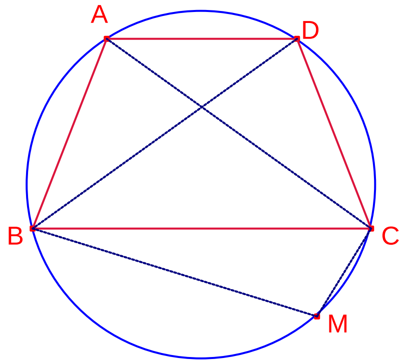
61.- Donat el trapezi isòsceles ABCD de costats paral·lels $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{AC} = \overline{BD} = b$, $\overline{BC} = c$. Siga M un punt qualsevol de l'arc BC de la circumferència circumscrita al trapezi. Calculeu $\dfrac{\overline{BM} + \overline{MC}}{\overline{AM} + \overline{MD}}$.

Shariguin I182.



Solució:

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrivible BMCD:

$a \cdot \overline{BM} + b \cdot \overline{MC} = c \cdot \overline{MD}$ (1)

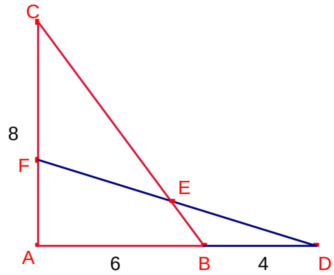
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrivible BMCA:

$b \cdot \overline{BM} + a \cdot \overline{MC} = c \cdot \overline{AM}$ (2)

Sumant les expressions (1) (2)

$(a+b)\left(\overline{BM} + \overline{MC}\right) = c\left(\overline{AM} + \overline{MD}\right)$.

Aleshores, $\dfrac{\overline{BM} + \overline{MC}}{\overline{AM} + \overline{MD}} = \dfrac{c}{a+b}$.



62.-Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura i D un punt en la prolongació del costat $\overline{AB}$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{DF}$ si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFE}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$, $\overline{BD}=4$.
García Ardura 2. prob. 765.

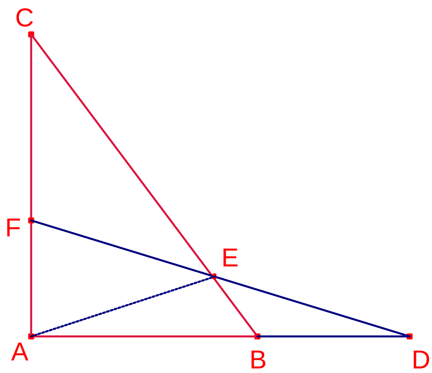
Solució:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$.

Aleshores $S_{CFE}=\frac{24}{2}=12$.

Siga $x=\overline{AF}$
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$, T l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.



Els triangle $\overset{\Delta}{AEF}$, $\overset{\Delta}{CFE}$ tenen la mateixa altura, aleshores,

$$\frac{S}{12}=\frac{x}{8-x} \qquad (1)$$

Els triangle $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ tenen la mateixa altura, aleshores,

$\frac{S_{ADE}}{T}=\frac{10}{6}$. $S_{ADE}=\frac{5}{3}T$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és $S_{ADF}=\frac{10x}{2}=5x$.

$S_{ADF}=S_{AEF}+S_{ADE}$.

$$S+\frac{5}{3}T=5x \qquad (2)$$

$S_{ABEF}=\frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{ABEF}=S_{AEF}+S_{ABE}$.

$$S+T=12 \qquad (3)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2) (3):

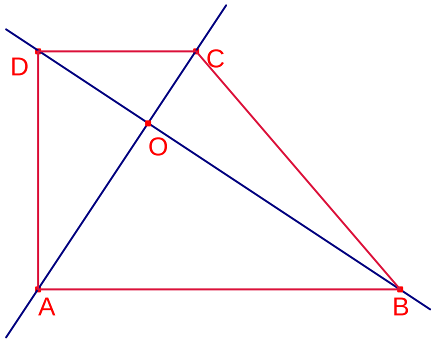
$$\begin{cases} 8S-xS-12x=0 \\ 3S+5T-15x=0 \\ S+T=12 \end{cases}.$$

La solució del qual és: $\begin{cases} x=\frac{34-2\sqrt{89}}{5} \\ S=3\sqrt{89} \\ T=33-3\sqrt{89} \end{cases}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$\overline{DF}=\sqrt{10^2+x^2}=\sqrt{10^2+\left(\frac{34-2\sqrt{89}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{4012-136\sqrt{89}}}{5}.$$

63.- Les diagonals d'un trapezi rectangle són perpendiculars. Demostreu que l'altura del trapezi és mitja geomètrica de les bases.
Gúsiev 449.



