

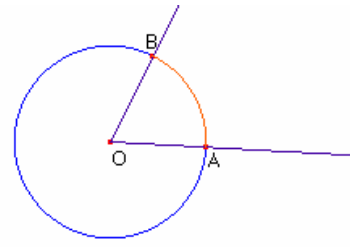
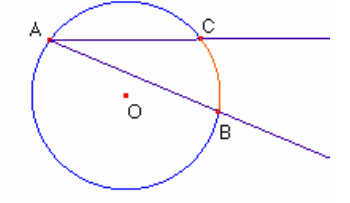
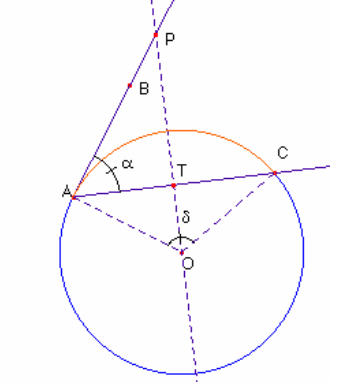
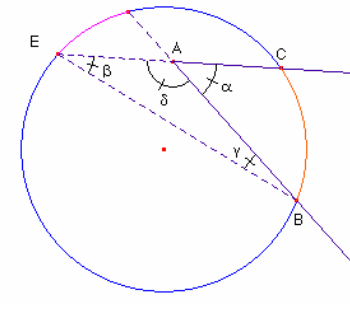
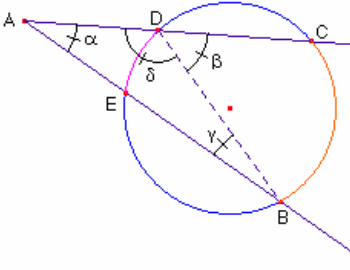
El triangle

Ricard Peiró i Estruch

A Anna i Ricard

Coneixements preliminars:

Angles de la circumferència.

Angle	Definició		Mesura
Central	S'anomena angle central $\angle AOB$, l'angle el vèrtex del qual és el centre de la circumferència i els seus costats contenen radis. El conjunt del punts de la circumferència interiors a l'angle s'anomena arc de la circumferència.		L'angle central mesura el mateix que l'arc que abraça.
Inscrit	S'anomena angle inscrit $\angle BAC$, l'angle el vèrtex del qual és un punt de la circumferència, i els costats són dues cordes de la mateixa.		L'angle inscrit d'una circumferència, mesura la meitat que l'arc que abraça.
Semiinscrit	S'anomena angle semiinscrit $\angle BAC$, l'angle el vèrtex del qual és un punt de la circumferència, un costat és una corda i l'altre costat és tangent a la circumferència.		L'angle semiinscrit mesura la meitat de l'arc de circumferència que abraça.
interior	S'anomena angle interior $\angle BAC$, l'angle el vèrtex del qual és un punt interior de la circumferència, i els costats són cordes de la circumferència.		L'angle interior mesura la semisuma dels arcs que abraça.
exterior	S'anomena angle exterior $\angle BAC$, l'angle el vèrtex del qual és un punt exterior a la circumferència, i els costats són cordes o rectes tangents de la circumferència.		L'angle exterior, mesura la semidiferència dels arcs que abraça.

Teorema de Tales

Si dues rectes secants r, s són tallades per paral·leles a, b , els segments que determinen sobre una de les secants són proporcionals als segments que determinen en l'altra secant.

$$a) \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

També s'acompleix:

$$b) \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \quad c) \frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$$

Demostració de l'apartat a) :
Dibuixem les diagonals del trapezi $AA'B'B$.

Notem que els triangles $\triangle ABA'$, $\triangle AB'A'$ tenen la mateixa àrea ja que considerant la base $\overline{AA'}$ dels dos triangles tenen la mateixa altura h ja que $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ són paral·lels.

$\text{àrea } \triangle ABA' = \text{àrea } \triangle AB'A'$
Aleshores:

$$\frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle ABA'} = \frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle AB'A'} \quad (1)$$

Considerem els triangles $\triangle ABA'$, $\triangle OAA'$

Notem que h' és:

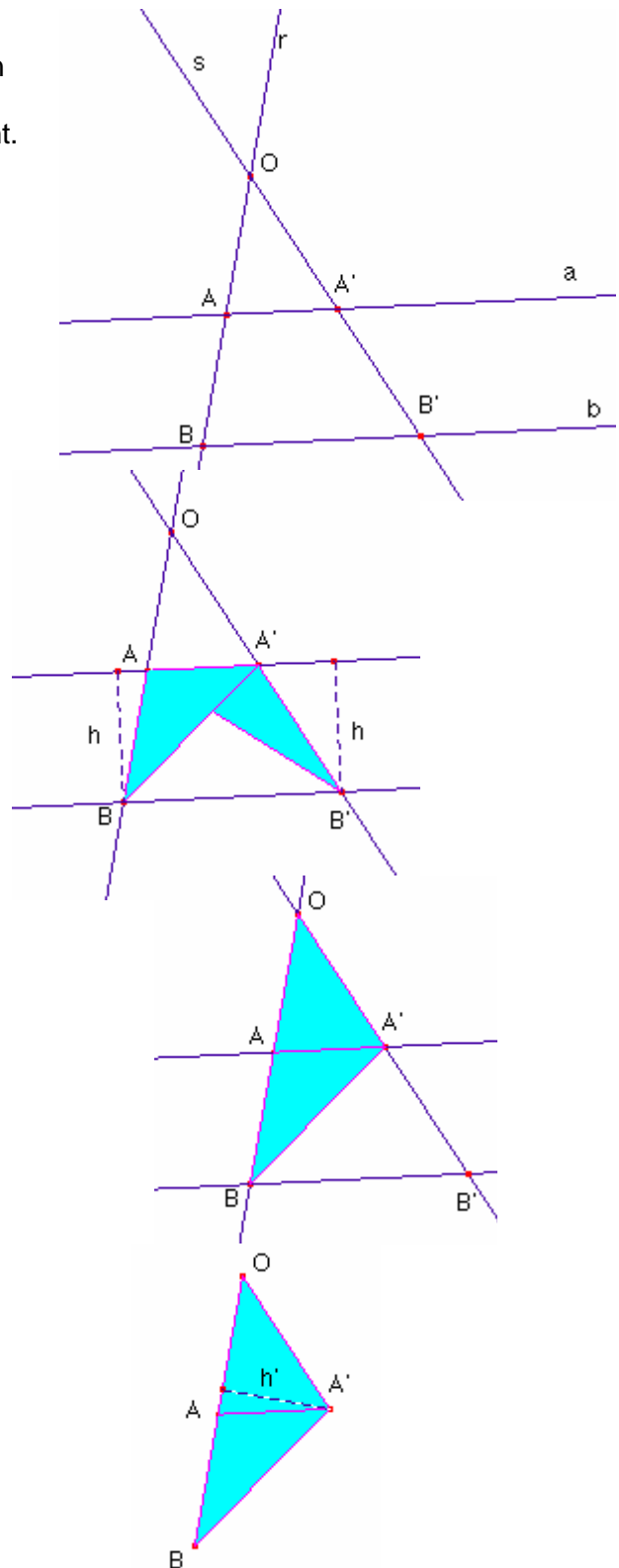
- L'altura del triangle $\triangle ABA'$ sobre el costat \overline{AB} .

- L'altura del triangle $\triangle OAA'$ sobre el costat \overline{OA} .

Aleshores:

$$\text{àrea } \triangle OAA' = \frac{\overline{OA} \cdot h'}{2} \quad \text{àrea } \triangle ABA' = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2}$$

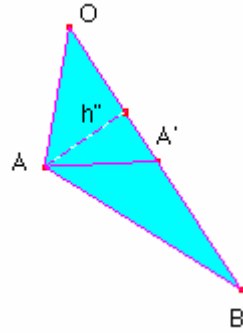
$$\text{Per tant, } \frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle ABA'} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$



Anàlogament demostrariem que:

$$\frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle A'B'A'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

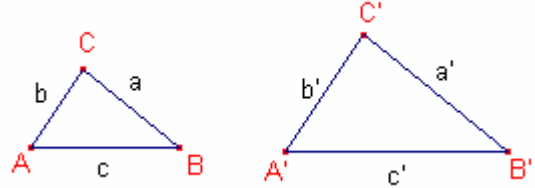
L'expressió (1) quedaria: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$



Triangles semblants.

Dos triangle $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són semblants (ho representarem per $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$) si tenen els costats corresponents iguals i els costats corresponents proporcionals.

És a dir, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ i $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



Criteris de semblança de triangles.

Siguen els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$

Criteri 1.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, aleshores, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els costats corresponents que formen l'angle proporcionals.

Criteri 2.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, aleshores, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen dos angles corresponents iguals.

Criteri 3.

És a dir, dos triangles són semblants si tenen els tres costats corresponents proporcionals.

Quadrilàters cíclics.

Una quadrilàter és cíclic si es pot inscriure en una circumferència.

Propietat:

Un quadrilàter és cíclic (inscrible en una circumferència) si i només si els seus angles oposats sumen 180°

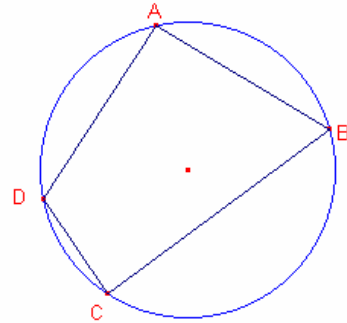
Condicció necessària.

Siga un quadrilàter cíclic ABCD.

Els arcs dels angles $\angle BAD$, $\angle BCD$ formen la circumferència.

Per ser angles inscrits mesuren la meitat dels arcs que abracen.

Per tant, la suma dels angles és $\angle BAD + \angle BCD = \frac{360^\circ}{2}$



Condicció suficient.

Suposem que el quadrilàter ABCD la suma dels angles oposats és 180° .

$$\angle CDA + \angle ABC = 180^\circ$$

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$
Provarem que C pertany a la circumferència circumscrita.

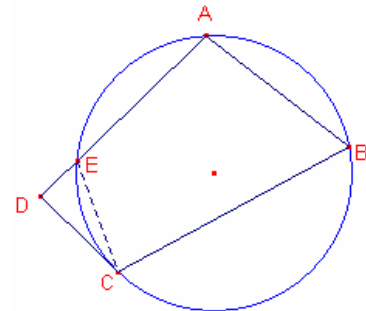
Suposem que D està en l'exterior de la circumferència

Aleshores el segment \overline{AD} , o el segment \overline{CD} talla la circumferència en un punt distint de D.

Suposem que el costat \overline{AD} talla la circumferència en el punt E.

El quadrilàter ABCE és cíclic aleshores,

$$\angle CEA + \angle ABC = 180^\circ$$



Aleshores $\angle CEA = \angle CDA$, per tant els segments $\overline{CE}, \overline{CD}$ són paral·lels, la qual cosa és absurda.

Per tant D pertany a la circumferència.

Suposem que D està en l'interior de la circumferència.

Considerem la recta que passa pels punts A, D.

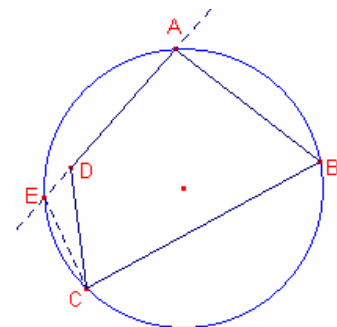
Aquesta recta talla la circumferència en el punt E.

El quadrilàter ABCE és cíclic aleshores,

$$\angle CEA + \angle ABC = 180^\circ$$

Aleshores $\angle CEA = \angle CDA$, per tant els segments $\overline{CE}, \overline{CD}$ són paral·lels, la qual cosa és absurda.

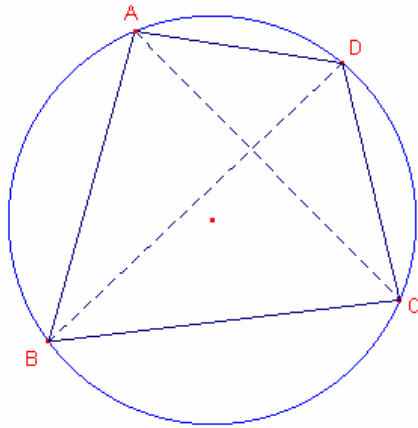
Per tant D pertany a la circumferència.



