

Problemes de Geometria per a l'ESO 45

441.- En un quadrilàter cada diagonal divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea. Proveu que les diagonals divideixen el quadrilàter en quatre parts d'igual àrea.

KöMaL, abril 99, Gy3274.

Solució:

Siguen S_1, S_2, S_3, S_4 els quatre triangles que les diagonals $\overline{AC}, \overline{BD}$ del quadrilàter ABCD divideixen el quadrilàter.

La diagonal \overline{AC} divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea, aleshores:

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4.$$

$$S_1 + S_2 - S_3 - S_4 = 0 \quad (1)$$

La diagonal \overline{BD} divideix el quadrilàter en dues parts d'igual àrea, aleshores:

$$S_1 + S_4 = S_2 + S_3.$$

$$S_1 - S_2 - S_3 + S_4 = 0 \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$2S_1 - 2S_3 = 0.$$

$$\text{Aleshores, } S_1 = S_3 \quad (3)$$

Restant les expressions (1) (2):

$$2S_2 - 2S_4 = 0.$$

$$\text{Aleshores, } S_2 = S_4 \quad (4)$$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees son proporcionals a les bases, aleshores:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3} \quad (5)$$

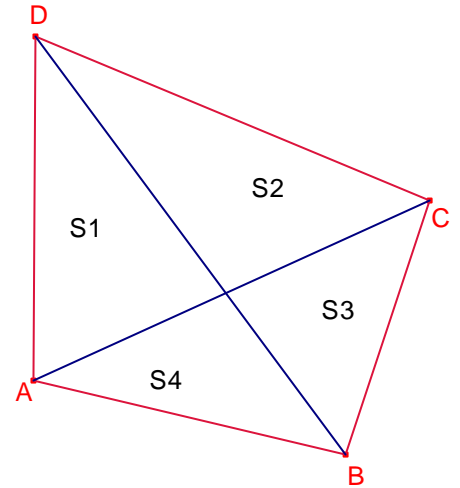
$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 \quad (6)$$

Substituint les expressions (3) (4) en l'expressió (6):

$$S_1^2 = S_2^2 \quad (7)$$

$$S_1 = S_2$$

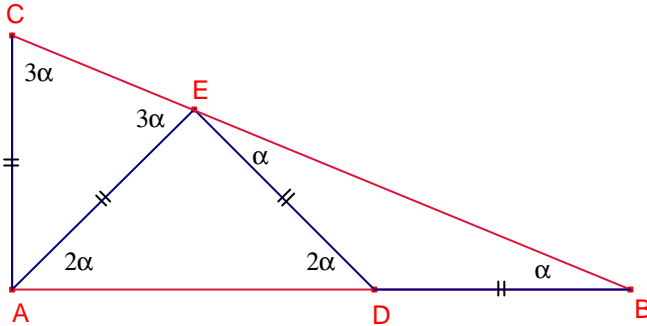
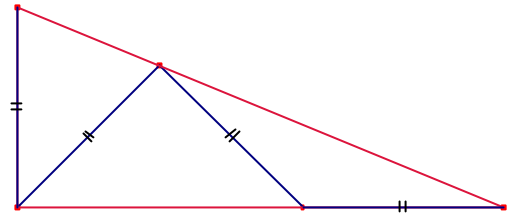
$$\text{Aleshores, } S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$



Notem que la intersecció de les diagonals és el punt mig de les diagonals, aleshores, el quadrilàter és paral·lelogram.

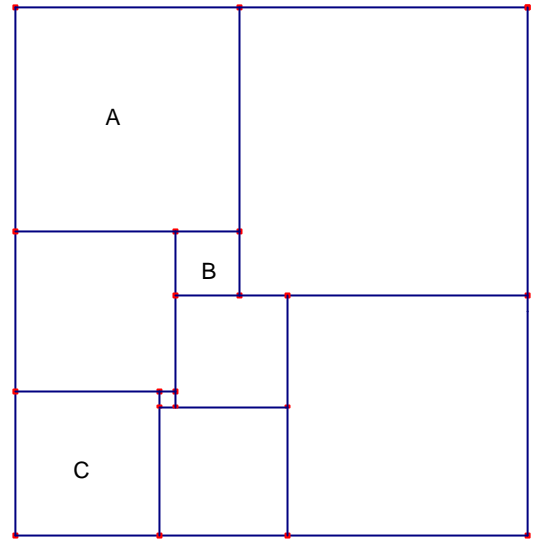
442.-Calculeu els angles aguts del triangle rectangle de la figura el qual ha estat dividit en 3 triangles isòsceles tots de costats iguals.
KöMaL, K44.

