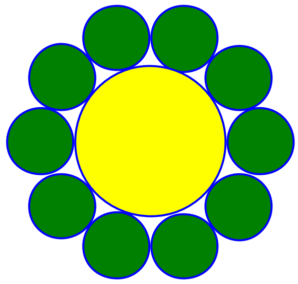
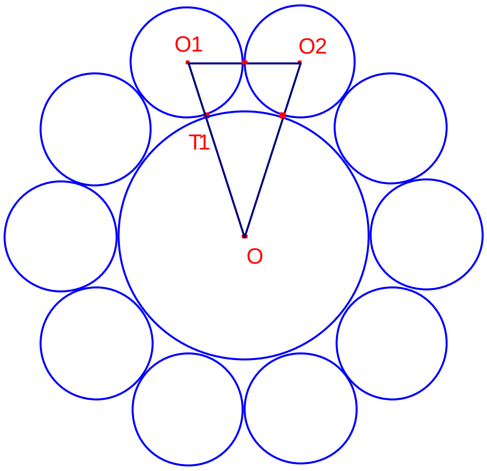
Problemes de Geometria per a l'ESO 46

451.- Al voltant d'un cercle situem 10 monedes d'igual radi com s'indica en la figura. Cada moneda és tangent al cercle i a dues monedes veïnes.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees de les monedes i la del cercle.
OMA, Olimpíadas de Mayo 2001.



Solució:
Siga r el radi de les monedes.
Siguen O_1, O_2 els centres de dues monedes tangents.
Siga O el centre del cercle interior.
Siga T_1 el punt de tangència del cercle i la moneda de centre O_1.
Siga r el radi de les monedes.

Els centres de les monedes formen un decàgon regular.



$\angle O_1OO_2 = 36^o$. El triangle $\overset{\Delta}{O_1OO_2}$ és auri, aleshores:

$\overline{O_1O_2} = 2r$

$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_1O_2}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{OO_1} = 2r \cdot \Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)r$

El radi del cercle és $\overline{OT_1}$.

$\overline{OT_1} = \overline{OO_1} - \overline{O_1T_1} = \left(1+\sqrt{5}\right)r - r = r\sqrt{5}$.

L'àrea de les 10 monedes és:

$S_{10mo} = 10 \cdot \pi r^2$

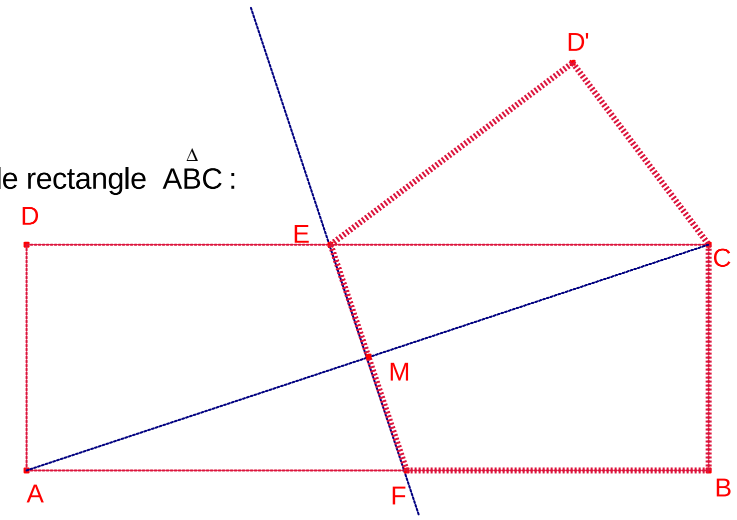
L'àrea del cercle és:

$S_c = \pi\left(r\sqrt{5}\right)^2 = 5\pi r^2$.

La proporció entre les àrees és:

$\frac{S_{10mo}}{S_c} = \frac{10 \cdot \pi r^2}{5\pi r^2} = 2$.