Teorema de Ptolomeu.

Un quadrilàter ABCD és cíclic (inscrit en una circumferència) si i només si la suma dels productes dels costats oposats és igual al producte de les diagonals

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

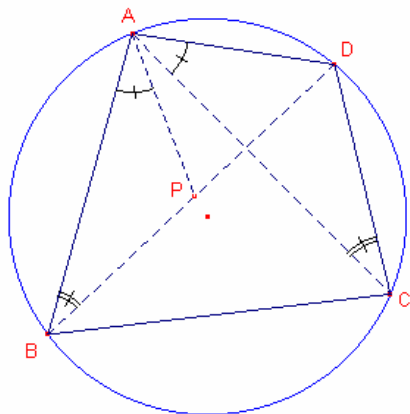


AD= 3,69 cm	AC= 6,62 cm
BC= 6,21 cm	BD= 7,10 cm
AD·BC= 22,92 cm ²	AC·BD= 47,02 cm ²
AB= 5,64 cm	
CD= 4,27 cm	
AB·CD= 24,10 cm ²	
AB·CD+AD·BC= 47,02 cm ²	

Condicció necessària:

Suposem, sense restar generalitat, que $\angle BAD \geq \angle ABD$

Siga P un punt de la diagonal BD tal que $\angle BAP = \angle CAD$



Els triangles $\triangle BAP$, $\triangle CAD$ són semblants ja que $\angle ABP = \angle ACD$, i $\angle BAP = \angle CAD$, aleshores,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CD}}, \text{ per tant, } \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle APD$ són semblants ja que,

$\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle DAC + \angle PAC = \angle PAD$, i $\angle ACB = \angle ADP$, aleshores,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{PD}}, \text{ per tant, } \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{PD} \quad (2)$$

Sumant les expressions (1), (2)

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}(\overline{BP} + \overline{PD}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Condicció suficient:

Siga un quadrilàter ABCD que satisfà la igualtat $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

Siga un punt P' tal que $\angle BAP' = \angle CAD$, $\angle ABP' = \angle ACD$

Els triangles $\triangle BAP'$, $\triangle CAD$ són semblants

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP'}}{\overline{CD}}, \text{ per tant, } \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BP'} \quad (3)$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AP'D$ són semblants

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{P'D}}, \text{ per tant, } \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{P'D} \quad (4)$$

Sumant les expressions (3), (4)

$$\overline{AC}(\overline{BP'} + \overline{P'D}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Per hipòtesi $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

Aleshores:

$\overline{BP'} + \overline{P'D} = \overline{BD}$, per tant P' pertany a la diagonal \overline{BD}

$\angle ABD = \angle ABP' = \angle ACD$, per tant C pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABD$.

Potència d'un punt respecte d'una circumferència.

Teorema:

Siga la circumferència C de centre O. Siga P un punt qualsevol del plànel.

Siga la recta r que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts A, A'.

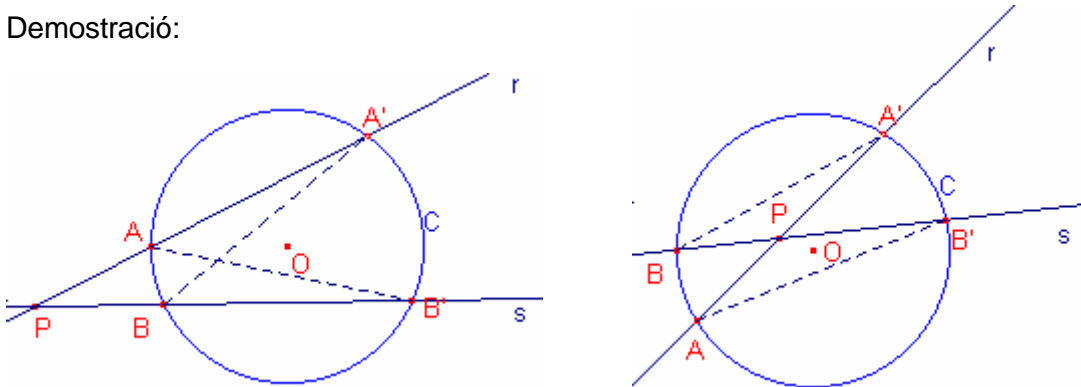
Siga la recta s que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts B, B'.

Aleshores: $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = k$, a aquesta constant s'anomena **potència del punt P respecte de la circumferència C**.

Si P és exterior a la circumferència C tenim que: $k = d^2 - r^2$, on $d = \overline{PO}$, $r =$ radi de la circumferència.

Si P és interior a la circumferència C tenim que: $k = r^2 - d^2$.

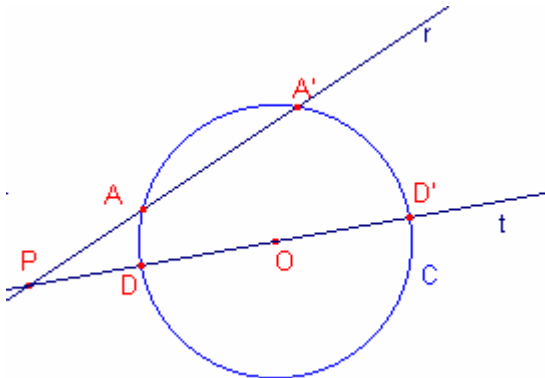
Demostració:



En les dues figures, els triangles $\triangle PAB'$, $\triangle PBA'$ són semblants, aleshores:

$$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB}} \text{ per tant, } \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$$

Si P és exterior a la circumferència:



Considerem la recta t que passa pels punts P, O, que talla la circumferència C en els punts D, D'. Per la propietat anterior: $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PD} \cdot \overline{PD'}$

Siguen: $\overline{PO} = d$, $\overline{OD} = r$

$$\overline{PD} \cdot \overline{PD'} = (\overline{PO} - \overline{OD}) \cdot (\overline{PO} + \overline{OD'}) = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2,$$

Aleshores, $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = d^2 - r^2$

Anàlogament si P és interior a la circumferència $k = r^2 - d^2$

Teorema de Pitàgores

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$
d'hipotenusa a i catets b, c

Aleshores, $a^2 = b^2 + c^2$

Demostració:

Considerem els 2 quadrats següents :
de costat $b + c$.

Els dos quadrats són iguals, per tant,
tenen la mateixa àrea.

El primer quadrat la seua àrea és:

$$S = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

El segon quadrat l'hem descompost
en 4 triangles rectangles iguals i de
catets b, c i hipotenusa a , i un quadrat
de costat a . La seua àrea és la suma de
les àrees dels 4 triangles i la del quadrat,

$$S = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + a^2$$

Igualant les àrees,

$$b^2 + c^2 + 2bc = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + a^2$$

Simplificant podem concloure que, $a^2 = b^2 + c^2$

El teorema de Pitàgores també es pot enunciar de la forma següent:

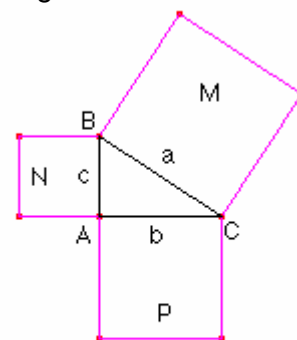
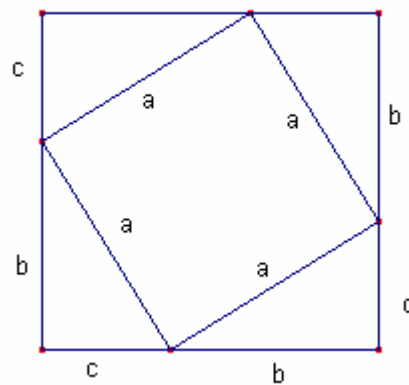
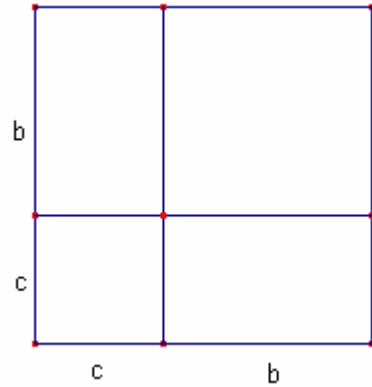
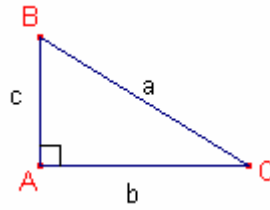
El quadrat construït sobre la hipotenusa d'un triangle
rectangle té la mateixa àrea que la suma de les àrees
dels quadrats construïts sobre els catets:

$$\text{àrea } M = a^2$$

$$\text{àrea } P = b^2$$

$$\text{àrea } N = c^2$$

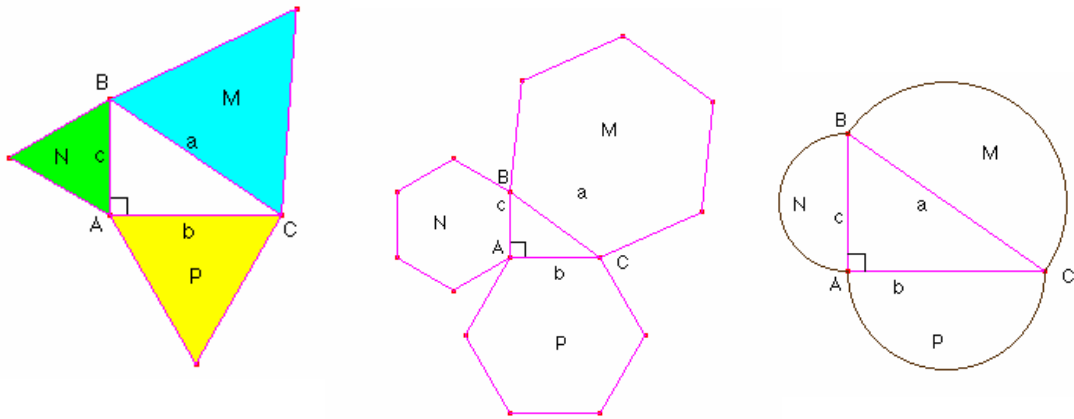
$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$\text{àrea } M = \text{àrea } P + \text{àrea } N$$

Generalització del teorema de Pitàgores:

L'àrea de la figura construïda sobre la hipotenusa és la mateixa que la suma de les àrees de les figures semblants construïdes sobre els catets.



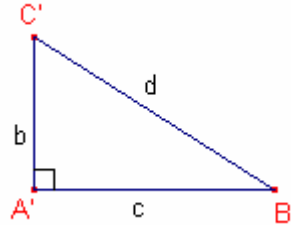
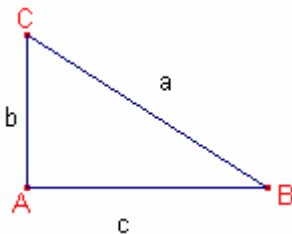
$$\text{àrea M} = \text{àrea N} + \text{àrea P}$$

Teorema invers del teorema de Pitàgores:

Siga un triangle $\triangle ABC$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$

Aleshores el triangle $\triangle ABC$ és rectangle i l'angle $\angle BAC = 90^\circ$

Demostració:



Construïm el triangle rectangle $\triangle A'B'C'$ de catets b, c que tindrà hipotenusa d

Pel teorema de Pitàgores: $d^2 = b^2 + c^2$

Per hipòtesi $a^2 = b^2 + c^2$

Aleshores, $a = d$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tenen els costats corresponents iguals per tant són iguals.

Aleshores $\angle BAC = \angle B'A'C' = 90^\circ$

Teorema de l'altura i del catet en un triangle rectangle.

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$

Siga l'altura $h = \overline{AH}$ sobre la hipotenusa.

Siga $m = \overline{BH}$ la projecció del catet c sobre la hipotenusa.

Siga $n = \overline{HC}$ la projecció del catet b sobre la hipotenusa.