Solució:

Siga el trapezi ABCD $\overline{AB}$, paral·lel a $\overline{CD}$, $\angle DAB = 90^{o}$.
Siga O la intersecció de les diagonals.
Siga $\alpha = \angle DAC$.
Per ser les diagonals perpendiculars:
$\angle ABO = \alpha$.
Per ser $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ paral·lels:
$\angle BDC = \alpha$.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}O$, $D\overset{\Delta}{O}A$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} \qquad (1)$$

Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{O}C$, $A\overset{\Delta}{O}D$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

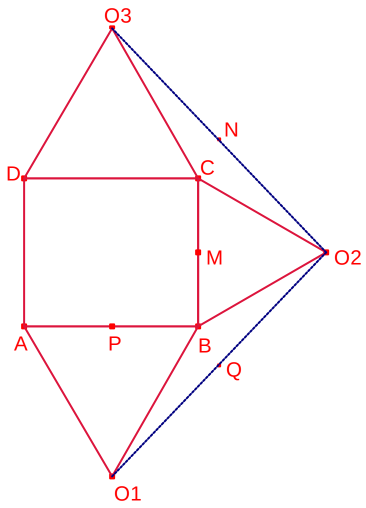
$$\frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} \qquad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{\overline{AB}\cdot\overline{CD}} = \frac{\overline{OD}\cdot\overline{OA}}{\overline{AD}^2}.$$

Aleshores, $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{AD}^2$, és a dir, l'altura del trapezi és mitjana geomètrica de les bases.

64.- En les costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ del rectangle ABCD, fora d'ell, s'han construït els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABO_1}$, $\overset{\Delta}{BCO_2}$, $\overset{\Delta}{CDO_3}$. Demostreu que les distàncies que formen els punts migs dels segments $\overline{AB}$, $\overline{O_1O_2}$ i els punts migs dels segments $\overline{BC}$, $\overline{O_2O_3}$ són iguals.
Gúsiev 470.



Solució:
Siga el rectangle ABCD amb les següents coordenades:
$A(0,0)$, $B(2a,0)$, $C(2a,2b)$, $D(0,2b)$.
Les coordenades dels vèrtex dels triangles equilàters són:
$O_1\left(a,-a\sqrt{3}\right)$, $O_2\left(2a+b\sqrt{3},b\right)$, $O_3\left(a,2b+a\sqrt{3}\right)$
Siga P el punt mig del segment $\overline{AB}$ les seues coordenades són:
$P(a,0)$
Siga Q el punt mig del segment $\overline{O_1O_2}$ les seues coordenades són:
$Q\left(\frac{3a+b\sqrt{3}}{2},\frac{b-a\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{3a+b\sqrt{3}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b-a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

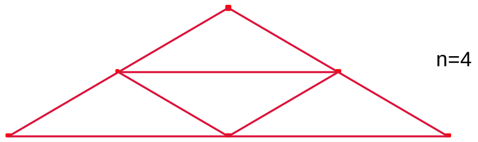
Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$ les seues coordenades són:
$M(a,b)$
Siga N el punt mig del segment $\overline{O_2O_3}$ les seues coordenades són:
$N\left(\frac{3a+b\sqrt{3}}{2},\frac{b+a\sqrt{3}}{2}\right)$.

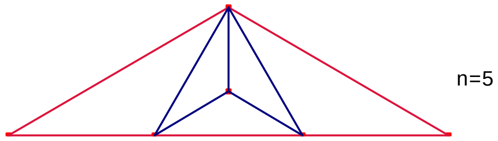
$$\overline{MN}=\sqrt{\left(\frac{3a+b\sqrt{3}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b+a\sqrt{3}}{2}-b\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

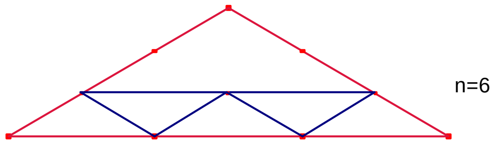
Aleshores, $\overline{PQ}=\overline{MN}$ i és igual a la meitat de la diagonal del rectangle.

65.- Proveu que un triangle isòsceles amb un angle de 120º pot ser dividit en $n \geq 4$ triangles semblants a l'original.