452.- Un rectangle de paper de 3cm per 9cm es doblega al llarg d'una recta fent coincidir dos vèrtexs oposats. D'aquest mode es forma un pentàgon. Calculeu la seua àrea.
OMA, Olimpíadas de Mayo 2006.



Solució:

Siga el rectangle ABCD $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$.

La recta per la qual es doblega és la mediatriu dels vèrtexs A, C.
La mediatriu talla els costats en els punts E, F.
Al doblega D és transforma en el simètric D' mitjançant la mediatriu EF.

$\overline{DE}=\overline{D'E}$, $\overline{AD}=\overline{D'C}=3$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{CD'E}$ són iguals.

Siga M el punt mig de la diagonals $\overline{AC}$.

$\overline{EM}=\overline{FM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AFM}$, $\overset{\Delta}{CEM}$ són iguals.

Siga $x=\overline{FM}$.

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AMF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{3}{9}=\frac{x}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

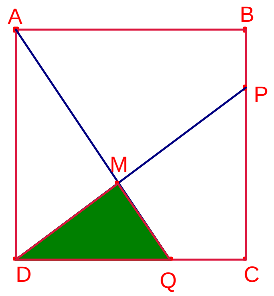
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECM}$:

$$\overline{CE}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2}=5.$$

$\overline{ED'}=\overline{DE}=9-\overline{CE}=4$.

L'àrea del pentàgon EFBCD' és igual a l'àrea del trapezi EFBC més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECD'}$.

$$S_{EFBCE'}=\left(\frac{\overline{CE}+\overline{FB}}{2}\right)\overline{BC}+\frac{\overline{CD'}\cdot\overline{ED'}}{2}=\left(\frac{5+4}{2}\right)3+\frac{3\cdot 4}{2}=\frac{39}{2}.$$



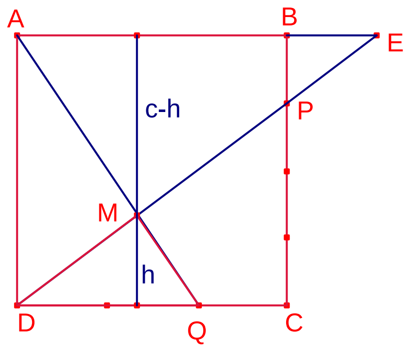
453.- Siga el quadrat ABCD de costat c.
Siguen P i Q dos punts del costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{PC} = 3 \cdot \overline{PB}$ i $\overline{QD} = 2 \cdot \overline{QC}$. Siga M el punt intersecció de les rectes AQ, PD.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QMD}$.
OMA, III Olimpíada Mayo.

Solució:

$\overline{PC} = 3 \cdot \overline{PB}$, aleshores, $\overline{PC} = \frac{3}{4}c$, $\overline{PB} = \frac{1}{4}c$.

$\overline{QD} = 2 \cdot \overline{QC}$, aleshores, $\overline{DQ} = \frac{2}{3}c$, $\overline{CQ} = \frac{1}{3}c$.



Les rectes PD, AB s'intersecten en el punt E.
Siga $x = \overline{BE}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DCP}$, $\overset{\Delta}{EBP}$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{PB}}.$$

$$\frac{c}{\frac{3}{4}c} = \frac{x}{\frac{1}{4}c}.$$ Aleshores, $x = \frac{1}{3}c$.

Siga h l'altura del triangle $\overset{\Delta}{QMD}$ referida a la base $\overline{QD}$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{AEM}$ referida a la base $\overline{AE}$ és $c - h$.

