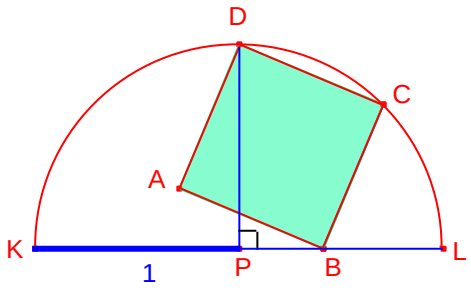
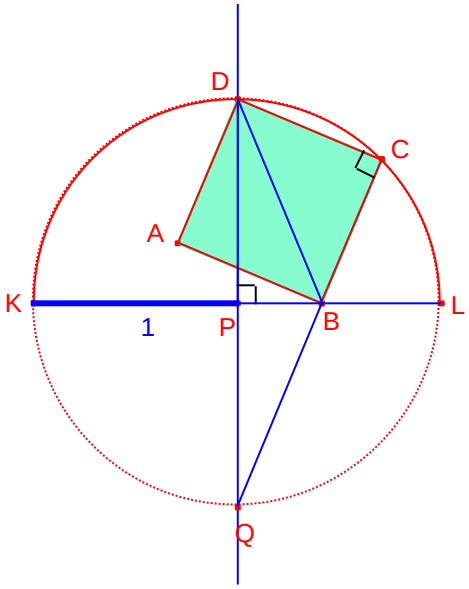
Problemes de Geometria per a l'ESO 428

4271.- La figura està formada per una semicircumferència i un quadrat. Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



P centre de la circumferència

AB=CD=c

BD=BQ=c·sqrt(2)

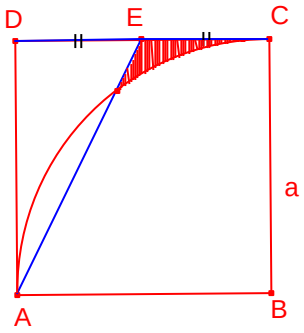
DQ=2

Teorema Pitàgores QCD

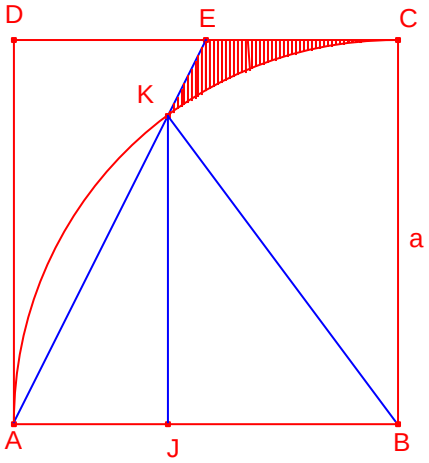
$4=c^2+(1+\sqrt{2})^2c^2$

$c^2=[ABCD]=2-\sqrt{2}$

4272.- La figura està formada per un quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$ i un quadrant.
Calculeu l'àrea roja.



Solució:



x=AJ

JK=2x

BJ=a-x

Teorema Pitàgores BJK

$a^2=4x^2+(a-x)^2$

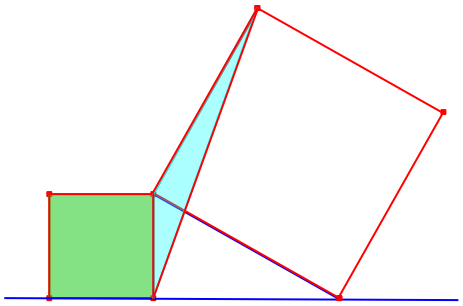
x=(2/5)a

angleKBC=angleJKB=y

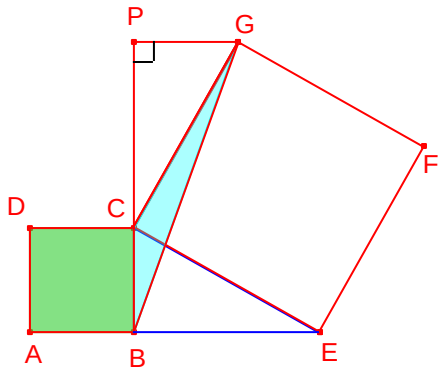
tan y=3/4

[Roja]=[ABCD]-([ADE]+[ABK]+sector(a,y))=7/20-arctan(3/4)/2)a^2=0.0282·a^2

4273.- La figura està formada per dos quadrats que tenen un vèrtex comú.
Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda.



