s)$.

Aplicant el teorema de Pitàores al triangle rectangle i

isòsceles $\triangle PMQ$:

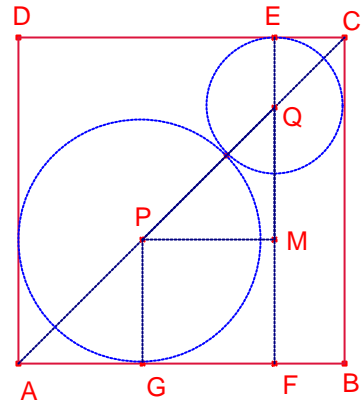
$$(r + s)^2 = 2(c - (r + s))^2.$$

$$r + s = (c - (r + s))\sqrt{2}.$$

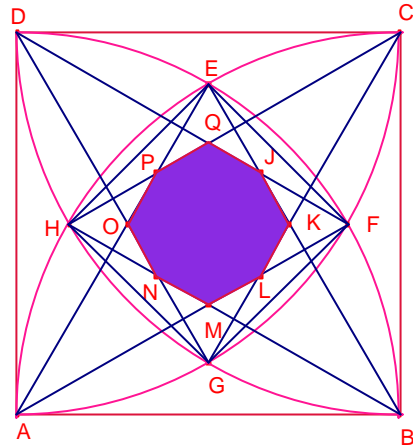
$$r + s = (2 - \sqrt{2})c.$$

Aleshores, la suma dels radis de les circumferències és constant i la constant és

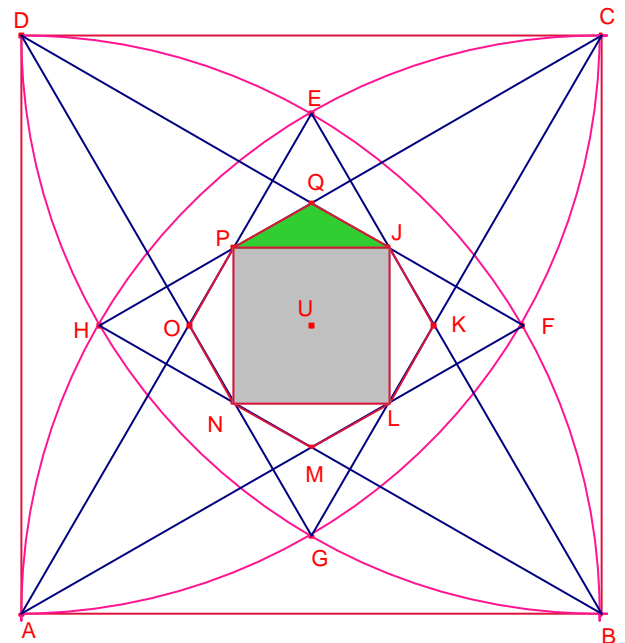
$$(2 - \sqrt{2})c.$$



406.- Siga ABCD un quadrat de costat 2.
 Construïm quatre quadrants de circumferència de centre cadascun dels vèrtexs i radi del costat del quadrat. Els arcs es tallen en els punts E, F, G, H.
 Construïm els triangles $\triangle AFE$, $\triangle BEH$, $\triangle CHG$ i $\triangle DGF$.
 Aquests quatre triangles formen un octògon JKLMNOPQ, l'àrea del qual es demana.
Barroso, 625



Solució:
 $\angle ABE = 60^\circ$, $\angle EBC = \angle ABH = 30^\circ$.
 Aleshores, $\angle HBE = 30^\circ$.
 $\angle QCD = \angle CDQ = 30^\circ$, aleshores, $\angle DQC = 120^\circ$.
 Els triangles $\triangle PJK$, $\triangle JLK$, $\triangle LNM$, $\triangle NPO$ són isòsceles i iguals.
 L'octògon JKLMNOPQ té tots els costats iguals.
 $\angle PJK = 30^\circ$.
 Aleshores, $\angle PJK = 90^\circ$
 L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat JLNP de costat \overline{PJ} més l'àrea de 4 triangles equilàters de costat \overline{PQ} i altura $\frac{\overline{PJ}}{2}$.
 Siga U el centre del quadrat ABCD.
 $\overline{BU} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AB} = \sqrt{2}$.
 $\angle JBU = 15^\circ$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle JUB$:

$$\overline{JU} = \overline{BU} \cdot \operatorname{tg}15^\circ = \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}.$$

$$\overline{PJ} = \sqrt{2} \cdot \overline{JU} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

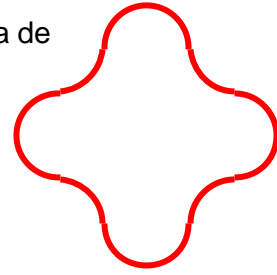
$$\frac{\overline{PJ}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\frac{\overline{PJ}}{2 \cdot \overline{PQ}} = \cos 30^\circ. \text{ Aleshores, } \overline{PQ} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}.$$

L'àrea de l'octògon és:

$$S_{\text{octo}} = S_{\text{JLNP}} + 4 \cdot S_{\text{PJK}} = \overline{PJ}^2 + 4 \cdot \frac{\overline{PQ}^2 \sqrt{3}}{4} = (4 - 2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{4\sqrt{3} - 6}{3}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{36 - 20\sqrt{3}}{3}.$$

407.- La figura següent està formada per arcs de circumferència de diàmetre 2.
 Calculeu el perímetre i l'àrea de la figura.