Solució:

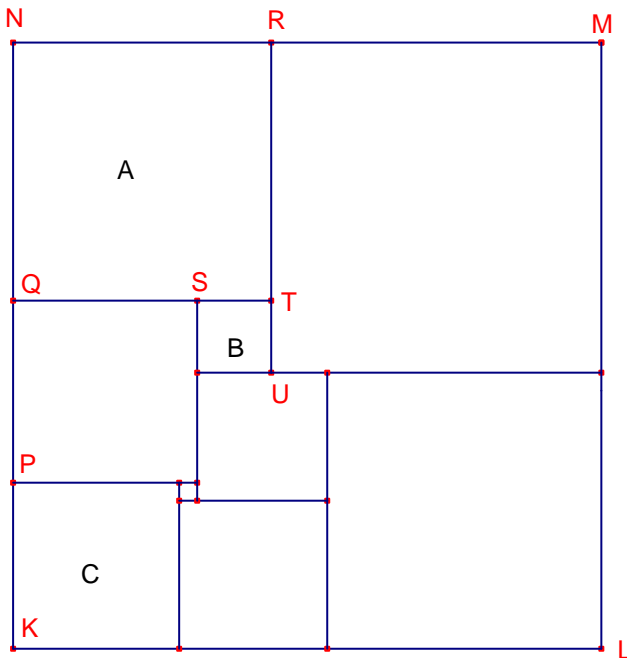


Siga $\alpha = \angle ABC$. $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{BD}$
 $\angle BED = \alpha$.
 $\angle ADE = \angle DBE + \angle BED = 2\alpha$.
 $\angle EAD = \angle ADE = 2\alpha$.
 $\angle AEC = \angle ABE + \angle EAB = 3\alpha$.
 $\angle ACB = \angle AEC = 3\alpha$.
 $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$.
 $\alpha + 3\alpha = 90^\circ$.
 Resolent l'equació:
 $\alpha = 22'30'$.
 $C = 3\alpha = 67^\circ30'$.

443.- El rectangle de la figura s'ha disseccionat en quadrats.
 L'àrea del quadrat A és 196cm^2 , la del quadrat B és 16cm^2 i la del quadrat C és 81cm^2 .
 Calculeu l'àrea del rectangle.
KöMaL, K307.



Solució:



$$\overline{NR} = \overline{NQ} = \overline{QT} = \overline{RT} = \sqrt{196} = 14.$$

$$\overline{ST} = \overline{TU} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\overline{QS} = \overline{QP} = \overline{QT} - \overline{ST} = 14 - 4 = 10.$$

$$\overline{KP} = \sqrt{81} = 9.$$

$$\overline{KN} = \overline{KP} + \overline{QP} + \overline{NQ} = 9 + 10 + 14 = 33\text{cm}.$$

$$\overline{RM} = \overline{RU} = \overline{RT} + \overline{TU} = 14 + 4 = 18.$$

$$\overline{NM} = \overline{NR} + \overline{RM} = 14 + 18 = 32\text{cm}.$$

L'àrea del rectangle KLMN és:

$$S_{\text{KLMN}} = \overline{NM} \cdot \overline{KN} = 32 \cdot 33 = 1056\text{cm}^2.$$

444.- Proveu que si dos angles oposats d'un quadrilàter convex circumscribit a una circumferència són rectes el quadrilàter és un cometa.
KöMaL, C1098.

Solució:

Siga el quadrilàter ABCD circumscribit a la circumferència de centre O i radi r.

Siguen K, L M i N els punts de tangència del quadrilàter i la circumferència.

$\overline{AK} = \overline{AL}$.

$\overline{OK} = r$ és perpendicular a \overline{AD} , $\overline{ON} = r$ és perpendicular a \overline{CD} .

$\angle KDN = 90^\circ$.