Solució:



AB=c

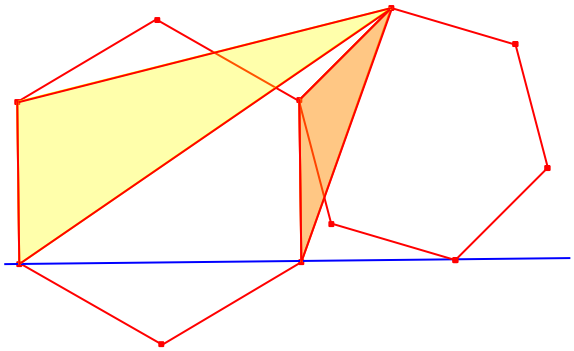
els triangles CBE, GPC són iguals

$[ABCD]=c^2$

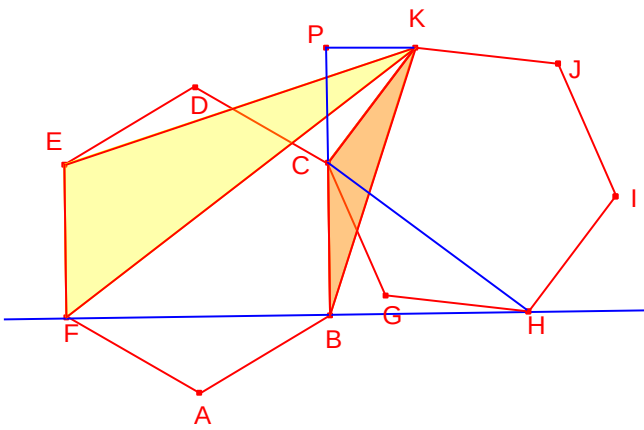
$[BCG]=(1/2)\cdot BC\cdot PG=c^2/2$

$[BCG]/[ABCCD]=1/2$

4274.- La figura està formada per dos hexàgons regulars que tenen un vèrtex comú.
Calculeu la proporció entre l'àrea groga i l'àrea taronja.



Solució:



AB=1

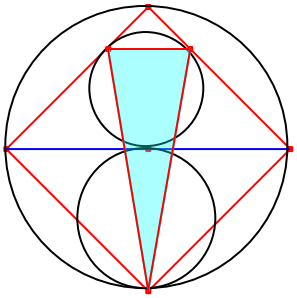
BF=sqrt(3)
angleBHC=anglePCK

Els triangles BHC, PCK semblants i de raó sqrt(3) : 1

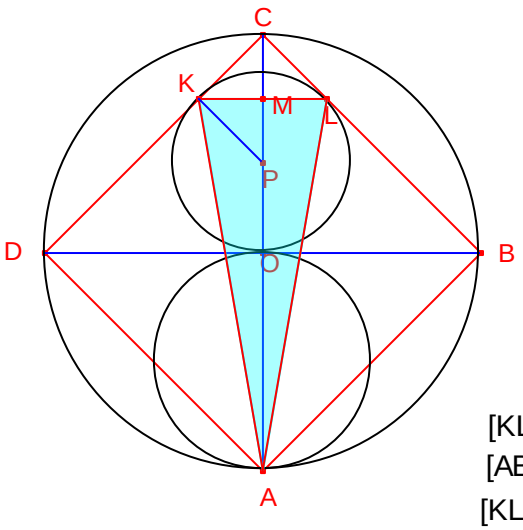
PK= BC·sqrt(3)/3

[Groga]/[Taronja]=(BF+PK)/PK=4

4275.- La figura està formada per un quadrat i tres circumferències.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=2

OB=OC=sqrt(2)

PK=CK=r

PC=r·sqrt(2)