Els triangles $\overset{\Delta}{QMD}$, $\overset{\Delta}{AEM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{AE}} = \frac{h}{c-h}.$$

$$\frac{\frac{2}{3}c}{\frac{4}{3}c} = \frac{h}{c-h}.$$ Resolent l'equació:

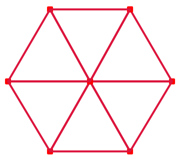
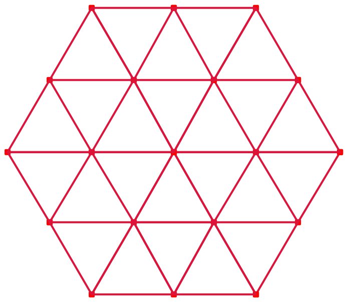
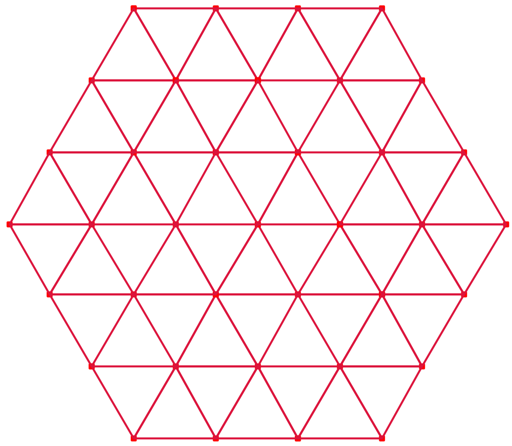
$$h = \frac{1}{3}c.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QMD}$ és:

$$S_{QMD} = \frac{\frac{2c}{3}\frac{c}{3}}{2} = \frac{c^2}{9}.$$

454.- Tenim 10000 fitxes iguals amb forma de triangle equilàter.
Amb aquests triangles es formen hexàgons regulars, sense superposar, ni deixar buits.
Si formem l'hexàgon regular que malbarata la menor quantitat possible de triangles, quants triangles ens calen i quants ens sobren
OMA, III Olimpíada de Mayo.

Solució:

		
6	$6·4 = 24$	$6·9=54$

Dos hexàgons regulars són semblants, la raó de semblança de les àrees és el quadrat de la raó de semblança dels hexàgons.

Siga 1 la longitud del costat d'un triangle equilàter.
El terme general del nombre triangles equilàters utilitzats en formar un hexàgon és $6 \cdot n^2$ on n és la longitud del costat de l'hexàgon.
Hem de determinar el valor màxim per a n tal que $6 \cdot n^2 \leq 10000$

$$n = \left[\sqrt{\frac{10000}{6}} \right] = 40 .$$

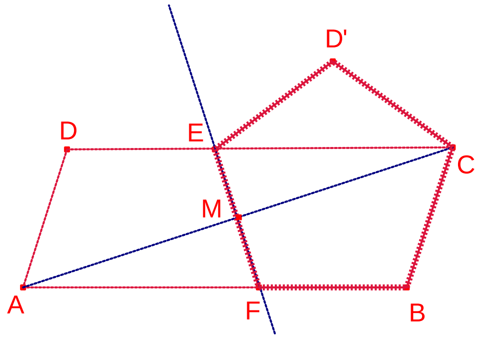
Per fer un hexàgon regular de costat 40 ens calen:
$6 \cdot 40^2 = 9600$ triangles equilàters.
Dels 10000 inicials ens sobrarien 400 triangles.

455.- En un paral·lelogram ABCD, $\overline{AC}$ és la diagonal major.
Amb un doblat que fa coincidir A en C es forma un pentàgon regular.
Calculeu la mesura dels angles que forma la diagonal $\overline{AC}$ amb cadascun dels costats del paral·lelogram i determineu la proporció entre els costats del paral·lelogram.
OMA, Olimpíada de Mayo 1999.

Solució:
Siga $a=\overline{AD}=\overline{BC}$ costats menuts del paral·lelogram ABCD i A angle agut.

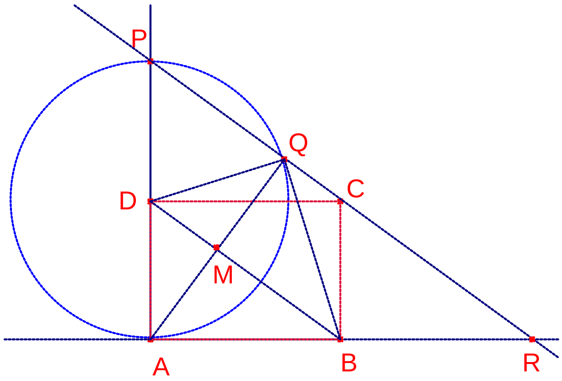
La recta per la qual es doblega és la mediatriu dels vèrtexs A, C.
La mediatriu talla els costats en els punts E, F.
Al doblega D és transforma en el simètric D’ mitjançant la mediatriu EF.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{CD'E}$ són iguals.