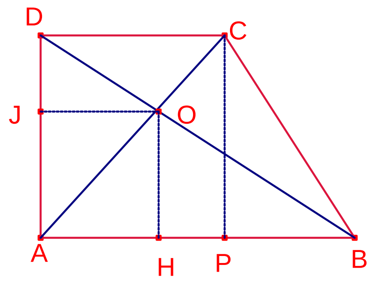
Solució:
És suficient demostrar que es poden fer les divisions per a $n = 4, 5, 6$.







66.- En un trapezi rectangle les bases paral·leles i costat lateral menor mesuren a, b, c, respectivament. Calculeu la distància de la intersecció de les diagonals a les bases i al costat lateral menor.
Gúsiev 81.



Solució:

Siga el trapezi rectangle ABCD, A=90º, $\overline{AB}$ paral·lel a $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AD}=c$.

Siga O la intersecció de les diagonals $\overline{AC}, \overline{BD}$.

Siga $x=\overline{OH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ sobre el costat $\overline{AB}$ (distància de O al costat $\overline{AB}$).

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{DOC}$ sobre el costat $\overline{CD}$ és $c-x$ (distància de O al costat $\overline{CD}$).

Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{DOC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a}=\frac{c-x}{b}$, aleshores la distància de O al costat $\overline{AB}$ és $x=\frac{ac}{a+b}$.

La distància de O al costat $\overline{CD}$ és $c-x=c-\frac{ac}{a+b}=\frac{bc}{a+b}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{AC}=\sqrt{b^2+c^2}$.

Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AHO}$, $\overset{\Delta}{APC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{c}=\frac{\overline{AO}}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Aleshores, $\overline{AO}=\frac{x\sqrt{b^2+c^2}}{c}=\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{a+b}$.

Siga $y=\overline{OJ}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ADO}$ sobre el costat $\overline{AD}$ (distància de O al costat $\overline{AD}$).

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJO}$:

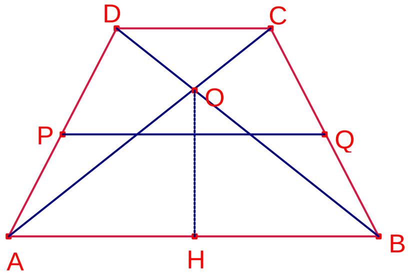
$\overline{AO}^2=y^2+x^2$.

$\frac{a^2(b^2+c^2)}{(a+b)^2}=y^2+\frac{a^2c^2}{(a+b)^2}$. Resolent l'equació en la incògnita y:

$y=\frac{ab}{a+b}$.

67.- L'altura d'un trapezi isòsceles és h i l'angle agut entre les diagonals és 2α .
Determineu la longitud de la paral·lela mitjana del trapezi.
Gúsiev 83.

Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD, $\overline{AB} = a$ paral·lel a $\overline{CD} = b$, $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Siga $\overline{PQ}$ la paral·lela mitjana del trapezi.



La paral·lela mitjana del trapezi mesura $\overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$.

Siga O la intersecció de les diagonals.
Siga H la projecció de O sobre la base $\overline{AB}$.
Siga $2\alpha = \angle AOD$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABO}$, $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$.

Siga $x = \overline{OH}$ l'altura del triangle. $\overset{\Delta}{ABO}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{DCO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{b}$. Aleshores, $a+b = \frac{a}{x}h$.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2x}h \qquad (1)$$

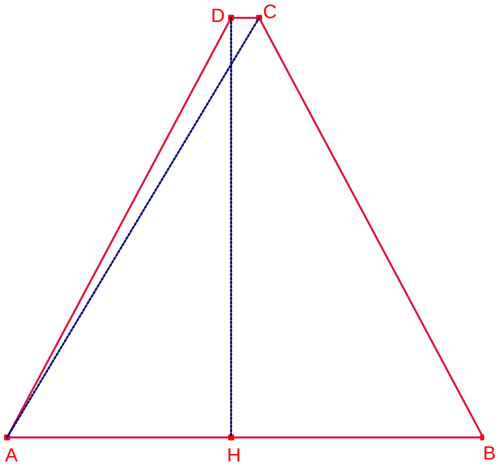
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHO}$:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{2x} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$\overline{PQ} = \frac{a+b}{2} = h \cdot \mathrm{ctg}\alpha .$$

68.- El perímetre d'un trapezi és igual a 52cm, la base menor mesura 1cm. Calculeu la seua àrea si sabem que les diagonals són bisectrius dels angles obtusos.
Gúsiev 251.



