

### Problemes de Geometria per a l'ESO 49

481.- Siguen A, B, C tres punts alineats (en aquest ordre).

En el mateix semiplànel determinat per la recta AC dibuixem els quadrats ABDE, ACFG.

Dibuixem la recta r que passa per A i és perpendicular a BG.

Proveu que la recta divideix per la meitat el segment  $\overline{CE}$ .

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 27, problema 28.

Solució:

Siga  $\alpha = \angle AGB$ .

$\overline{AB} = \overline{AE}$ ,  $\overline{AC} = \overline{AG}$ , aleshores, els triangles rectangles  $\triangle ABG$ ,

$\triangle AEC$  són iguals.

Aleshores,  $\angle ACE = \alpha$ .

La recta r és perpendicular a BG, aleshores,

$\angle OAC = \alpha$ .

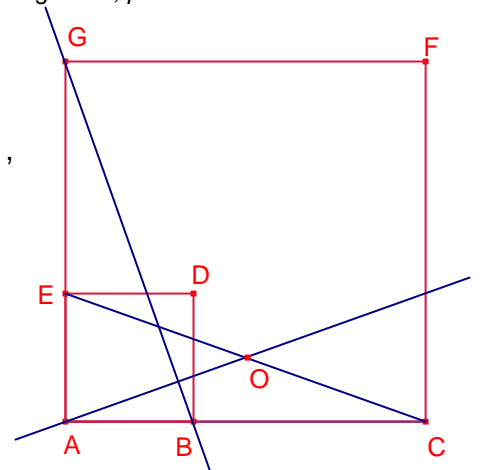
Aleshores,  $\overline{OA} = \overline{OC}$ .

$\angle AEC = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle EAO = 90^\circ - \alpha$ .

Aleshores,  $\overline{OA} = \overline{OE}$ .

Aleshores, O és el punt mig de la hipotenusa  $\overline{CE}$ .

O és el circumcentre del triangle  $\triangle AEC$ .



482.- Siga el triangle isòscele  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .

Siguen M, N dos punts de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ , respectivament, tal que  $\overline{BM} = \overline{CN} = \overline{BC}$ .

Siga D la intersecció dels segments  $\overline{BN}$ ,  $\overline{CM}$ .

Proveu que  $\angle BDC = B$ .

Siga  $x = B = C$ , angles iguals del triangle isòscele  $\triangle ABC$ .

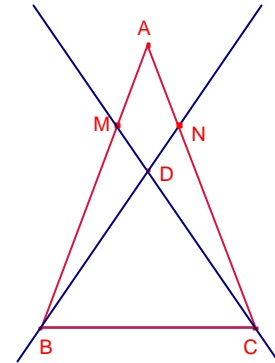
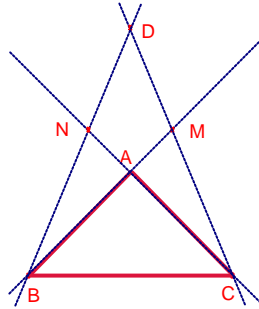
Si  $\overline{BM} = \overline{BC}$  el triangle  $\triangle BCM$  és isòscele, aleshores:

$$\angle BCM = \angle BMC = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

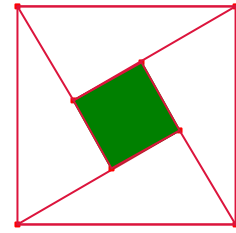
Anàlogament,  $\angle NBC = 90^\circ - \frac{x}{2}$ .

$$\angle BDC = 180^\circ - (\angle BCM + \angle NBC) = x.$$

Si  $\overline{AB} \leq \overline{BC}$  també es compleix.



483.- Per cadascun dels vèrtexs d'un quadrat dibuixem una recta en el mateix sentit i inclinació de  $30^\circ$ . Demostreu que la figura que és forma és un quadrat concèntric a l'inicial. Determineu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.  
Bruño, "Geometría. Curso Superior". Pàgina 175, problema 126.