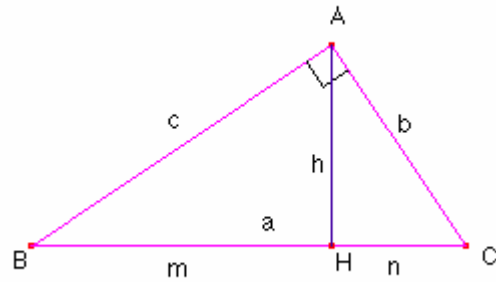
Aleshores,

a) $h^2 = m \cdot n$ **Teorema de l'altura.**

b) $b^2 = n \cdot a$ **Teorema del catet.**

c) $c^2 = m \cdot a$ **Teorema del catet.**

Demostració:



a)

Els triangles $\triangle ABH$ i $\triangle ACH$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

b)

Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ACH$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = n \cdot a$$

c)

Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle ABH$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = m \cdot a$$

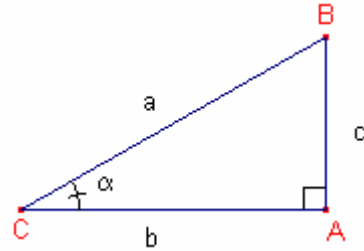
Nota: Sumant les igualtats b) i c) ens dóna una demostració del teorema de Pitàgores.

Raons trigonomètriques d'un angle agut.

Considerarem el triangle rectangle $\triangle ABC$ on $A = 90^\circ$

Recordem que en qualsevol triangle rectangle es complia el teorema de Pitàgores:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Siga $\alpha = \angle BCA$

Definim sinus de l'angle α i ho representem per $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim cosinus de l'angle α i ho representem per $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim tangent de l'angle α i ho representem per $\text{tg } \alpha$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

Nota: Pel teorema de Tales, les raons trigonomètriques de l'angle α no depenen del triangle rectangle escollit.

Relacions fonamentals entre les raons trigonomètriques.

Donat un angle α es compleixen les següents relacions:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Raons trigonomètriques dels angles $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \text{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \text{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \end{aligned}$$

Raons trigonomètriques de l'angle doble. 2α .

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \text{tg} 2\alpha &= \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Raons trigonomètriques de l'angle meitat $\frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}\end{aligned}$$

Nota: El signe de les raons trigonomètriques de l'angle meitat depenen del quadrant on es trobe l'angle $\frac{\alpha}{2}$

Transformacions de sumes de cosinus (sinus) en productes.

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

Transformacions de productes de cosinus-sinus en sumes i diferències.

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{-1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))\end{aligned}$$

Teorema dels sinus

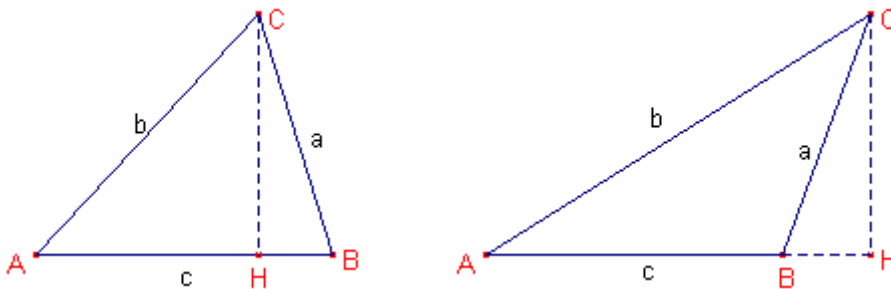
Els costats d'un triangle són proporcionals als sinus dels angles oposats:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Demostració:

Considerem qualssevol dels triangles $\triangle ABC$.

Tracem als triangles $\triangle ABC$ l'altura corresponent al vèrtex C.



$$\begin{cases} \overline{HC} = b \cdot \sin A \\ \overline{HC} = a \cdot \sin B \end{cases} \Rightarrow b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Anàlogament si tracem l'altura corresponent al vèrtex A obtindriem:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del cosinus.

Siga el triangle $\triangle ABC$. Es compleixen les següents igualtats.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Demostració:

Considerarem tres casos:

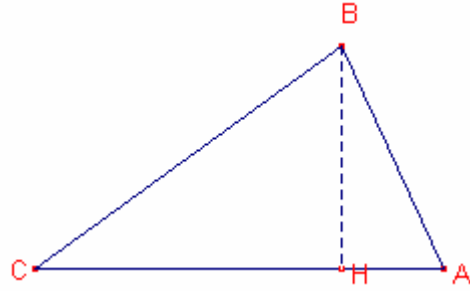
- 1.- L'angle A recte.
- 2.- L'angle A agut.
- 3.- L'angle A obtús.

- 1.- És l'enunciat del teorema de Pitàgores.

2.-

Tracem al triangle $\triangle ABC$ l'altura corresponent al vèrtex B.

El triangle $\triangle CHB$ és rectangle.
Pel teorema de Pitàgores,



$$a^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2 + (b - \overline{HA})^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 - 2b \cdot \overline{HA} \quad (1)$$

El triangle $\triangle HAB$ és rectangle.

Pel teorema de Pitàgores $\overline{BA}^2 + \overline{HA}^2 = c^2$

$$\cos A = \frac{\overline{HA}}{c} \Rightarrow \overline{HA} = c \cdot \cos A$$

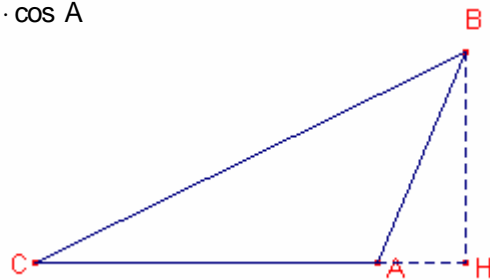
Substituint en (1)

$$a^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 - 2b \cdot \overline{HA} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

3.-

Tracem al triangle $\triangle ABC$ l'altura corresponent al vèrtex B.

El triangle $\triangle CHB$ és rectangle.



Pel teorema de Pitàgores:

$$a^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2 + (b + \overline{HA})^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 + 2b \cdot \overline{HA} \quad (1)$$

El triangle $\triangle HAB$ és rectangle.

Pel teorema de Pitàgores $\overline{BA}^2 + \overline{HA}^2 = c^2$

$$\cos(180^\circ - A) = \frac{\overline{HA}}{c} \Rightarrow \overline{HA} = -c \cdot \cos A$$

Substituint en (1)

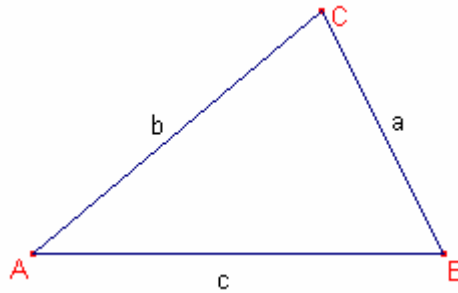
$$a^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 + 2b \cdot \overline{HA} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Anàlogament es demostren les altres dues igualtats de l'enunciat del teorema.

Teorema de la tangent (Viète)

Siga el triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Aleshores, } \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$



Demostració:

Utilitzarem el teorema dels sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ i les transformacions de productes en sumes:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

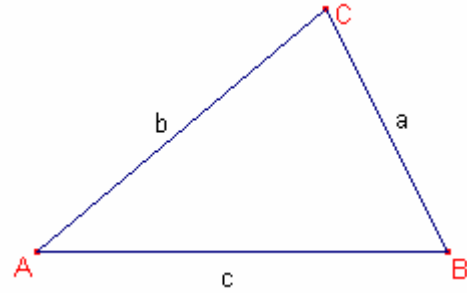
$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} &= \frac{\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sin A + \sin B)}{\frac{1}{2}(\sin A - \sin B)} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \\ &= \frac{\frac{a \cdot \sin B}{b} + \sin B}{\frac{a \cdot \sin B}{b} - \sin B} = \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

TRIANGLES.

Un triangle $\triangle ABC$ és la figura geomètrica del pla formada per 3 segments anomenats costats els extrems dels quals es tallen 2 a 2 en 3 punts anomenats vèrtexs.

Els vèrtexs s'escriuen en lletres majúscules i el costat oposat al vèrtex en la mateixa lletra minúscula.



Igualtat de triangles:

Dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals si els costats i els angles corresponents són iguals.

Criteris d'igualtat de triangles.

Criteri 1.

Dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals si $\hat{A} = \hat{A}'$, $b = b'$, $c = c'$, és a dir, dos triangles són iguals si tenen iguals dos costats i l'angle comprés entre ells.

Criteri 2.

Dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals si $c = c'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, és a dir, dos triangles són iguals si tenen igual un costat i els angles continguts.

Criteri 3.

Dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, és a dir, dos triangles són iguals si tenen iguals els costats corresponents.

Criteri 4.

Dos triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ són iguals si $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $\hat{A} = \hat{A}'$, és a dir, dos triangles són iguals si tenen iguals dos costats i iguals l'angle oposat al major d'ells.

Classificació dels triangles:

Segons els costats:

Equilàter: Té els 3 costats són iguals.

Isòsceles: Té 2 costats iguals.

Escalè: Té els tres costats desiguals.

Segons els angles:

Acutangle: Té els 3 angles aguts.

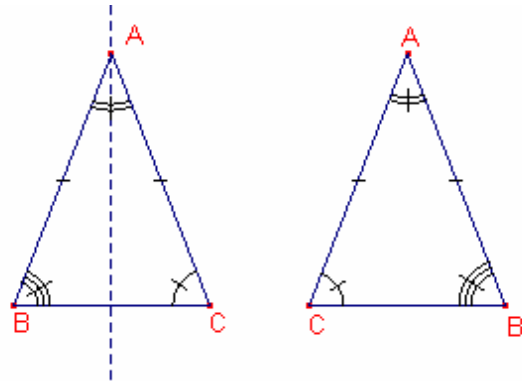
Rectangle: Té un angle recte i els altres aguts.

Obtusangle: Té un angle obtús i els altres aguts.

Propietats

a) Si un triangle $\triangle ABC$ té dos costats iguals $\overline{AB} = \overline{AC}$, els seus angles oposats són iguals.

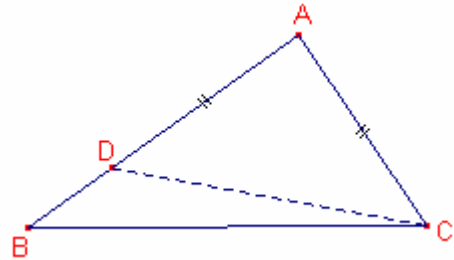
Considerem el triangle $\triangle ABC$ i el triangle $\triangle ACB$ que resulta de la simetria del triangle $\triangle ABC$ respecte de la bisectriu de l'angle $\angle BAC$.
Els dos triangles tenen dos costats iguals i l'angle que formen igual. Per tant són iguals, aleshores $\angle ABC = \angle ACB$.



b) En un triangle $\triangle ABC$, a major costat s'oposa major angle.
Hem de provar que si $\overline{AB} > \overline{AC}$, aleshores $\hat{C} > \hat{B}$.

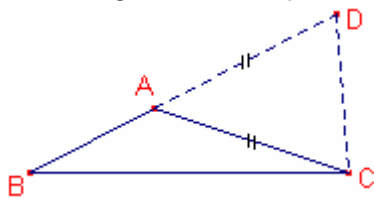
Siga el punt D sobre el costat \overline{AB} tal que $\overline{AC} = \overline{AD}$.

Com el triangle $\triangle ADC$ és isòsceles $\angle ADC = \angle ACD$
Com $\hat{C} > \angle ACD$ i $\angle ADC > \hat{B}$, aleshores, $\hat{C} > \hat{B}$.



1.- La suma de dos costats és major que l'altre costat.

Siga el triangle $\triangle ABC$ i suposem que $a = \overline{BC}$ és el costat major.



Hem de provar que $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$

Prolonguem el costat \overline{AB} i en la prolongació construïm el segment \overline{AD} , tal que $\overline{AC} = \overline{AD}$ (el triangle $\triangle ADC$ és isòsceles), aleshores $\angle ACD = \angle ADC$.

$\angle BCD > \angle ACD = \angle ADC$

Com que l'angle major s'oposa major angle, temin que:

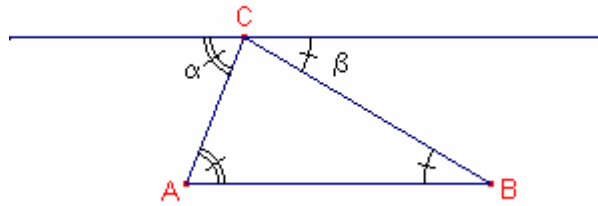
$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

2.- La suma dels angles d'un triangle mesura 180° .