FBCD’E ha de ser un pentàgon regular, aleshores,
$\overline{DE}=\overline{ED'}=\overline{EF}=\overline{FB}=a$.
$\overline{CE}=a\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Per tant, $\overline{CD}=a+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$.
$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=1+\Phi=\Phi^2$.
Per ser FBCD’E un pentàgon regular.
$\angle EFB=108^o$.
$\angle AMF=90^o$.
Aleshores, $\angle CAB=18^o$.
$\angle ACD=\angle CAB=18^o$
$\angle FBC=108^o$
Aleshores, $\angle ACD=\angle FBC=108^o$.
$\angle DAC=180^o-(108^o-18^o)=54^o$.

456.- Siga el rectangle ABCD i la circumferència de centre D i radi $\overline{AD}$ que talla la prolongació del costat $\overline{AD}$ en el punt P. La recta PC talla la circumferència en el punt Q i a la prolongació del costat $\overline{AB}$ en el punt R.
Demostreu que $\overline{BQ} = \overline{BR}$.
OMA, Olímpiadas Mayo 2010.



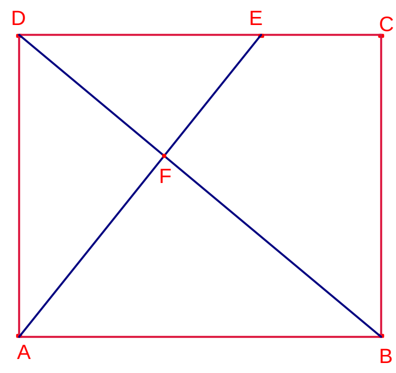
Solució:
Siga $a = \overline{AD} = \overline{DP} = \overline{DQ}$, $b = \overline{AB} = \overline{CD}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCP}$, $\overset{\Delta}{BRC}$ són iguals, aleshores:
$\overline{BR} = b$.
Siga $\alpha = \angle APR$.
Com que $\overline{DP} = \overline{DQ}$, $\angle PQD = \alpha$.
$\angle PDQ = 180^o - 2\alpha$.
$\angle PAQ$ és una angle inscrit en la circumferència, mesura la meitat de l'arc que abraça:
$\angle PAQ = \frac{180^o - 2\alpha}{2} = 90^o - \alpha$.
$\angle DQA = 90^o - \alpha$.

El segment $\overline{BD}$ és paral·lel a la recta PC.
$\angle BDA = \alpha$.
Siga M la intersecció de $\overline{AQ}$ i $\overline{BD}$.
$\angle DMA = 90^o$. Aleshores, M és el punt mig del segment $\overline{AQ}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QMB}$, $\overset{\Delta}{AMB}$ són iguals, aleshores:
$\overline{BQ} = \overline{AB} = b$.
Per tant, $\overline{BQ} = \overline{BR}$.

457.- Siga el rectangle ABCD. Siga E un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{DE}=2\cdot\overline{CE}$.

Siga F la intersecció dels segments $\overline{BD}$, $\overline{AE}$.

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és $12cm^2$, calculeu l'àrea del quadrilàter BCEF.