Solució:

Siga ABCD el quadrat inicial de costat  $\overline{AB} = c$ .

Siga el quadrilàter PQRS que formen les rectes AP, BQ, CR, DS tal que  $\angle PAB = \angle QBC = \angle RCD = \angle SDA = 30^\circ$ .

Notem que  $\angle DAP = 60^\circ$ , aleshores,  $\angle APD = 90^\circ$ .

Anàlogament,  $\angle AQB = \angle CRB = \angle CSD = 90^\circ$ .

Els triangles rectangles  $\triangle ABQ$ ,  $\triangle BCR$ ,  $\triangle CDS$ ,  $\triangle DAP$  són iguals. Per tant, en el quadrilàter PQRS,  $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = 90^\circ$ .

En el triangle rectangle  $\triangle ABQ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , aleshores:

$$\overline{BQ} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{c}{2}, \quad \overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \overline{AQ} - \overline{BQ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} c.$$

$$\text{Anàlogament, } \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} c.$$

Aleshores, PQRS és un quadrat de costat  $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} c$

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Els triangles  $\triangle APO$ ,  $\triangle BQO$  són iguals ja que  $\overline{OA} = \overline{OB}$ ,  $\overline{AP} = \overline{BQ} = \frac{1}{2} c$  i

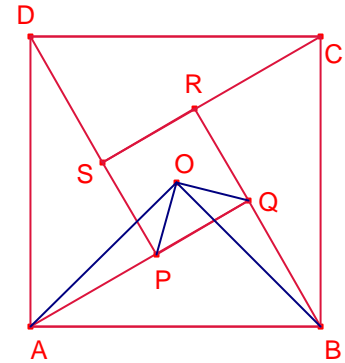
$\angle OAP = \angle OBQ = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ , aleshores:

$$\overline{OP} = \overline{OQ}.$$

Anàlogament,  $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS}$ , aleshores, O és el centre del quadrat PQRS.

Les proporció de les àrees dels quadrats és:

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} c\right)^2}{c^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$



484.- En un triangle  $\triangle ABC$ ,  $a = 7$ ,  $b = 9$  i les mitjanes referides als costats  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  són perpendiculars.

Determineu la mesura del costat  $\overline{AB}$ .  
Proposta de Vicent Chorro Monserrat.

Solució:

Siguen  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$  les mitjanes del triangle.

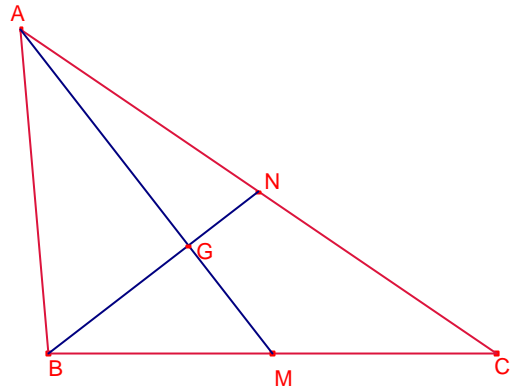
$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{7}{2}. \quad \overline{CN} = \overline{AN} = \frac{9}{2}$$

Siga  $G$  el baricentre del triangle.

Per la propietat del baricentre:

$$\overline{BG} = 2\overline{GN} = 2x.$$

$$\overline{AG} = \overline{GM} = 2y.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BMG$ :

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ANG$ :

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$5x^2 + 5y^2 = \frac{130}{4} \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{26}{4} \quad (4)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle ABG$ :

$$\overline{AB}^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) \quad (5)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (5):

$$\overline{AB}^2 = 26.$$

$$\overline{AB} = \sqrt{26}.$$

485.- Sobre el costat  $\overline{BC}$  del triangle equilàter  $\triangle ABC$  dibuixem el triangle isòsceles  $\triangle BCD$  tal que  $\angle BDC = \frac{1}{2}A$  (A, D en el mateix semiplànel que determina la recta BC).