Considerem la recta paral·lela al costat \overline{AB} que passa per C
Aleshores $\alpha + \hat{C} + \beta = 180^\circ$

$\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, per ser angles alterns-interns sobre costats paral·lels.

Per tant, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



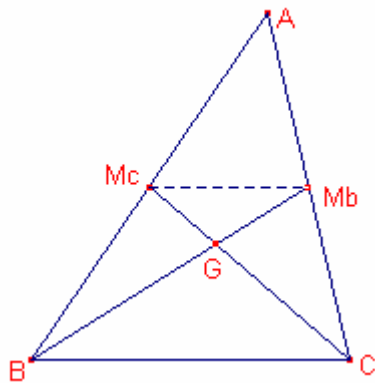
ALTRES ELEMENTS D'UN TRIANGLE:

Mitjanes i baricentre.

La **mitjana**: És el segment que uneix un vèrtex i el punt mig del costat oposat al vèrtex.

Propietat:

Les 3 mitjanes d'un triangle es creuen en un punt G anomenat **baricentre** o centre de gravetat del triangle.



Siguen les mitjanes $\overline{BM_b}$, $\overline{CM_c}$ que es tallen en el punt G.

$\overline{M_bM_c}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABC$.

Aleshores els triangles $\triangle ABC$, $\triangle AM_bM_c$ són semblants i $\overline{M_bM_c} = \frac{a}{2}$

Els triangles $\triangle GM_bM_c$, $\triangle GBC$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$

Aleshores $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_b}$, $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}$, o bé, $\overline{BM_b} = 3 \cdot \overline{GM_b}$, $\overline{CM_c} = 3 \cdot \overline{GM_c}$
Aleshores

Siga G' el punt d'intersecció de les mitjanes corresponents als vèrtexs A i B

$\overline{BM_b} = 3 \cdot \overline{G'M_b}$, $\overline{AM_a} = 3 \cdot \overline{G'M_a}$

$\overline{GM_b} = \overline{G'M_b}$, aleshores $G=G'$

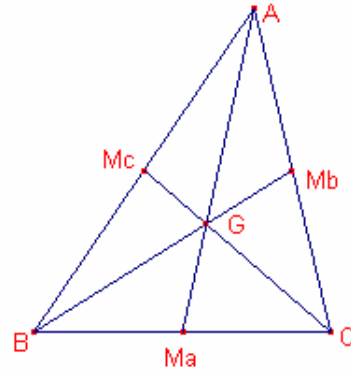
Propietat del baricentre d'un triangle:

Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga G el baricentre del triangle, aleshores

$$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}, \quad \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_A}, \quad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_B}$$

El baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

Demostració: veure el teorema anterior.



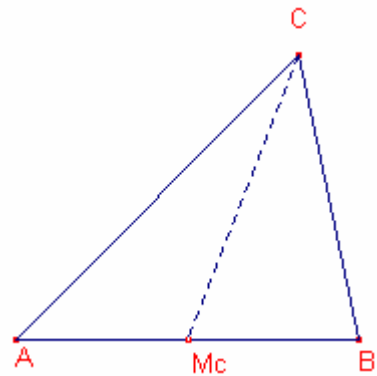
Propietat: la mesura de les mitjanes:

La mitjana sobre el vèrtex A mesura $m_A = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$

La mitjana sobre el vèrtex B mesura $m_B = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$

La mitjana sobre el vèrtex C mesura $m_C = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

Demostració:



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad -2bc \cdot \cos A = a^2 - b^2 - c^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AM_cC$

$$m_C^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - bc \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad -2bc \cdot \cos A = 2m_C^2 - 2b^2 - \frac{c^2}{2} \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2)

$$a^2 - b^2 - c^2 = 2m_C^2 - 2b^2 - \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_C^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

Aleshores, $m_C = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

Anàlogament, demostrariem la mesura de les altres mitjanes.

Mediatris i circumcentre.

La **mediatriu**: és la recta que passa pel punt mig de cada costat i és perpendicular al costat.

Propietat:

Les 3 mediatris d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **circumcentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència circumscrita al triangle.

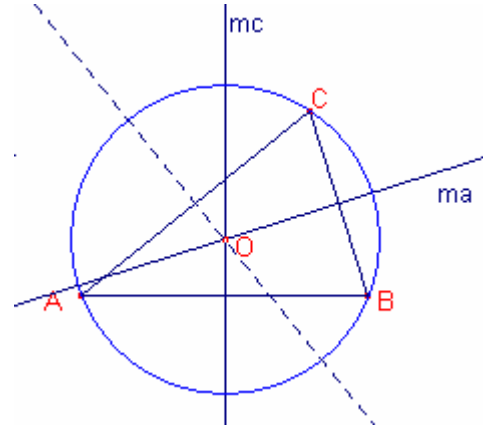
Demostració:

Siguin m_a, m_c les mediatris que es tallen en el punt O, aleshores:

$$\overline{OB} = \overline{OC}, \quad \overline{OA} = \overline{OB}$$

Per tant, $\overline{OA} = \overline{OC}$, és a dir, O pertany a la mediatriu del segment \overline{AC} .

També O equidista dels vèrtexs A, B, C, aleshores, és el centre de la circumferència que passa pels tres vèrtexs.



Càlcul del diàmetre del cercle circumscrit a un triangle.

El diàmetre de la circumferència circumscrita és igual a la constant de la proporció del teorema dels sinus.

Considerem el triangle $\triangle ABC$.

Considerem el cercle circumscrit al triangle.

Tracem el diàmetre \overline{AD} i la corda \overline{DC} .

Considerem el triangle $\triangle ADC$.

Per ser B, D angles inscrits a la circumferència, i abraçen el mateix arc tenim que $B = D$.

Siga l'angle $\alpha = \angle ACD$.

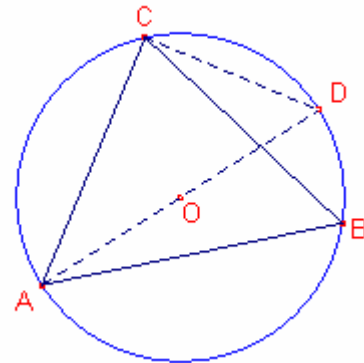
L'angle $\alpha = 90^\circ$, perquè un angle inscrit en la circumferència mesura la meitat de l'arc que abraça.

$$\text{Per tant, } b = \overline{AD} \cdot \sin D = \overline{AD} \cdot \sin B$$

$$\text{Aleshores, el diàmetre } \overline{AD} = \frac{b}{\sin B}$$

És a dir, el diàmetre d'un cercle circumscrit a un triangle és igual a la raó de proporcionalitat del teorema dels sinus.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Bisectrius i incentre.

La **bisectriu**: És la recta que passa pel vèrtex que formen dos costats i divideix per la meitat a l'angle que formen els mateixos costats.

Propietat:

Les 3 bisectrius d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **incentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència inscrita al triangle.

Demostració:

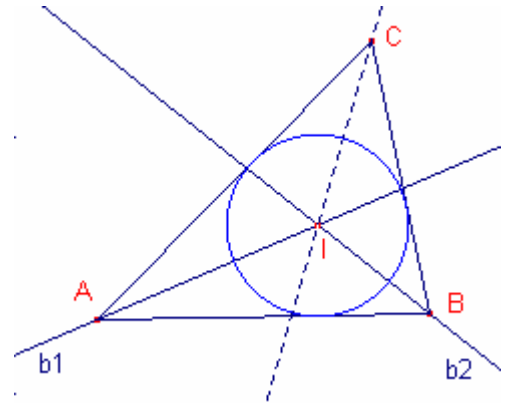
Siguen b_1, b_2 les bisectrius corresponents als vèrtexs A, B, les quals es tallen en el punt I.

El punt I equidista dels costats b, c.

El punt I equidista dels costats a, c.

Aleshores el punt I equidista dels costats a, c. Per tant el punt I pertany a la bisectriu corresponent al vèrtex C.

El punt I equidista dels tres costats, aquesta distància serà el radi de la circumferència tangent als costats.



Nota: si la distància del centre d'una circumferència a una recta és igual al radi la recta és tangent a la circumferència.

Propietat de la bisectriu d'un triangle:

Siga el triangle $\triangle ABC$ considerem el punt P intersecció de la bisectriu de l'angle $\angle ACB$ amb el costat \overline{AB} .

$$\text{Aleshores: } \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PB}}$$

La bisectriu d'un angle d'un triangle $\triangle ABC$ divideix al costat oposat en parts proporcionals als costats adjacents.

Demostració:

Siga $\angle ACP = \angle PCB = \alpha$

S'observa que els angles:

$$\angle CPB = 180^\circ - (B + \alpha), \quad \angle CPA = B + \alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CPB$:

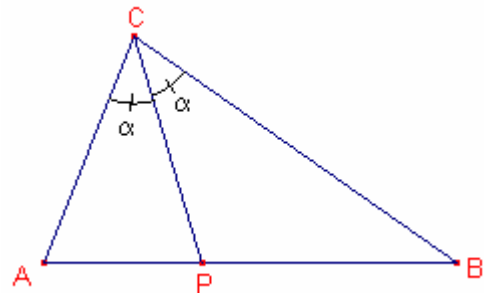
$$\frac{\overline{PB}}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - (C + \alpha))} \Rightarrow \frac{\sin(C + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{a}{\overline{PB}} \quad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle APC$

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(C + \alpha)} \Rightarrow \frac{\sin(C + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b}{\overline{AP}} \quad (2)$$

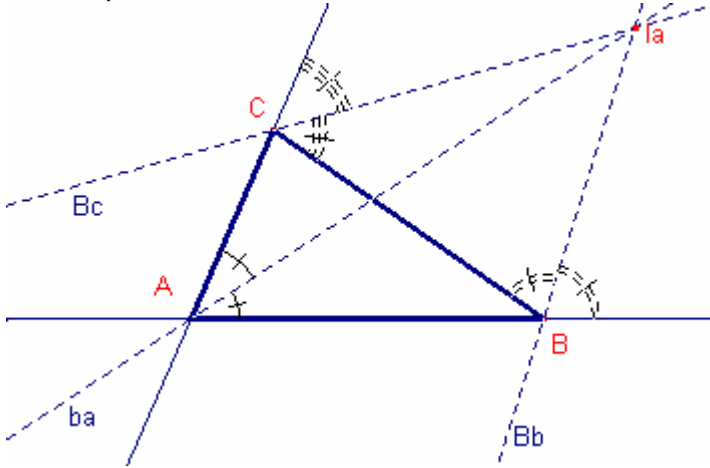
De les igualtats (1), (2) tenim:

$$\frac{c}{\overline{AP}} = \frac{b}{\overline{PB}}$$

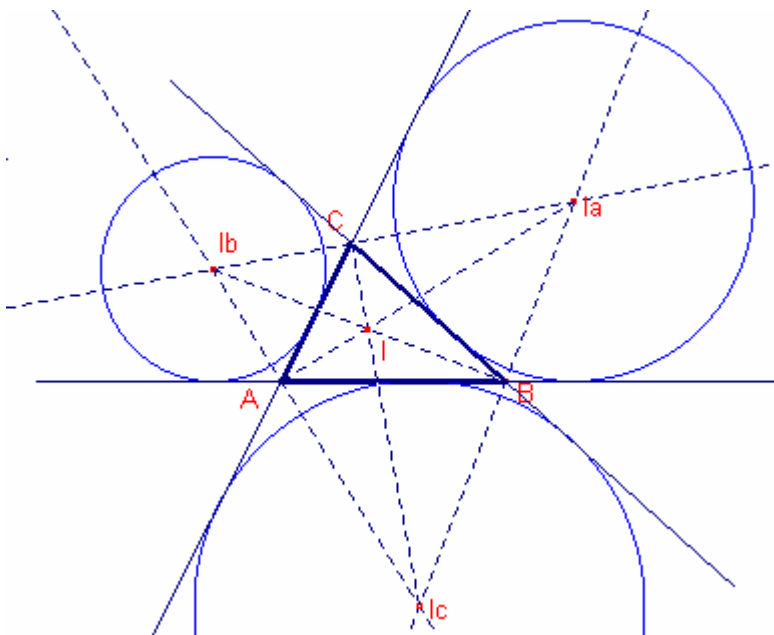


Circumferències exinscrites.