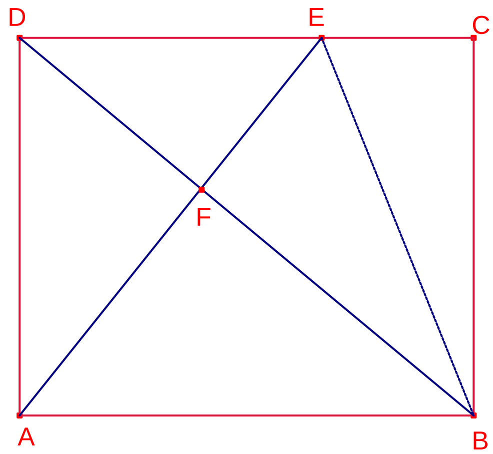


Solució:

$\overline{DE}=\frac{2}{3}\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{BAF}$ són semblants i la raó de semblança és 2:3.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AF}=\frac{3}{2}\overline{EF}$. $\overline{BF}=\frac{3}{2}\overline{DF}$.



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les base:

Els triangles $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{EFB}$ tenen la mateixa altura referides a les bases $\overline{DF}$, $\overline{BF}$, aleshores:

$S_{EFB}=\frac{3}{2}S_{EDF}=18$.

$S_{DEB}=S_{EDF}+S_{EFB}=12+18=30$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEB}$, $\overset{\Delta}{ECB}$ tenen la mateixa altura referides a les bases $\overline{DE}$, $\overline{CE}$, aleshores:

$S_{ECB}=\frac{1}{2}S_{DEB}=15$.

L'àrea del quadrilàter BCEF és:

$S_{BCEF}=S_{EFB}+S_{ECB}=18+15=33cm^2$.

Nota: també podem calcular l'àrea del rectangle ABCD.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{BAF}$ són semblants i la raó de semblança és 2:3, les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:

$S_{ABF}=\left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{DEF}=\frac{9}{4}12=27$.

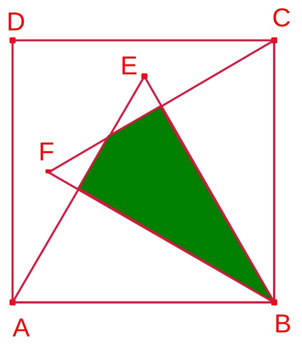
Els triangles $\overset{\Delta}{DEB}$, $\overset{\Delta}{AFD}$ tenen la mateixa altura referides a les bases $\overline{EF}$, $\overline{AF}$, aleshores:

$S_{AFD}=\frac{3}{2}S_{DEB}=18$.

L'àrea del rectangle ABCD és:

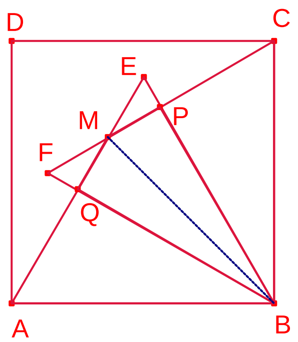
$S_{ABCD}=S_{DEF}+S_{AFD}+S_{AFB}+S_{BCEF}=12+18+27+33=90cm^2$.

458.- En el quadrat ABCD dibuixem els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCF}$.
Determineu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i la del quadrat.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ costat del quadrat.
Siga BPMQ el quadrilàter que forma la zona ombrejada.
$\angle EBC = 30^o$, $\angle FCB = 60^o$, $\angle MBC = 45^o$.
Aleshores, $\angle MPB = 90^o$, $\angle MBP = 15^o$

$$\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{a}{2},\ \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPM}$:

$$\overline{PM} = \overline{BP}\cdot tg15^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}a.$$

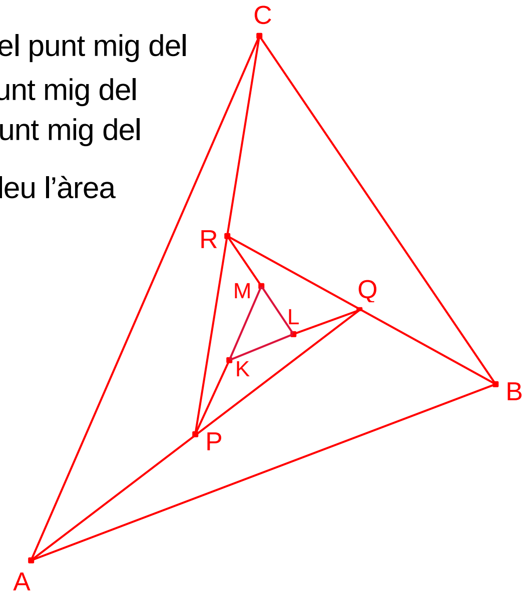
$$S_{BPMQ} = \overline{BP}\cdot\overline{PM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{2}a = \frac{3}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)a^2.$$