Proveu que  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 26, problema 9.

Solució:

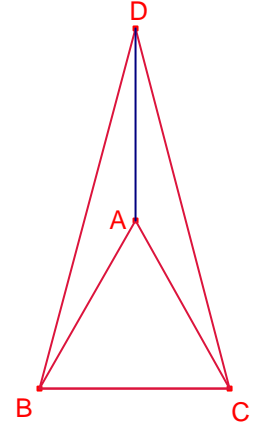
$$\angle BDC = \frac{1}{2}A = 30^\circ$$

$$\text{Per ser } \triangle BCD \text{ isòsceles, } \angle CBD = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

$$\text{Per ser } \triangle ABC \text{ isòsceles, } \angle BAC = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ.$$

$$\angle DBA = \angle CBD - \angle B = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ.$$

Aleshores, el triangle  $\triangle ABD$ , és isòsceles,  $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC}$ .



486.- Siga ABCD un quadrilàter convex amb els angles B, C majors que  $90^\circ$ .  
 Siga O el punt intersecció de les diagonals.

Considerem M en el segment  $\overline{AO}$  tal que  $\overline{BM}$  és paral·lel a  $\overline{CD}$  i N en el segment  $\overline{DO}$  tal que  $\overline{CN}$  és paral·lel a  $\overline{AB}$ .

Proveu que els triangles  $\triangle AMN$ ,  $\triangle DMN$  tenen la mateixa àrea.  
 OMA, provincial 2011, Nivell 1.

Solució:

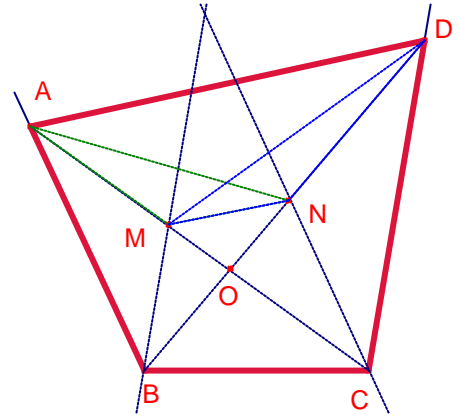
O és la intersecció de les diagonals del trapezi BCDM, aleshores, els triangles  $\triangle BOC$ ,  $\triangle DOM$  tenen la mateixa àrea.

O és la intersecció de les diagonals del trapezi ABCN, aleshores, els triangles  $\triangle BOC$ ,  $\triangle AON$  tenen la mateixa àrea.

Aleshores els triangles  $\triangle DOM$ ,  $\triangle AON$  tenen la mateixa àrea:  
 $S_{AMN} = S_{AON} - S_{MON} = S_{DOM} - S_{MON} = S_{DMN}$ .

Aleshores, els triangles  $\triangle AMN$ ,  $\triangle DMN$  tenen la mateixa àrea.

Aleshores,  $\overline{AD}$  és paral·lel a  $\overline{MN}$ .



487.- La figura ABCDEG està formada per tres quadrats iguals i el rectangle CDEF.

$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{CD}$ , O és el centre del quadrat CFGH.

El perímetre de ABCDEG és 108cm.

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

Solució:

Siga  $\overline{CD} = x$ .

El perímetre de ABCDEG és:

$$108 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EG} + \overline{GA} = 2x + 4x + x + 2x + 3x + 6x.$$

$$18x = 108.$$

$$x = 6.$$

Siga M la projecció de O sobre  $\overline{AB}$ .