Considerem b_a la bisectriu de l'angle A, B_b la bisectriu de l'angle exterior de B i B_c la bisectriu de l'angle exterior de C. Les tres bisectrius s'intersecten en un punt I_a (exincentre de a) que equidista de les rectes que formen els costats.



Anàlogament aconseguiríem els altres exincentres I_b, I_c . Les tres circumferències tangents als costats i exteriors al triangle s'anomenen circumferències exinscrites.



Propietat:

El triangle format pels incentres I_a, I_b, I_c té per altures les bisectrius del triangle $\triangle ABC$.

Demostració:

Notem que les bisectrius exteriors a un vèrtex i la bisectriu interior formen 90° .

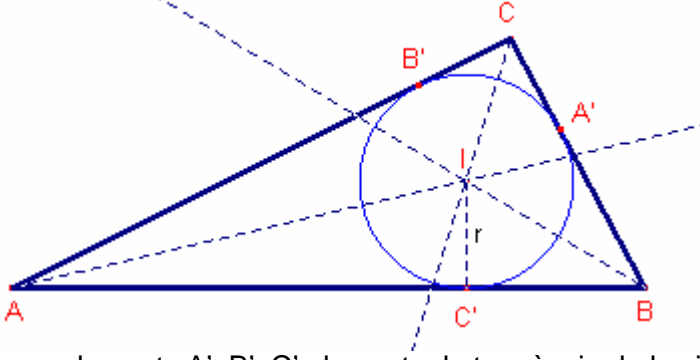
Propietat: Proporció entre els radis de les circumferències inscrites i exinscrites.

Siga el triangle $\triangle ABC$.

Siguen r i r_a els radis de les circumferències inscrita i exinscrite, respectivament.

Aleshores, $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ on p és el semiperímetre del triangle $p = \frac{a+b+c}{2}$

Demostració:



Siguen els punts A' , B' , C' els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ amb els costats.

$$\overline{AC'} = \overline{AB'}, \overline{BC'} = \overline{BA'}, \overline{CA'} = \overline{CB'}$$

Aleshores, $\overline{AC'} + \overline{BA'} + \overline{CA'} = p$

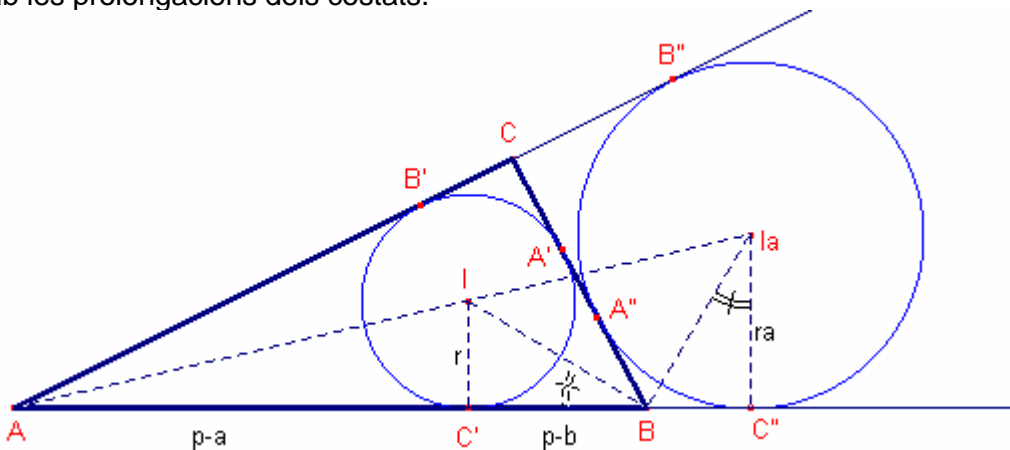
$$\overline{BA'} + \overline{CA'} = a$$

$$\text{Per tant } \overline{AC'} = \overline{AB'} = p - a$$

$$\text{Anàlogament, } \overline{BC'} = \overline{BA'} = p - b, \overline{CA'} = \overline{CB'} = p - c$$

Siga la circumferència exinscrite de centre I_a i radi r_a .

Siguen A'' , B'' , C'' els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ amb les prolongacions dels costats.



Calculem $\overline{BC''}$ i $\overline{AC''}$

$$\overline{AC''} = \overline{AB''}, \overline{BC''} = \overline{BA''}, \overline{CA''} = \overline{CB''}$$

$$\text{Aleshores; } \overline{AC} + \overline{CA''} = \overline{AB} + \overline{BC''}$$

$$\overline{AB} + \overline{BA''} = \overline{AB} + \overline{BC''}$$

Sumant les expressions:

$$2p = 2c + 2 \cdot \overline{BC''}, \text{ aleshores, } \overline{BC''} = p - c$$

$$\text{Per tant, } \overline{AC''} = (p - a) + (p - b) + (p - c) = p$$

Els triangle IAC' , $I_a\hat{A}C''$ són semblants, aleshores,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p - a}{p}$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{r}{r_b} = \frac{p - b}{p}, \quad \frac{r}{r_c} = \frac{p - c}{p}$$

Nota: També podem provar que:

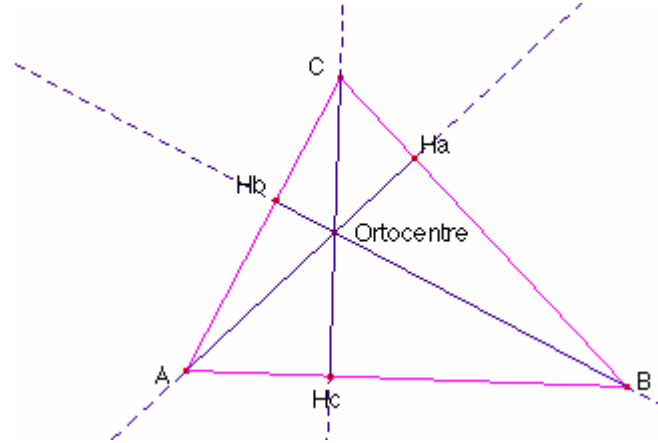
$$\overline{C'C''} = a, \quad \overline{B'B''} = b, \quad \overline{A'A''} = |\overline{CA'} - \overline{BA''}| = |\overline{CB'} - \overline{BC''}| = |(p - c) - (p - a)| = |a - c|$$

Altures i ortocentre.

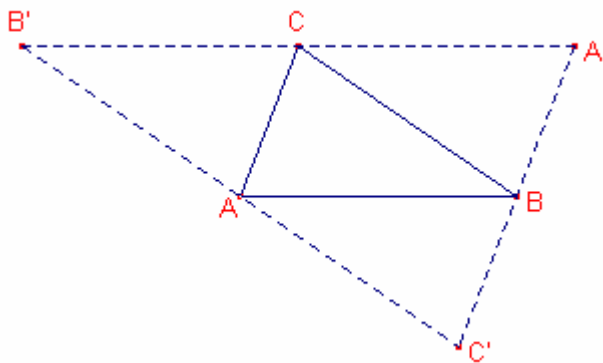
L'**altura**: És la recta que passa per un vèrtex i es perpendicular al costat oposat.

Propietat:

Les tres altures d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **ortocentre**.



Demostració:



Reduirem aquest cas al cas de les mediatrises.

Pels vèrtexs A, B, C dibuixem paral·leles als costats oposats respectius.

Aquestes rectes es tallen dos a dos en els punts A', B', C'.

Es formen tres triangles $\triangle AC'B'$, $\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ iguals al triangle $\triangle ABC$.

Tenen un costat comú i els altres dos costats paral·lels.

D'aquesta igualtat de triangles tenim que $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{AC'} = \overline{BC}$, aleshores, $\overline{AB'} = \overline{AC'}$

És a dir, A és el punt mig del segment $\overline{B'C'}$, B és el punt mig del segment $\overline{A'C'}$ i C és el punt mig del segment $\overline{A'B'}$.

Normalment considerem l'altura d'un triangle com el segment de la recta altura que uneix el vèrtex i el punt del costat oposat, $\overline{CH_C}$, $\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$.

Les altures del triangle $\triangle ABC$ són perpendiculars als costats del triangle $\triangle A'B'C'$, per tant són mediatrises del triangle $\triangle A'B'C'$, que s'intersecten en un punt.

Aleshores, les tres altures del triangle $\triangle ABC$ s'intersecten en un punt, que s'anomena ortocentre.

Propietat: fórmula de l'altura en funció dels costats.

En un triangle qualsevol $\triangle ABC$

$$h_A = \overline{AH_A} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}$$

$$h_B = \overline{BH_B} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2b}$$

$$h_C = \overline{CH_C} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Demostració:

Siga l'altura $\overline{CH} = h_C$

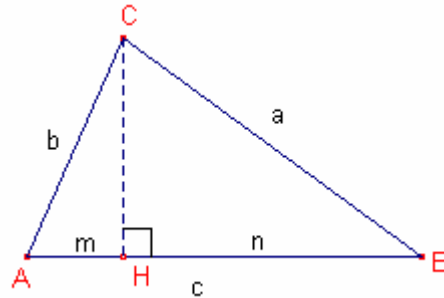
Siga el segment $\overline{AH} = m$

Per ser el triangle $\triangle ACH$ rectangle,

$$h_C^2 = b^2 - m^2$$

Per ser el triangle $\triangle BCH$ rectangle,

$$h_C^2 = a^2 - (c-m)^2$$



$$\text{Restant ambdues igualtats, } b^2 - m^2 = a^2 - (c^2 + m^2 - 2cm) \Rightarrow m = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} h_C^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \\ &= b^2 - \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \cdot (2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{((b+c)^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \end{aligned}$$

Aleshores,

$$h_C = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Les altres fórmules es demostren anàlogament.

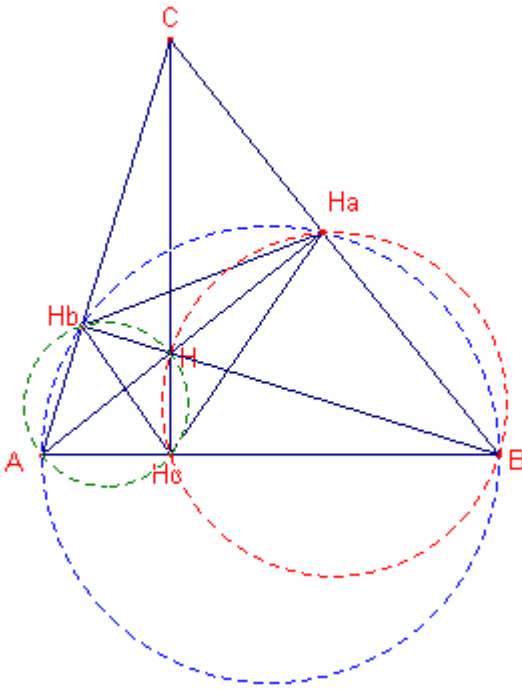
Triangle òrtic.

Donat el triangle $\triangle ABC$ acutangle, siguen H_a, H_b, H_c els peus de les altures.

El triangle $H_a H_b H_c$ s'anomena triangle òrtic del triangle $\triangle ABC$.

Propietat:

Les bisectrius del triangle òrtic són les altures del triangle $\triangle ABC$.



Demostració:

Provem que l'altura $\overline{CH_c}$ és bisectriu de l'angle $\angle H_a H_c H_b$

$\angle AH_a B = 90^\circ$, $\angle AH_b B = 90^\circ$ aleshores el quadrilàter $ABH_a H_b$ és cíclic.

Aleshores, $\alpha = \angle H_a A H_b = \angle H_a B H_b$ (són angles interiors que abracen el mateix arc).

$\angle HH_a B = 90^\circ$, $\angle HH_c B = 90^\circ$, aleshores el quadrilàter $HH_c B H_a$ és cíclic.

Aleshores, $\alpha = \angle H_a B H_a = \angle H_a B H = \angle HH_c H_a$ (1)

$\angle HH_c A = 90^\circ$, $\angle HH_b A = 90^\circ$, aleshores el quadrilàter $HH_b A H_c$ és cíclic.