Aleshores, DKON és un quadrat, per tant,

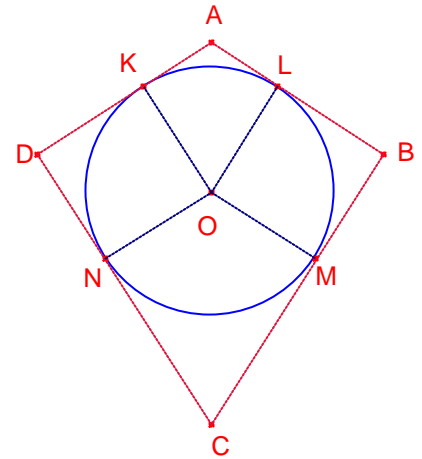
$\overline{DK} = \overline{OK} = r$.

Anàlogament, $\overline{BL} = r$.

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Anàlogament, $\overline{CD} = \overline{CB}$.

Aleshores, ABCD és un cometa.



445.- En un quadrilàter ABCE M és el punt mig del costat \overline{AB} i N el punt mig del costat \overline{CD} . Les longituds de les diagonals \overline{AC} i \overline{BD} és $2\sqrt{3}$ i formen un angle de 60° .
 Determineu la mesura del segment \overline{MN} .
 KöMaL, C1099.

Solució.

Siga O la intersecció de les diagonals \overline{AC} i \overline{BD} .

a) Suposem que $\angle BOC = \angle AOD = 60^\circ$.

Siga Q el punt mig del costat \overline{BC} .

\overline{NQ} és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle DCB$.

\overline{MQ} és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABC$.

Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{3}$, $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{3}$, $\angle NQM = \angle AOD = 60^\circ$.

Aleshores el triangle $\triangle MQN$ és equilàter, aleshores:

$\overline{MN} = \overline{NQ} = \sqrt{3}$.

b) Suposem que $\angle BOC = \angle AOD = 120^\circ$.

Siguen P, Q els punts migs dels costats \overline{AD} \overline{BC} , respectivament.

\overline{NQ} és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle DCB$.

\overline{NP} és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle ACD$.

Aleshores, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \sqrt{3}$, $\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{3}$, $\angle PNQ = \angle AOB = 60^\circ$.

Aleshores el triangle $\triangle PQN$ és equilàter.

Anàlogament el triangle $\triangle PQM$ és equilàter.

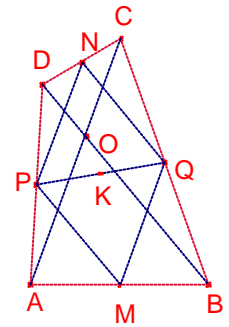
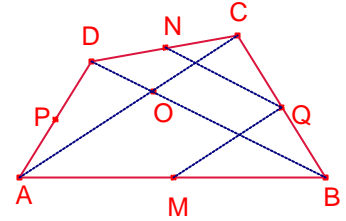
Siga K el punt mig del costat \overline{PQ}

$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{KN}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PKN$

$\overline{KN} = \sqrt{\overline{NP}^2 - \overline{PK}^2} = \frac{3}{2}$.

$\overline{MN} = 2 \cdot \overline{KN} = 3$.

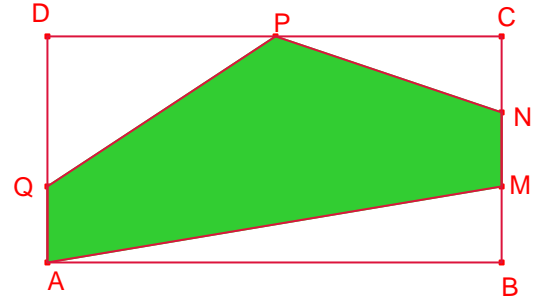


446.- En la figura ABCD és un rectangle de 108cm de perímetre.

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}, \overline{DP} = \overline{PC}.$$

Calculeu l'àrea del pentàgon AMNPQ.

Olimpíada Nandú 2011. Nivell 3.



Solució:

Siga $\overline{AQ} = \overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC} = x$.

$$\overline{BC} = 3x, \overline{AB} = 2\overline{BC} = 6x, \overline{DQ} = 2x.$$

El perímetre del rectangle ABCD és 108cm, aleshores:

$$18x = 108. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$x = 6.$$

$$\overline{AB} = 36, \overline{BC} = 18.$$

$$\overline{DP} = \overline{PC} = 18, \overline{DQ} = 12.$$

L'àrea del pentàgon AMNPQ és:

$$S_{AMNPQ} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{NCD} + S_{PDQ})$$

$$S_{AMNPQ} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CN}}{2} + \frac{\overline{PD} \cdot \overline{DQ}}{2} \right).$$

$$S_{AMNPQ} = 36 \cdot 18 - \left(\frac{36 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 6}{2} + \frac{18 \cdot 12}{2} \right) = 378 \text{cm}^2.$$

447.- Coneixent els quatre costats d'un trapezi, calculeu les longituds dels costats del triangle format pels seus costats no paral·lels (exterior al trapezi).