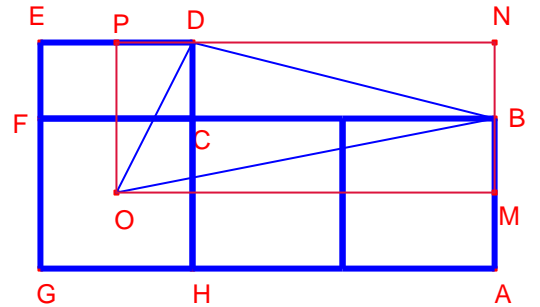
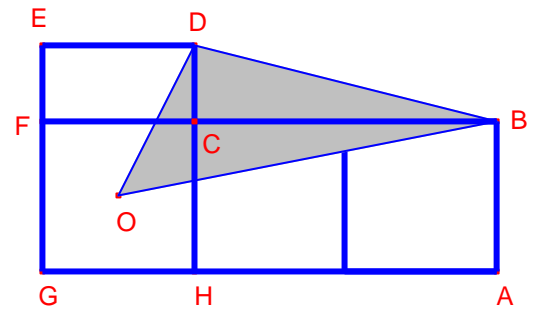
Siga P la projecció de O sobre  $\overline{DE}$ .

Siga N la intersecció de les rectes DE, AB.

OMNP és un rectangle,  $\overline{OM} = 5x$ ,  $\overline{OP} = 2x$ .

L'àrea de la zona ombrejada, que és el triangle  $\triangle OBD$ , és:

$$\begin{aligned} S_{OBD} &= S_{OMNP} - S_{OPD} - S_{OMB} - S_{BND} = \\ &= \overline{OM} \cdot \overline{OP} - \frac{\overline{PD} \cdot \overline{OP}}{2} - \frac{\overline{OM} \cdot \overline{MB}}{2} - \frac{\overline{DN} \cdot \overline{BD}}{2} = \\ &= 5x \cdot 2x - \frac{x \cdot 2x}{2} - \frac{5x \cdot x}{2} - \frac{4x \cdot x}{2} = \\ &= \frac{9}{2}x^2 = \frac{9}{2}36 = 162\text{cm}^2. \end{aligned}$$



488.- En un triangle rectangle  $\triangle ABC$  tal que  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ,  $M$  és el punt mig del costat  $\overline{BC}$ . Siga  $P$  un punt qualsevol de la mediatriu del costat  $\overline{AC}$  que pertany a l semiplànel determinat per  $\overline{BC}$  que no conté  $A$ . Les rectes  $CP$  i  $AM$  es tallen en el punt  $Q$ . Determineu l'angle que formen  $AP$  i  $BQ$ .

Solució:

Com que la hipotenusa és el costat major,

$\triangle ABC$  és rectangle, isòsceles  $\angle A = 90^\circ$ .

Siga  $N$  la intersecció de les rectes  $AP$ ,  $BQ$ .

Siga  $\alpha = \angle MPC$ , aleshores,  $\angle PAB = \alpha$ .

$\angle CMP = 135^\circ$ , aleshores,  $\angle BCQ = 45^\circ - \alpha$ .

$\angle CMQ = 90^\circ$ ,  $\overline{BM} = \overline{CM}$ , aleshores els triangles

rectangles  $\triangle CMQ$ ,  $\triangle BMQ$  són iguals, aleshores,

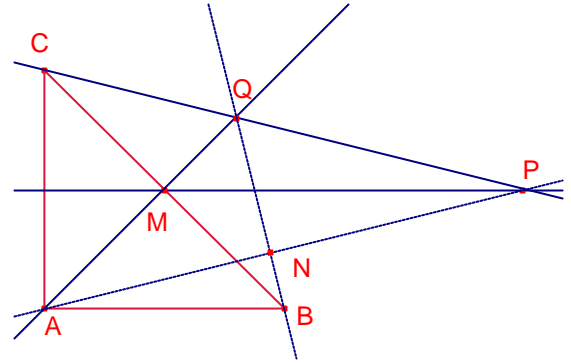
$\overline{BQ} = \overline{CQ}$ .

Per tant,  $\angle CBQ = \angle BCQ = 45^\circ - \alpha$ .