Aleshores, $\alpha = \angle H_a A H_b = \angle H A H_b = \angle HH_c H_b$ (2)

De (1) i (2) $\angle HH_c H_a = \angle HH_c H_b$, aleshores, l'altura $\overline{CH_c}$ és bisectriu de l'angle $\angle H_a H_c H_b$

Per a les altres altures es provaria anàlogament.

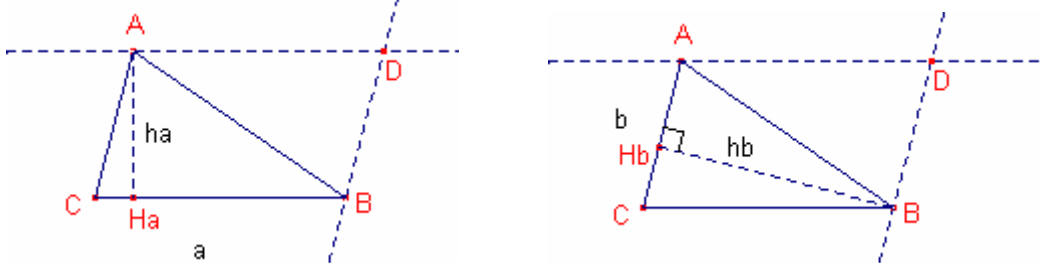
Àrea d'un triangle.

Propietat: l'àrea d'un triangle

L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és:

$$[ABC] = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

la fórmula no depèn de la base escollida.



Siga r la recta paral·lela al costat a que passa pel punt A

Siga s la recta paral·lela al costat b que passa pel punt B

Siga D el punt intersecció de les rectes r, s.

ACBD és un paral·lelogram.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és la meitat de l'àrea del paral·lelogram.

Fórmula d'Heró. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és:

$$[ABC] = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

Si fem el canvi $p = \frac{a+b+c}{2}$, tenim que:

$$p-a = \frac{-a+b+c}{2}, p-b = \frac{a-b+c}{2}, p-c = \frac{a+b-c}{2}$$

la fórmula quedaria: $[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Fórmules trigonomètriques: L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és:

$$\text{Àrea} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \quad \text{Àrea} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} \quad \text{Àrea} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$$

Considerem el triangle $\triangle ABC$

Siga l'altura \overline{BH}

L'àrea d'un triangle és

$$[ABC] = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2}$$

$$\overline{AC} = b$$

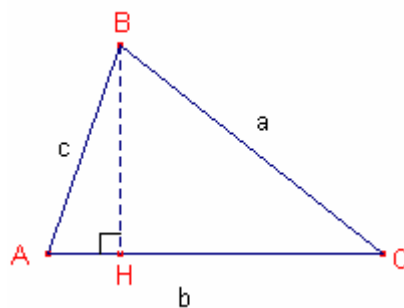
Considerant el triangle rectangle $\triangle AHB$

$$\overline{BH} = c \cdot \sin A$$

Aleshores,

$$[ABC] = \frac{bc \cdot \sin A}{2}$$

Anàlogament obtindríem les altres fórmules.



Fórmula amb el radi de la circumferència circumscrita. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és:

$$S = \frac{abc}{4R} \quad \text{on } R \text{ és el radi de la circumferència circumscrita.}$$

Pel teorema dels sinus:

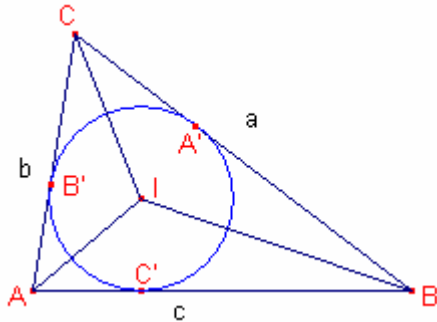
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ aleshores, } \sin A = \frac{a}{2R}$$

A partir de la fórmula trigonomètrica de l'àrea:

$$\left[\triangle ABC \right] = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{abc}{4R}$$

Fórmula amb el radi de la circumferència inscrita. L'àrea d'un triangle $\triangle ABC$ és:

$$S = rp \quad \text{on } p \text{ és el semiperímetre } p = \frac{a+b+c}{2}$$



Siga I l'incentre del triangle $\triangle ABC$. Siga r el radi de la circumferència inscrita a $\triangle ABC$.

Siguen A', B', C', els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle $\triangle ABC$. Podem notar que $\overline{IA'} = \overline{IB'} = \overline{IC'} = r$.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $\triangle ABI$, $\triangle BCI$, $\triangle ACI$

$$\left[\triangle ABC \right] = \left[\triangle ABI \right] + \left[\triangle BCI \right] + \left[\triangle ACI \right] = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = rp$$

Nota 1: Fórmula per a calcular el radi de la circumferència inscrita en funció dels costats.

$$r = \frac{\text{àrea } \triangle ABC}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Nota 2: A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites tenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

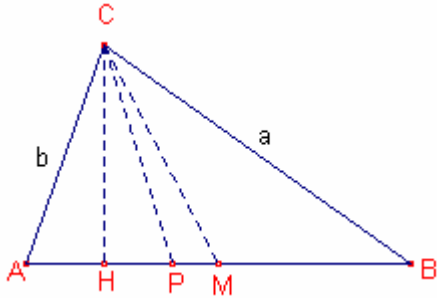
$$r_a = \frac{r \cdot p}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}, \quad r_b = \frac{r \cdot p}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}, \quad r_c = \frac{r \cdot p}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

Teorema: sobre l'altura, bisectriu i mitjana d'un triangle

En tot triangle $\triangle ABC$ la bisectriu coincideix amb l'altura o la mitjana o roman entre elles.

Demostració:

Siga \overline{CH} l'altura, \overline{CP} la bisectriu, \overline{CM} la mitjana referides al vèrtex C del triangle $\triangle ABC$.



Si $a = b$ aleshores, la bisectriu, la mitjana i l'altura al vèrtex C coincideixen.

Suposem $b < a$ aleshores, $\hat{B} < \hat{A}$ i també, $\angle ACH < \angle BCH$

$\angle BCH > \frac{1}{2}(\angle ACH + \angle BCH) = \frac{1}{2}\hat{C}$, és a dir, $\angle BCH > \angle BCP$

Aleshores, el punt P es troba entre H i B.

Per la propietat de les bisectrius:

$$\frac{b}{AP} = \frac{a}{PB} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{a}{b} > 1, \text{ per tant, } \overline{PB} > \overline{AP}$$

$$\overline{AP} < \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{PB}) < \frac{1}{2}c$$

Aleshores P es troba entre P i M

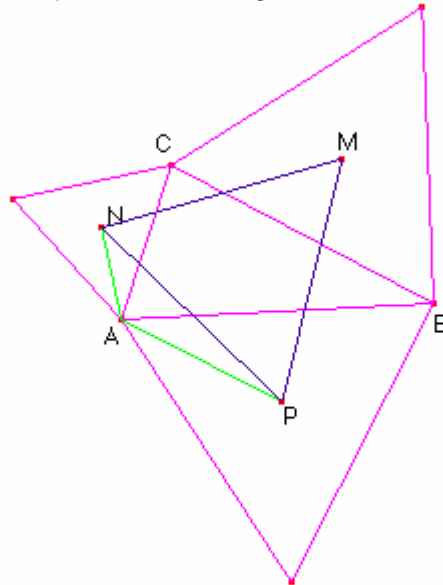
Teoremes

Els teoremes de Napoleó

Teorema de Napoleó 1: (demostració trigonomètrica)

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\triangle ABC$ construïm tres triangles equilàters exteriors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.

Demostració:



Siguen els segments $\overline{NP} = x$ $\overline{MN} = y$ $\overline{MP} = z$

Volem demostrar que $x = y = z$

$$\angle PAB = 30^\circ \quad \angle CAN = 30^\circ$$

$$\overline{AP} = \frac{c}{3}\sqrt{3} \quad \overline{AN} = \frac{b}{3}\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ANP$

$$x^2 = \left(\frac{c}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ + A)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(60^\circ + A))$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CMN$.

$$y^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ + C)$$

$$y^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(60^\circ + C))$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{3}(c^2 - a^2 - 2b(c \cdot \cos(60^\circ + A) - a \cdot \cos(60^\circ + C)))$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2b \left(\frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \cdot \cos(60^\circ + A) - a \cdot \cos(60^\circ + C) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2ab \left(\frac{\sin C}{\sin A} (\cos 60^\circ \cos A - \sin 60^\circ \sin A) - (\cos 60^\circ \cos C - \sin 60^\circ \sin C) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2ab \left(\frac{1}{2} \frac{\sin C}{\sin A} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin C}{\sin A} \sin A - \frac{1}{2} \cos C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{\sin C}{\sin A} \cos A - \cos C \right) \right) = \end{aligned}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$

i el teorema del cosinus $\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$ $\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$

Obtenim:

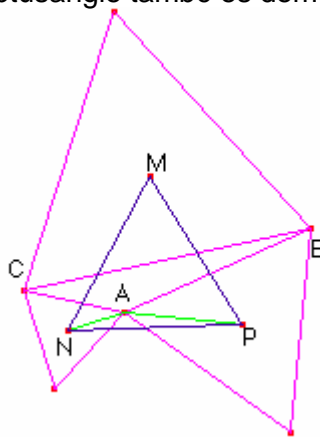
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{c}{a} \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{c(a^2 - b^2 - c^2)}{-2abc} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aleshores, $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = y$

Anàlogament demostrariem que $z^2 - x^2 = 0$

Per tant, el triangle $\triangle MNP$ és equilàter.

Observa que si l'angle A és obtusangle també es demostra de forma anàloga.



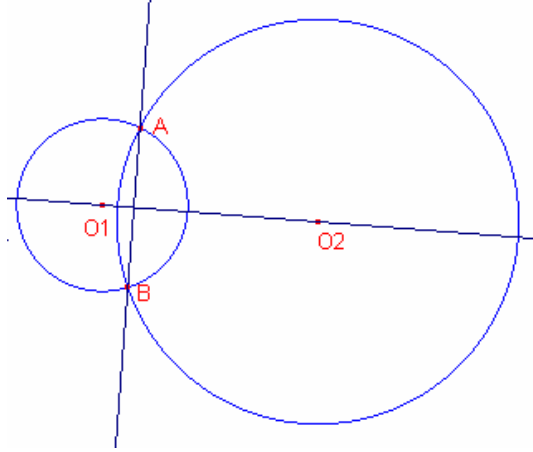
Teorema de Napoleó 1: (demostració sintètica)

Lema 1:

Un quadrilàter és cíclic (inscriuïble en una circumferència) si i només si els seus angles oposats sumen 180°

Lema 2:

Siguen dues circumferències que s'intersecten. La recta que uneix els punts d'intersecció és perpendicular a la recta que uneix els centres.