(1+sqrt(2))r=sqrt(2)

r=2-sqrt(2)

CM=r·sqrt(2)/2=-1+sqrt(2)

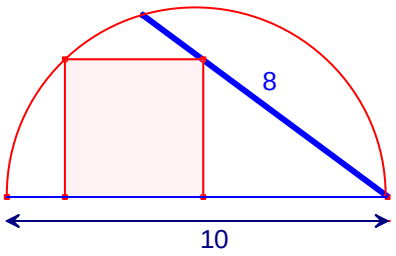
AM=1+sqrt(2), KL=2(-1+sqrt(2))

[KLA]=(1/2)·2(-1+sqrt(2))(1+sqrt(2))=1

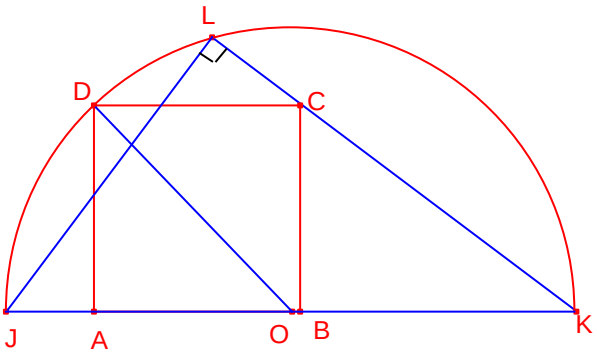
[ABCD]=4

[KLA]/[ABCD]=1/4

4276.- La figura està formada per una semicircumferència de diàmetre 10, una corda que mesura 8, i un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



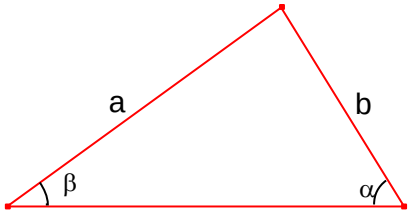
Solució:



OK=5
JL=6
AB=c
BK=(4/3)c
OB=5-(4/3)c
AO=c-5+(4/3)c=(7/3)c-5

Teorema Pitàgores DAO
$5^2=c^2+((7/3)c-5)^2$
c=105/29
$[ABCD]=(105/29)^2$

4277.- Donat el triangle tal que $a = b\sqrt{2}$
Proveu que
$2 \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = 1$



Solució:
Aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

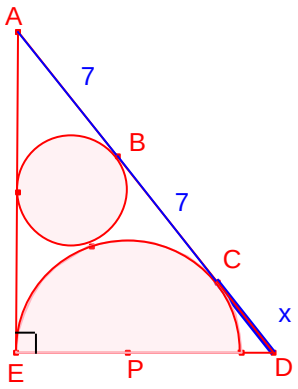
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\frac{2}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \beta}$$

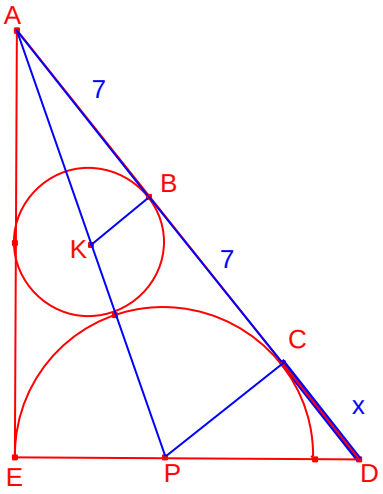
$$2(1 - \cos^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 = 2 \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

4278.- En la figura, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}, E = 90°$ té dibuixades una circumferència i una semicircumferència. Calculeu la mesura del segment $x = \overline{CD}$