José Cubillo, 111.

Solució:

Siga ABCD el trapezi de costats paral·lels $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ i costats no paral·lels

$\overline{AD} = c$, $\overline{BC} = d$.

Suposem que $b < a$.

Siga P la intersecció de les rectes AD, BC.

Siga $\overline{CP} = x$, $\overline{DP} = y$, costats del triangle $\triangle CDP$.

Els triangles $\triangle DCP$, $\triangle ABP$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{d+x}{a} = \frac{x}{b} = \frac{d}{a-b}.$$

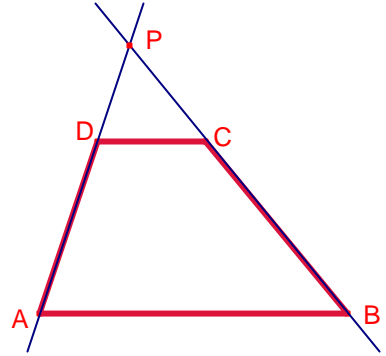
Resolent l'equació:

$$x = \frac{bd}{a-b}.$$

$$\frac{c+y}{a} = \frac{y}{b} = \frac{c}{a-b}.$$

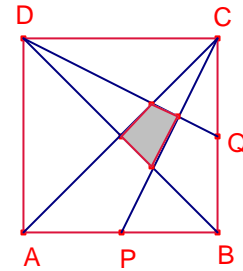
Resolent l'equació:

$$y = \frac{bc}{a-b}.$$



448.- En la figura ABCD és quadrat P i Q són punts migs dels costats del quadrat.
 Calculeu la raó entre les àrees de la zona ombrejada i la del quadrat.

Revista OIM, 43



Solució:

Siga K, L, M, N els vèrtexs del quadrilàter ombrejat.

Els triangles $\triangle PBK$, $\triangle CDK$ són semblants i la raó de semblança és 1:2.

Aleshores:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{DK}} = \frac{1}{2}, \overline{BK} = \frac{1}{3}\overline{BD}.$$

N és el centre del quadrat, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

$$\overline{NK} = \overline{BN} - \overline{BK} = \frac{1}{6}\overline{BD}.$$

Els triangles $\triangle BCD$, $\triangle KCN$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases. Aleshores:

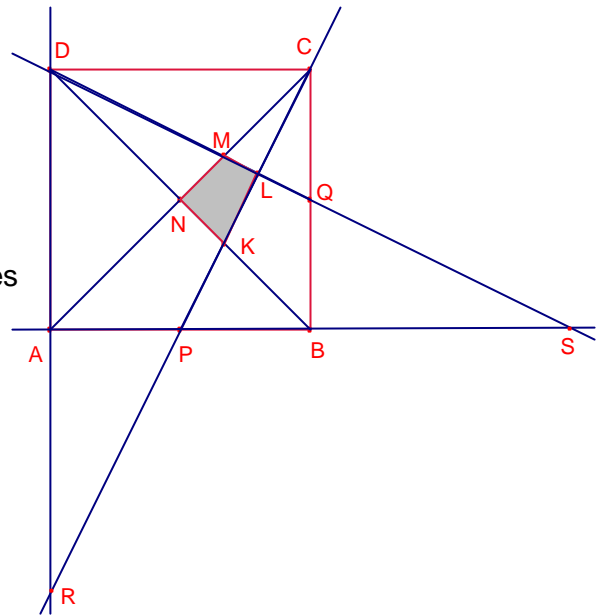
$$S_{\triangle KCN} = \frac{1}{6}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABCD}.$$

La recta CP talla la recta AD en el punt R.

$$\overline{AR} = \overline{AD}.$$

Els triangles $\triangle CLQ$, $\triangle RDC$ són semblants i la raó de semblança és 1:2.