Demostració:

O_1 pertany a la mediatriu del segment \overline{AB} perquè $\overline{O_1A} = \overline{O_1B}$

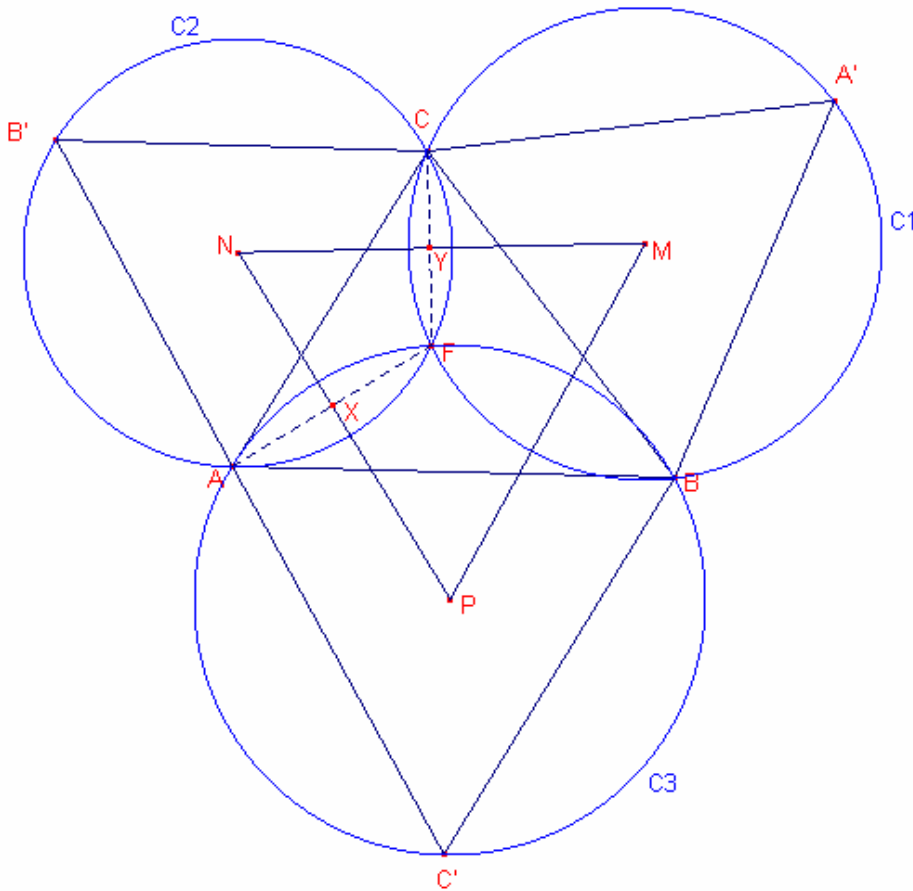
O_2 pertany a la mediatriu del segment \overline{AB} perquè $\overline{O_2A} = \overline{O_2B}$

Per tant, la recta mediatriu és la recta que passa pels punts O_1 , O_2

Aleshores, $\overline{O_1O_2}$ és perpendicular a \overline{AB}

Teorema de Napoleó 1:

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\triangle ABC$ construïm tres triangles equilàters exteriors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.



En la figura considerem:

El triangle equilàter $\triangle BCA'$ de centre M i la seua circumferència circumscrita C_1 ,

El triangle equilàter $\triangle ACB'$ de centre N i la seua circumferència circumscrita C_2 ,

El triangle equilàter $\triangle ABC'$ de centre P i la seua circumferència circumscrita C_3 .

Siga F el punt intersecció de les circumferències C_1, C_2 .

$\angle AFC = 120^\circ$, $\angle BFC = 120^\circ$ (per ser angles interiors de les circumferències C_1, C_2 , respectivament).

Aleshores l'angle $\angle AFB = 120^\circ$

Per tant, el quadrilàter AFBC' és inscriptible en una circumferència.

El triangle $\triangle ABC'$ està inscrit en la circumferència C_3 aleshores F pertany a C_3 .

Per tant F és la intersecció de les tres circumferències.

Considerem els segments $\overline{AF}, \overline{CF}$

Els segments $\overline{NP}, \overline{AF}$ són perpendiculars (pel lema A, F és la intersecció de C_1, C_3 i N, i P els centres d'ambdues circumferències).

Anàlogament els segments \overline{NM} , \overline{CF} són perpendiculars.

Considerem el segment \overline{NP} que talla el segment \overline{AF} en el punt X.
Considerem el segment \overline{NM} que talla el segment \overline{CF} en el punt Y.
Per tant, $\angle NXF = 90^\circ$, $\angle NYF = 90^\circ$.

El quadrilàter NXFY és inscriuïble en una circumferència (la suma de dos angles oposats és 180°)

$$\angle XFY = 120^\circ$$

Aleshores, $\angle XNY = 60^\circ$

Anàlogament provaríem que $\angle NMP = 60^\circ$, $\angle NPM = 60^\circ$

Aleshores el triangle $\triangle MNP$ és equilàter.

Conseqüències:

Teorema d'Steiner

En la construcció anterior:

Els segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ s'intersecten en el punt F que s'anomena punt d'Steiner o de Fermat.

A més a més $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

Demostració:

$\angle B'FA = 60^\circ$, $\angle AFB = 120^\circ$, per tant B', F, B estan alineats

Anàlogament A', F, A estan alineats i C', F, C estan alineats.

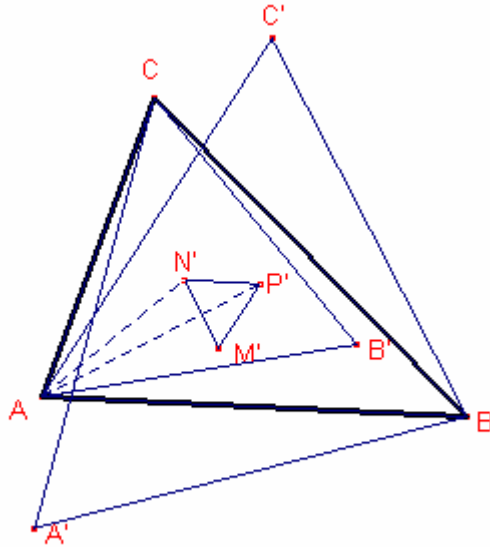
Notem que un gir de 60° de centre A del triangle $\triangle CB'B$ és transforma en el triangle $\triangle CAA'$, aleshores $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Anàlogament $\overline{BB'} = \overline{CC'}$

Teorema de Napoleó 2:

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\triangle ABC$ construïm tres triangles equilàters interiors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.

Demostració:



Siguen els segments $\overline{NP'} = x$ $\overline{M'N} = y$ $\overline{M'P'} = z$

Volem demostrar que $x = y = z$

$$\angle P'AB = 30^\circ \quad \angle CAN' = 30^\circ$$

$$\overline{AP'} = \frac{c}{3}\sqrt{3} \quad \overline{AN'} = \frac{b}{3}\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AN'P'$

$$x^2 = \left(\frac{c}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(A - 60^\circ)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(A - 60^\circ))$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CM'N'$.

$$y^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(C - 60^\circ)$$

$$y^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C - 60^\circ))$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{3}(c^2 - a^2 - 2b(c \cdot \cos(A - 60^\circ) - a \cdot \cos(C - 60^\circ)))$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2b \left(\frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \cdot \cos(A - 60^\circ) - a \cdot \cos(C - 60^\circ) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2ab \left(\frac{\sin C}{\sin A} (\cos 60^\circ \cos A + \sin 60^\circ \sin A) - (\cos 60^\circ \cos C + \sin 60^\circ \sin C) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - 2ab \left(\frac{1}{2} \frac{\sin C}{\sin A} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin C}{\sin A} \sin A - \frac{1}{2} \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{\sin C}{\sin A} \cos A - \cos C \right) \right) = \end{aligned}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$

i el teorema del cosinus $\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$ $\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$

Obtenim:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{c}{a} \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 - ab \left(\frac{c(a^2 - b^2 - c^2)}{-2abc} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(c^2 - a^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aleshores, $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = y$

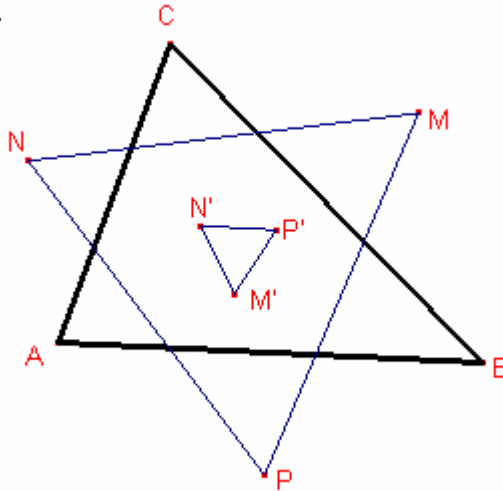
Anàlogament demostrariem que $z^2 - x^2 = 0$

Per tant, el triangle $\triangle MN'P'$ és equilàter.

Teorema d'àrees dels triangles de Napoleó.

La diferència entre les àrees dels triangles equilàters de Napoleó (exterior i interior) és igual a l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Demostració:



Siga $\triangle MNP$ el triangle de Napoleó construït amb els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\triangle ABC$ i exteriors al triangle.

Siga $\triangle M'N'P'$ el triangle de Napoleó construït amb els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\triangle ABC$ i interiors al triangle.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $\left[\triangle ABC \right] = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$

Els triangles $\triangle MNP$, $\triangle M'N'P'$ són equilàters, per tant:

L'àrea del triangle $\triangle MNP$ és igual a $\left[\triangle MNP \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{NP}^2$

L'àrea del triangle $\triangle M'N'P'$ és igual a $\left[\triangle M'N'P' \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{N'P'}^2$

En el teorema de Napoleó havíem provat que:

$$\overline{NP}^2 = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(A + 60^\circ))$$

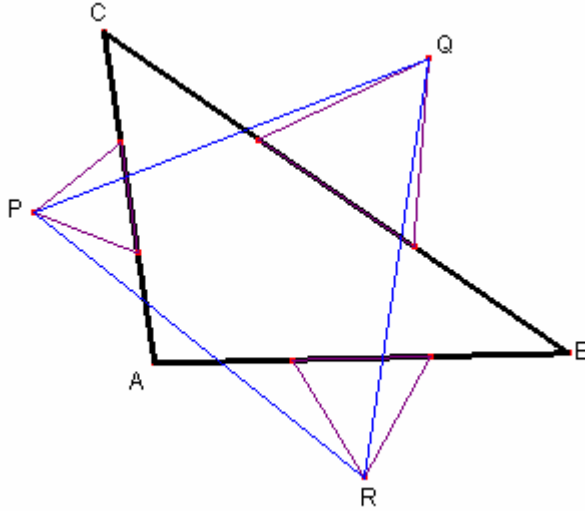
$$\overline{N'P'}^2 = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(A - 60^\circ))$$

La diferència d'àrees és:

$$\begin{aligned} \left[\triangle MNP \right] - \left[\triangle M'N'P' \right] &= \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{NP}^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{N'P'}^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} (-2bc(\cos(A + 60^\circ) - \cos(A - 60^\circ))) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} (2bc)(-\cos(A + 60^\circ) + \cos(A - 60^\circ)) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} bc \left(-\frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right) = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \left[\triangle ABC \right] \end{aligned}$$

Teorema de Napoleó 3.

Dividim els costats d'un triangle $\triangle ABC$ qualsevol en tres parts iguals. Sobre cadascuna de les parts centrals dibuixem tres triangles equilàters exteriors al triangle $\triangle ABC$, els vèrtexs exteriors d'aquests tres triangles equilàters són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.



Demostració:

Notem que els punts P, Q, R són els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\triangle ABC$

Teorema: Generalització del teorema de Napoleó.

Siga el triangle $\triangle ABC$.