Solució:

Els arcs són tangents.

La figura està formada per 4 semicircumferències de diàmetre 2 (radi 1) i 4 quadrants de circumferència de diàmetre 2.

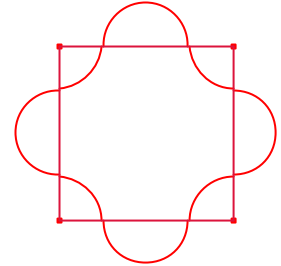
El perímetre és:

$$P = 4\left(\frac{1}{2}\pi 2\right) + 4\left(\frac{1}{4}\pi 2\right) = 6\pi .$$

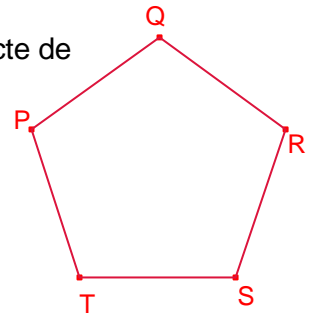
L'àrea està formada per l'àrea d'un quadrat de costat 6 i un cercle de diàmetre 2.

La superfície és:

$$S = 4^2 + \pi \cdot 1^2 = 16 + \pi .$$



408.- Siga PQRST el pentàgon regular. Siga U el simètric de R respecte de la diagonal \overline{QS} .
 Determineu la mesura de l'angle $\angle UST$.



Solució:

L'angle interior d'un pentàgon regular és:

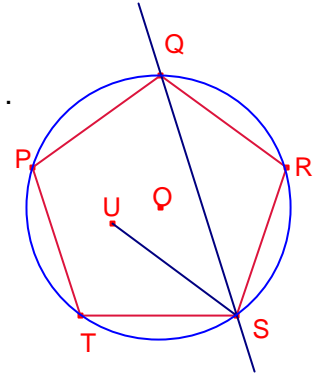
$$\angle TSR = 108^\circ$$

Si U és el simètric de R respecte de QS aleshores, $\angle RSQ = \angle QSU$.

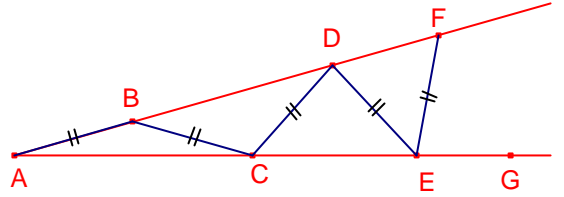
$\angle QSR = 36^\circ$ per ser angle inscrit en la circumferència circumscriu del pentàgon i abraçar la cinquena part de circumferència.

Aleshores, $\angle UST = \angle TSR - 2\angle QSR = 108 - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$.

Notem que U pertany a les diagonals \overline{PS} , \overline{QT} .



409.- Donades dues semirectes d'origen comú i angle α , i els segments $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$.
 Determineu la mesura dels angles $\angle DCE$, $\angle FEG$.



Solució:

$$\angle BAC = \alpha$$

Per ser $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle ACB = \alpha$.

Aleshores, $\angle CBD = 2\alpha$.

Per ser $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\angle BDC = 2\alpha$.

Aleshores, $\angle DCE = \angle DAC + \angle BDC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

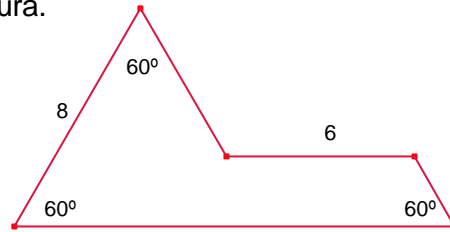
Per ser $\overline{CD} = \overline{DE}$, $\angle CED = 3\alpha$.

Aleshores, $\angle EDF = \angle DAE + \angle CED = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$.

Per ser $\overline{DE} = \overline{EF}$, $\angle DFE = 4\alpha$.

Aleshores, $\angle FEG = \angle FAE + \angle DEF = \alpha + 4\alpha = 5\alpha$.

410.- Calculeu el perímetre de la següent figura.



Solució:

La recta ED talla el segment \overline{AB} en el punt F.
 $\angle AFE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\triangle AFE$ és un triangle equilàter.

$$\overline{AF} = \overline{EF} = 8$$

FBCD és un paral·lelogram.

$$\overline{FB} = \overline{DC} = 6, \overline{BC} = \overline{FD}.$$

$$\overline{ED} + \overline{BC} = \overline{ED} + \overline{FD} = \overline{EF} = 8.$$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} = 8 + 6 = 14.$$

El perímetre de la figura és:

$$\overline{AE} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{ED} = 8 + 14 + 8 + 6 = 36.$$