$$S_{ABCD} = a^2.$$

La proporció entre les àrees de la zona ombrejada BPMQ i la del quadrat ABCD és:

$$\frac{S_{BPMQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)a^2}{a^2} = \frac{3}{4}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

459.- En la figura P és el punt mig del segment $\overline{AQ}$, Q és el punt mig del segment $\overline{BR}$, R és el punt mig del segment $\overline{AP}$, K és el punt mig del segment $\overline{PM}$, L és el punt mig del segment $\overline{QK}$, M és el punt mig del segment $\overline{RL}$. Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $441cm^2$, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.
KöMaL, K314.

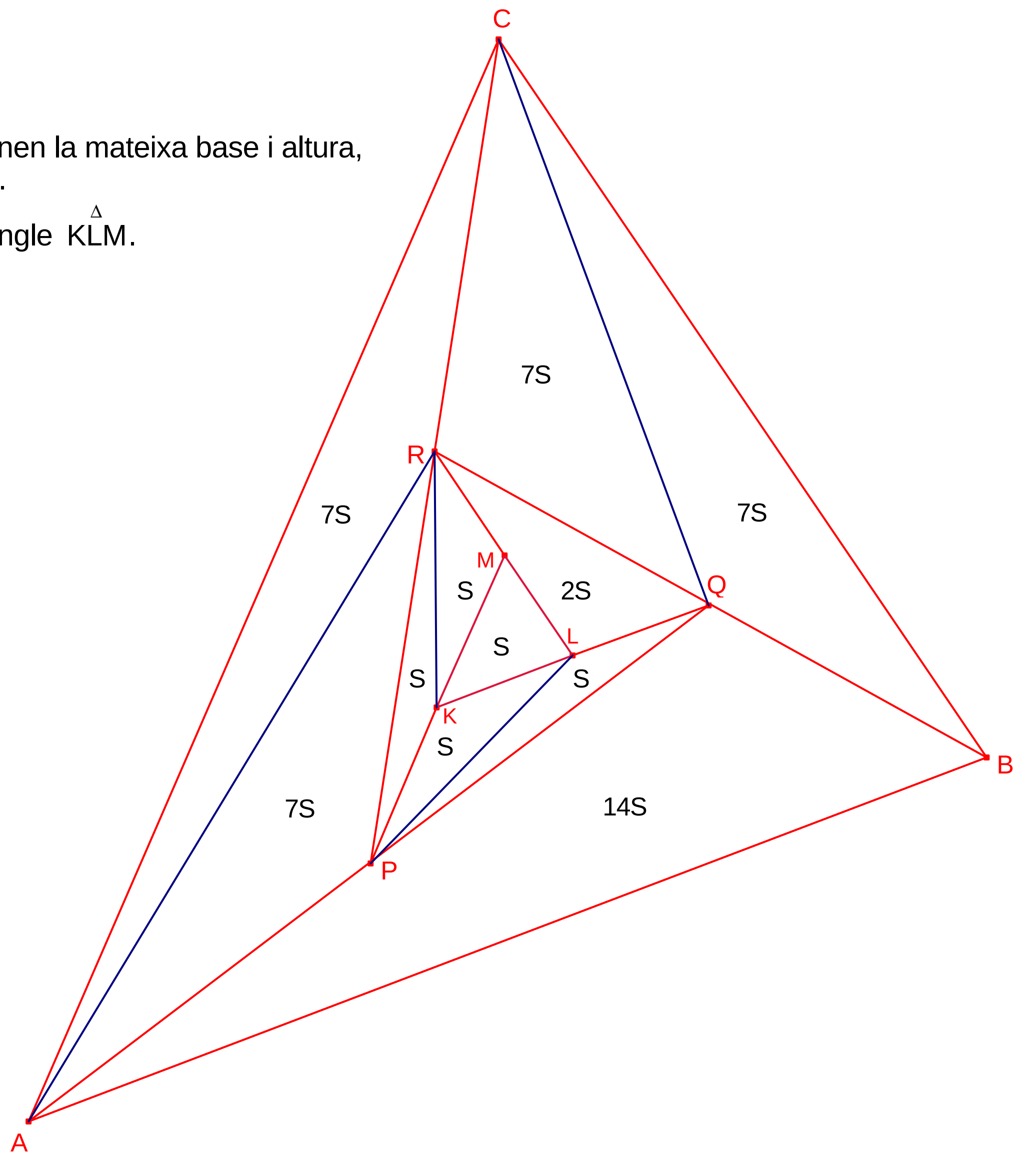


Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i altura, les àrees són iguals.

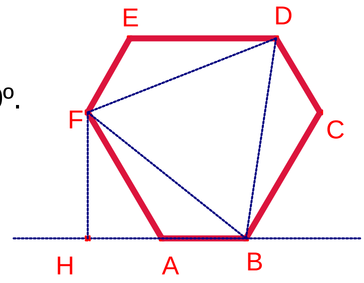
Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.

$S_{KMR} = S_{KLM} = S$.
$S_{PKR} = S_{KMR} = S$.
$S_{PKL} = S_{KLM} = S$.
$S_{PLQ} = S_{PKL} = S$.
$S_{LQR} = S_{KLR} = 2S$.
$S_{CRQ} = S_{RPQ} = 7S$.
$S_{QBC} = S_{PRQ} = 7S$.
$S_{APR} = S_{RPQ} = 7S$.
$S_{ARC} = S_{APR} = 7S$.
$S_{ABQ} = S_{AQR} = 14S$.

$S_{ABC} = 49S$.
$441 = 49S$.
Aleshores:
$S = 9cm^2$.



460.- Els angles d'un hexàgon són iguals i els costats són iguals a $\sqrt{3-\sqrt{3}}$ i $\sqrt{9-3\sqrt{3}}$, alternativament. Proveu que l'àrea de l'hexàgon és un natural.
KöMaL, C1104.



Solució:
La suma dels angles d'un hexàgon és $180^\circ(6-2)=720^\circ$.
Si tots els angles són iguals, aleshores cadascun d'ells mesura 120º.
Siga ABCDEF l'hexàgon angles iguals i costats,
$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=\sqrt{3-\sqrt{3}}$, $\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FA}=\sqrt{9-3\sqrt{3}}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{CDB}$, $\overset{\Delta}{EFA}$ són iguals, aleshores:

$\overline{BF}=\overline{BD}=\overline{DF}$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és equilàter.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual a tres vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$, més l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDF}$.

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.

Siga H el peu de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ sobre el costat $\overline{AB}$.
$\angle HAF=60^\circ$.

Aleshores, $\overline{FH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{9-3\sqrt{3}}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és:

$$S_{ABF}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{FH}}{2}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)}}{2}=\frac{3}{4}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

Calculem l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDF}$.

$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\frac{\sqrt{9-3\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\overline{BH}=\overline{AB}+\overline{AH}=\sqrt{3-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{9-3\sqrt{3}}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHF}$:

$$\overline{BF}^2=\overline{FH}^2+\overline{BH}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{9-3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{9-3\sqrt{3}}}{2}\right)^2=9-\sqrt{3}.$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDF}$ és:

$$S_{BDF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BF}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9-\sqrt{3}\right)=\frac{3}{4}\left(3\sqrt{3}-1\right).$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF}=3\cdot S_{ABF}+S_{BDF}=3\frac{3}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{4}\left(3\sqrt{3}-1\right)=6.$$

El problema també es podria resoldre amb ajut del teorema del cosinus, per calcular el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDF}$.