Aleshores,  $\angle ABN = \angle ABC + \angle CBQ = 90^\circ - \alpha$ .

Aleshores,  $\angle ANB = 90^\circ$ .

Per tant,  $AP$  i  $BQ$  formen un angle recte.



489.- Siga  $\triangle ABC$  un triangle isòsceles,  $C = 120^\circ$ . Siga F el punt mig de la base  $\overline{AB}$ .  
La bisectriu de l'angle  $\angle ACF$  intersecta la base  $\overline{AB}$  en el punt H.

a) Proveu que  $\overline{AH} = \overline{CH}$

b) Proveu que  $\overline{AH}$  és la tercera part del costat  $\overline{AB}$ .

*KöMaL, K323.*

Solució:

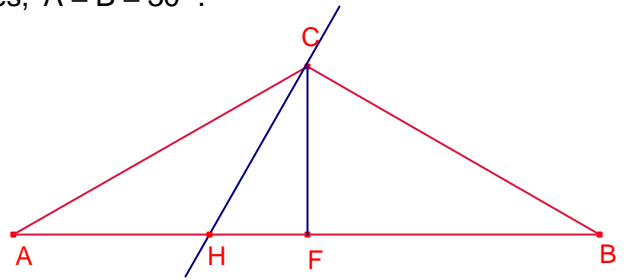
En el triangle isòsceles  $\triangle ABC$  si  $C = 120^\circ$ , aleshores,  $A = B = 30^\circ$ .

$$\angle ACF = \frac{C}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

$$\angle ACH = \frac{1}{2} \angle ACF = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ.$$

Aleshores,  $\triangle AHC$  és isòsceles, aleshores:

$$\overline{AH} = \overline{CH}.$$



$\angle HCF = 30^\circ$ , el triangle  $\triangle CHF$  és rectangle, aleshores:

$$\overline{HF} = \frac{1}{2} \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{AH}.$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AF} = 2(\overline{AH} + \overline{HF}) = 2\left(\overline{AH} + \frac{1}{2} \overline{AH}\right) = 3 \cdot \overline{AH}.$$

Aleshores,  $\overline{AH}$  és la tercera part del costat  $\overline{AB}$ .

490.- L'àrea d'un trapezi ABCD isòscele (no rectangle) és 4 es pot dividir en quatre trapezis iguals i semblants a ABCD.  
 Determineu les mesures dels angles i les cares del trapezi ABCD.  
 KöMaL, B4413.

Solució:

Siga ABCD el trapezi isòscele ABCD, dividit en 4 trapezis iguals i semblants a l'inicial.

Siga  $\alpha = A = B$ , aleshores,  $D = 180^\circ - \alpha$

Per ser DAPS i CDSR semblants a l'inicial:

$\angle ADS = \alpha$ ,  $\angle CDS = \alpha$ .

Aleshores,  $D = 2\alpha = 180^\circ - \alpha$ . Resolent l'equació:

$\alpha = 60^\circ$ .

DAPS i CDSR, PQRS són iguals aleshores:

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{PQ}$ .

Les rectes AD, BC es tallen en el punt K.

$\alpha = A = B = 60^\circ$ , aleshores, els triangles  $\triangle ABK$ ,  $\triangle DCK$  són equilàters:

$\overline{DK} = \overline{CD} = \overline{AD}$ .

Aleshores,  $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DK} = 2 \cdot \overline{AD}$ .

El trapezi ABCD és pot dividir en 12 triangles equilàters:

Si l'àrea del trapezi és 4 l'àrea de cada triangle equilàter és  $\frac{1}{3}$ .

$$S_{PEF} = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{PE}^2.$$

Resolent l'equació:

$$\overline{PE} = \frac{2}{3} \sqrt[4]{3}.$$

Aleshores:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \cdot \overline{PE} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{3}.$$

$$\overline{AB} = 4 \cdot \overline{PE} = \frac{8}{3} \sqrt[4]{3}.$$