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{DM}} = \frac{1}{2}, \overline{MQ} = \frac{1}{3}\overline{DQ}.$$



Els triangles $\triangle APR$, $\triangle DCR$ són semblants i la raó de semblança és 1:4.

$$\frac{\overline{QL}}{\overline{DL}} = \frac{1}{4}, \overline{QL} = \frac{1}{5}\overline{DQ}.$$

$$\overline{ML} = \overline{MQ} - \overline{QL} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\overline{DQ} = \frac{2}{15}\overline{DQ}.$$

Els triangles $\triangle LCM$, $\triangle QCD$ tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases. Aleshores:

$$S_{\triangle LCM} = \frac{2}{15}S_{\triangle QCD} = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{4}S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{30}S_{\triangle ABCD}.$$

$$S_{\text{KLMN}} = S_{\triangle KCN} - S_{\triangle LCM} = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30}\right)S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{20}S_{\triangle ABCD}.$$

449.- Siga el quadrat ABCD i F un punt qualsevol del costat \overline{BC} .
 Pel punt B tracem la perpendicular a la recta DF que talla la recta DC en el punt Q.
 Determineu la mesura de l'angle $\angle FQC$.

Solució:

Siga $\alpha = \angle FDC$, aleshores $\angle CBQ = \alpha$.

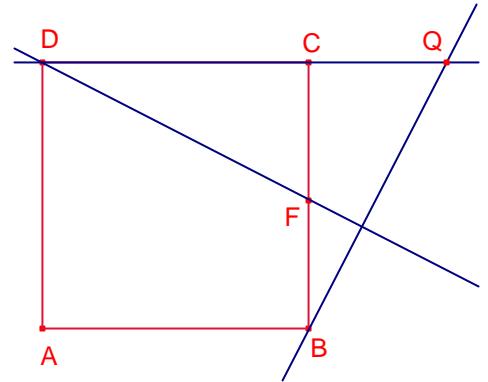
$\overline{DC} = \overline{CF}$.

Per tant, els triangles rectangles $\triangle DCF$, $\triangle BCQ$ són iguals.

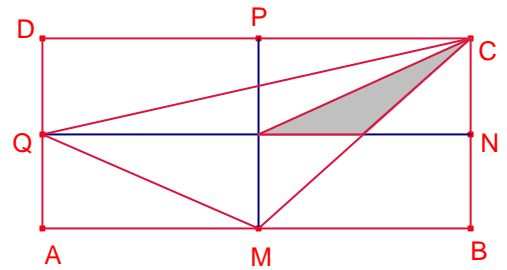
Aleshores, $\overline{CF} = \overline{CQ}$.

El triangle rectangle $\triangle CFQ$ és isòsceles, aleshores:

$\angle FQC = 45^\circ$.



450.- En el rectangle ABCD, M, N, P, Q són els punts migs dels costats.
 Si l'àrea del triangle ombrejat és 1, calculeu l'àrea del rectangle ABCD i del triangle $\triangle CQM$.



Solució:

Siga O la intersecció dels segments \overline{PM} , \overline{QN} (centre del rectangle)

Siga K la intersecció dels segments \overline{CM} , \overline{QN} .

Notem que ON és paral·lela mitjana del rectangle MBCQ.

Aleshores, K és el punt mig del segment \overline{ON} .

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\triangle OKC$, $\triangle QKC$ tenen la mateixa altura aleshores:

$$\frac{S_{\triangle ONC}}{S_{\triangle OKC}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OK}} = 2, \text{ aleshores, } S_{\triangle ONC} = 2.$$

$$S_{\triangle ONCP} = 2 \cdot S_{\triangle ONC} = 4.$$

$$S_{\triangle ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle ONCP} = 16.$$

$$\overline{QK} = 3 \cdot \overline{OK}$$

Els triangles $\triangle OKC$, $\triangle QKC$ tenen la mateixa altura aleshores:

$$\frac{S_{\triangle QKC}}{S_{\triangle OKC}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{OK}} = 3, \text{ aleshores, } S_{\triangle QKC} = 3.$$

$$\overline{CN} = \overline{BN}.$$

Els triangles $\triangle QKC$, $\triangle QKM$ tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores tenen la mateixa àrea.

aleshores les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{S_{\triangle OKM}}{S_{\triangle OKC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{OM}} = 1, \text{ aleshores, } S_{\triangle QKM} = S_{\triangle QKC} = 3.$$

L'àrea del triangle $\triangle CQM$ és:

$$S_{\triangle CQM} = S_{\triangle QKC} + S_{\triangle QKM} = 3 + 3 = 6.$$