Solució:

Siga el trapezi ABCD $\overline{AB} = a$ paral·lel a $\overline{CD} = 1$.
Siga $\alpha = CAB$, aleshores, $\angle DCB = \angle ACB = \alpha$.
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, per tant, $\overline{BC} = a$.
Anàlogament, $\overline{AD} = a$, per tant el trapezi és isòsceles.
Com el perímetre és 52cm:
$1 + 3a = 52$.
Aleshores la base major és: $a = 17\text{cm}$
Siga H la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = 8\text{cm}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

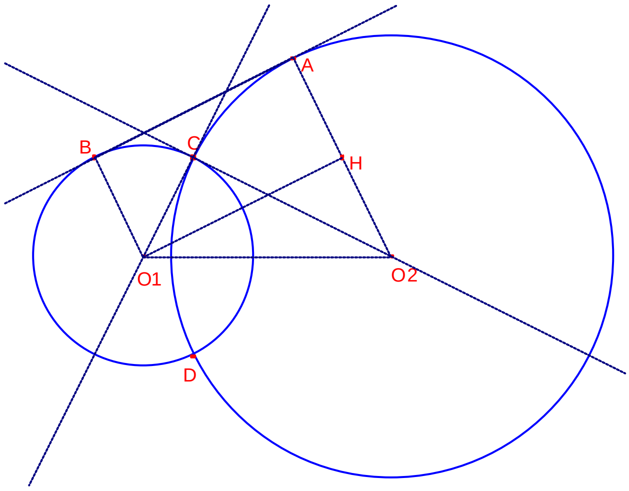
$$\overline{HD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\text{cm}.$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{HD} = \frac{17+1}{2}15 = 135\text{cm}^2.$$

69.- Dues circumferències de radis 4 i 8 cm, amb centres els punts O_1, O_2 és tallen en els punts C i D. $\overline{AB}$ és la tangent exterior. Determineu l'àrea del quadrilàter O_1BAO_2 si sabem que les tangents traçades des del punt C a les dues circumferències són perpendiculars.
Gúsiev 252.

Solució:



Notem que O_1BAO_2 és un trapezi rectangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1CO_2}$:

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

Siga H la projecció de O_1 sobre $\overline{AO_2}$.

$\overline{HO_2} = \overline{AO_2} - \overline{BO_1} = 8 - 4 = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1HO_2}$:

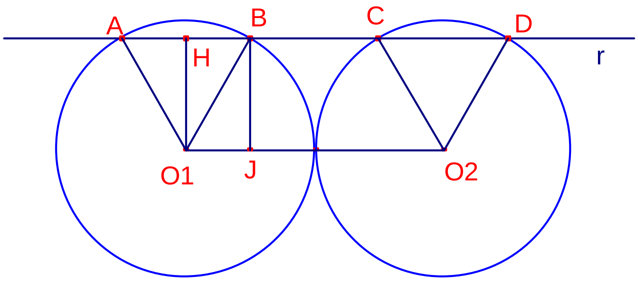
$\overline{HO_1} = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - 4^2} = 8$.

L'àrea del trapezi és:

$$S_{O_1BAO_2} = \frac{\overline{AO_2} + \overline{BO_1}}{2}\overline{HO_1} = \frac{8+4}{2}8 = 48\text{cm}^2.$$

70.- Dues circumferències iguals de radi R, i de centres els punts O_1, O_2 són tangents exteriors. La recta r intersecta les circumferències en els punts A, B, C, i D de forma que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Determineu l'àrea del quadrilàter O_1ADO_2.
Gúsiev 253.

Solució:
Si les circumferències són del mateix radi i $\overline{AB} = \overline{CD}$ la recta r és paral·lela al la recta O_1O_2.
El quadrilàter O_1ADO_2 és un trapezi isòsceles.



Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$.
Siga H la projecció de O_1 sobre $\overline{AB}$.
Siga J la projecció de B sobre O_1O_2.
Siga $h = \overline{HO_1} = \overline{JB}$.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AD} - \overline{O_1O_2}}{2} = \frac{3a - 2R}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHO_1}$:

$$R^2 - h^2 = \left(\frac{3a - 2R}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Considerem el trapezi isòsceles O_1BCO_2.

$$\overline{O_1J} = \frac{\overline{O_1O_2} - \overline{BC}}{2} = \frac{2R - a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1JB}$:

$$R^2 - h^2 = \left(\frac{2R - a}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$\left(\frac{3a - 2R}{2}\right)^2 = \left(\frac{2R - a}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita a:

$$a = R \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Aleshores, la superfície del quadrilàter O_1ADO_2 és:

$$S_{O_1ADO_2} = \frac{\overline{AD} + \overline{O_1O_2}}{2}\overline{HO_1} = \frac{3R + 3R}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{5\sqrt{3}}{4}cm^2.$$