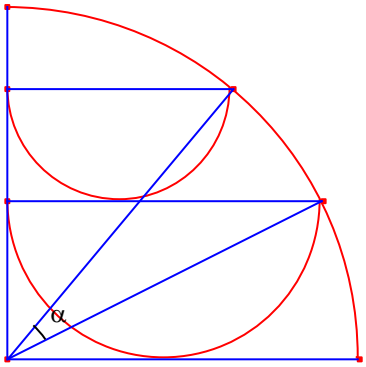
Solució:



angleBAK=a

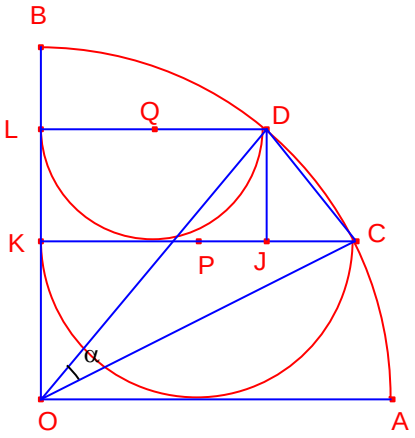
KB=r
PQ=2r
PK=AK=3r
teorema Pitàgores AED
$36r^2=4^2+4\cdot 49$
r=7/(2·sqrt(2))
sin a = 1/3
tan a =sqrt(2)/4
2a=angleCPD
tan(2a)=(4/7)sqrt(2)
x=2r·tan(2a)=4

4279.- La figura està formada per un quadrant que té en el seu interior dos semicircumferències.
Calculeu $\sin\alpha$



Solució:
Siga $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OB} = 1$
Siga $\overline{PK} = \overline{OK} = r$
Siga $\overline{QL} = \overline{KL} = s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKC}$:
$r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

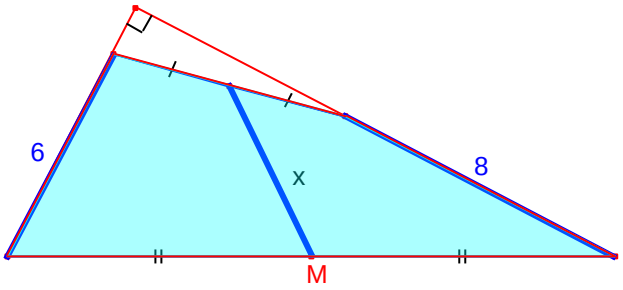


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKC}$:
$4s^2 + r^2 + s^2 + 2rs = 1$
$s = \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{5\sqrt{5}}$
Siga J la projecció de D sobre $\overline{KC}$.

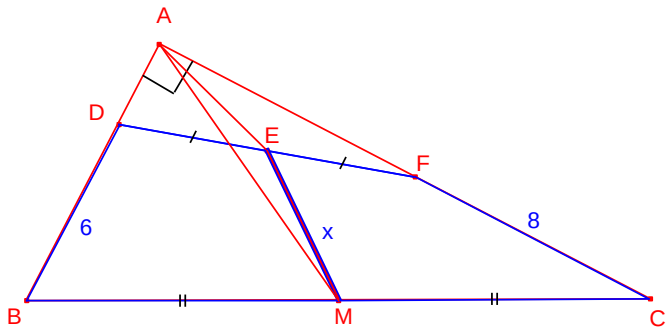
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DJC}$:
$DC^2 = s^2 + 4(r - s)^2$
$\overline{DC}^2 = \dfrac{10 - 2\sqrt{21}}{5}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OCD}$:
$\dfrac{10 - 2\sqrt{21}}{5} = 1 + 1 - 2 \cdot \cos\alpha$
$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$
$\sin\alpha = \dfrac{2}{5}$

4280.- La figura està formada per un triangle rectangle.
Els punts migs de la hipotenusa i d'un segment interior formen el segment x.
Calculeu la seua mesura.



Solució:



AD=a, AF=b

DE=EF=c

BM=CM=d

angleDFA=m, angle ACB=n

sin m=a/(2c), cos m=b/2c

sin n=(6+a)/(2d), cos n=(8+d)/2d

AE=c, AM=d

angleEAM=m-n

Teorema cosinus AEM

$x^2=c^2+d^2-2cd\cdot\cos(m-n)=$

$=c^2+d^2-(1/2)(a^2+b^2+6a+8b)=$

$=(1/4)(a^2+b^2)+(1/4)((6+a)^2+(8+b)^2-(1/2)(1/2)(a^2+b^2+6a+8b)=25$

$x=5$