Sobre el costat BC, siga el punt X_1 tal que $\frac{BX_1}{BC} = k$ i el punt X_2 tal que $BX_1 = X_2C$

Sobre el costat CA, siga el punt Y_1 tal que $\frac{CY_1}{CA} = k$ i el punt Y_2 tal que $CY_1 = Y_2A$

Sobre el costat AB, siga el punt Z_1 tal que $\frac{AZ_1}{AB} = k$ i el punt Z_2 tal que $AZ_1 = Z_2B$

Siguen els triangles equilàters $\triangle X_1X_2X_3$, $\triangle Y_1Y_2Y_3$, $\triangle Z_1Z_2Z_3$, $\triangle Y_2Z_1X'_3$, $\triangle Z_2X_1Y'_3$,

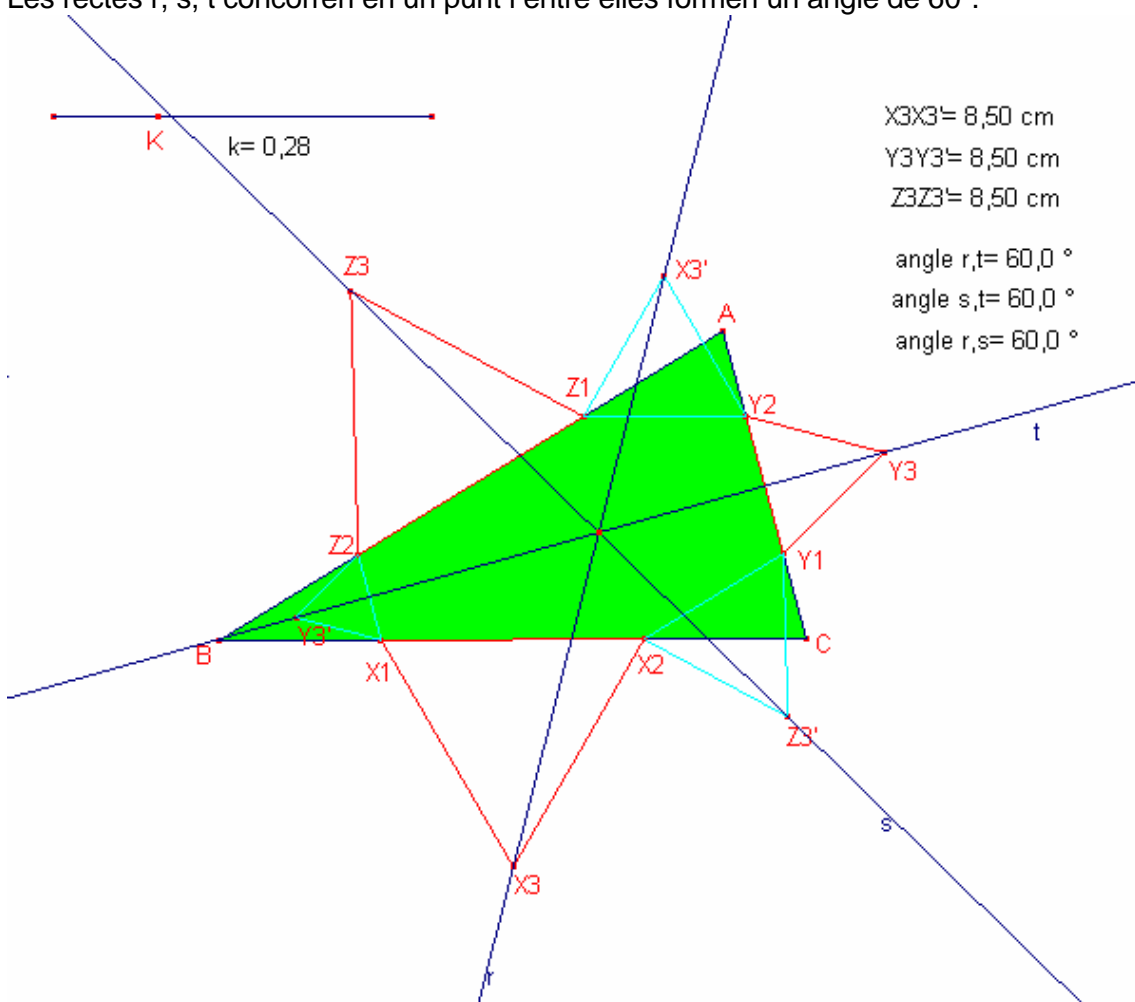
$\triangle X_2Y_1Z'_3$ en la mateixa orientació.

Siguen: la recta r que passa pels punts X_3, X'_3 , la recta s que passa pels punts Y_3, Y'_3 i la recta t que passa pels punts Z_3, Z'_3

Aleshores:

$$\overline{X_3X'_3} = \overline{Y_3Y'_3} = \overline{Z_3Z'_3}$$

Les rectes r, s, t concorren en un punt i entre elles formen un angle de 60° .



Punts de Napoleó

Teorema 1:

Si sobre els costats d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem tres triangles equilàters exteriors al triangle $\triangle ABC$ (com el de la figura 1).

Siguen P, Q, R els baricentres dels triangles equilàters exteriors.

Aleshores les rectes AP, BQ, CR s'intersecten en un punt anomenat punt primer de Napoleó.

Teorema 2:

Si sobre els costats d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem tres triangles equilàters interiors al triangle $\triangle ABC$ (com el de la figura 2).

Siguen P, Q, R els baricentres dels triangles equilàters interiors.

Aleshores les rectes AP, BQ, CR s'intersecten en un punt anomenat punt primer de Napoleó.

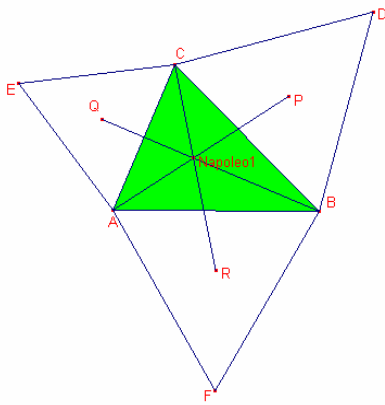


Figura 1

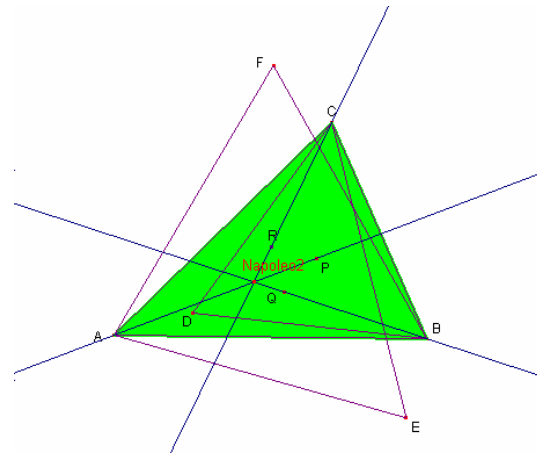


Figura2

Aquests punts ha estat estudiats per John Rigby 1988.

Teoremes de Menelau i de Ceva.

Teorema de Menelau. (demostració analítica)

Siga el triangle $\triangle ABC$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$.

Siga la recta g que passa pels punts B, C . Siga el punt $E \in g$.

$$D, E, F \text{ estan alineats} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

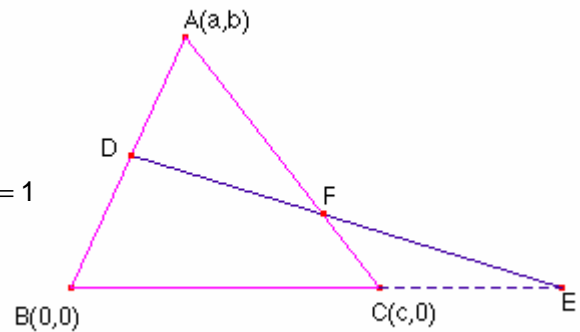
Demostració:

Siguen $\overrightarrow{AD} = r \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{AF}$.

Demostrarem D, F, E , estan alineats $\Leftrightarrow r \cdot s \cdot t = 1$

Considerem $B(0,0)$, $A(a,b)$, $C(c,0)$

$\overrightarrow{BA} = (a,b)$, $\overrightarrow{BC} = (c,0)$, $\overrightarrow{AC} = (c-a,-b)$



Per estar D en el segment \overline{AB} $D(\alpha a, \alpha b)$.

Calculem α

$$\overrightarrow{AD} = r \cdot \overrightarrow{BD} \Rightarrow (\alpha a - a, \alpha b - b) = r(\alpha a, \alpha b) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1-r}$$

Per estar E en la recta g $E(\beta c, 0)$. Calculem β

$$\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{CE} \Rightarrow (\beta c, 0) = s(\beta c - c, 0) \Rightarrow \beta = \frac{-s}{1-s}$$

Per estar F en el segment \overline{AC} $F(c + \gamma(c-a), -\gamma b)$. Calculem γ

$$\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{AF} \Rightarrow (\gamma(c-a), -\gamma b) = t(c - \gamma(c-a) - a, -\gamma b - b) \Rightarrow \gamma = \frac{t}{1-t}$$

D, F, E estan alineats $\Leftrightarrow \{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FE}\}$ són linealment dependents

$$\overrightarrow{DE} = (\beta c - \alpha a, -\alpha b) \quad \overrightarrow{FE} = (\beta c - c - \gamma(c-a), \gamma b)$$

$$D, F, E \text{ estan alineats} \Leftrightarrow \frac{\beta c - \alpha a}{\beta c - c - \gamma(c-a)} = \frac{-\alpha b}{\gamma b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta c - \alpha a}{\beta c - c - \gamma(c-a)} = \frac{-\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \beta \gamma c - \alpha \gamma a = -\alpha \beta c + \alpha c + \alpha \gamma c - \alpha \gamma a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \gamma = -\alpha \beta + \alpha + \alpha \gamma \Leftrightarrow$$

$$\text{Substituint } \alpha = \frac{1}{1-r}, \quad \beta = \frac{-s}{1-s}, \quad \gamma = \frac{t}{1-t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-s}{1-s} \cdot \frac{t}{1-t} = \frac{-1}{1-r} \cdot \frac{-s}{1-s} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-r} \cdot \frac{t}{1-t} \Leftrightarrow r \cdot s \cdot t = 1$$

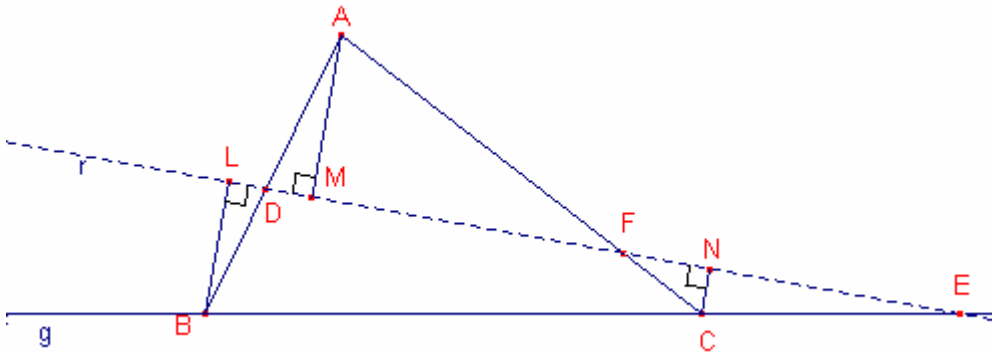
Teorema de Menelau. (demostració sintètica)

Siga el triangle $\triangle ABC$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$.

Siga la recta g que passa pels punts B, C . Siga el punt $E \in g$.

$$D, E, F \text{ estan alineats} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

(\Rightarrow)



Suposem que D, E, F estan alineats. Siga r la recta que passa pels punts D, E, F .

Siguen $\overline{BL}, \overline{AM}, \overline{CN}$ perpendiculars a la recta r , tal que L, M, N pertanyen a la recta r .

Aleshores, $\overline{BL}, \overline{AM}, \overline{CN}$ són paral·lels.

Aplicant el teorema de Tales,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BL}}, \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{CN}}, \quad \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AM}}$$

Multiplicant les tres igualtats:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

(\Leftarrow)

Suposem que els punts $D \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$, $E \in g$, tal que, $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Siga la recta s que passa pels punts E, F .

La recta s talla la el costat \overline{AB} en el punt D'

Com D', E, F estan alineats es compleix $\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Igalant les dues expressions, $\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

Els punts D, D' pertanyen al costat \overline{AB} i divideixen el costat \overline{AB} amb la mateixa raó, per tant D i D' coincideixen.

Aleshores D, E, F estan alineats.

Teorema de Ceva. (demostració analítica)

Siga el triangle $\triangle ABC$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$.

Siguen $\overrightarrow{AD} = r \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{AF}$.

Aleshores, els segments \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CD} es tallen en un punt T $\Leftrightarrow r \cdot s \cdot t = -1$

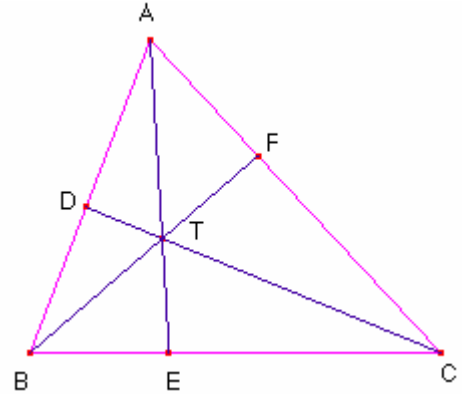
Demostració:

(\Rightarrow)

Suposem que els segments \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CD} es tallen en un punt T

Aleshores $\overrightarrow{ET} = m \cdot \overrightarrow{AT}$

Com que $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = s \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EC} = (1-s)\overrightarrow{EC}$



Els punts D, T, C estan alineats, aplicant el teorema de Menelau al triangle $\triangle BAE$

$$r \cdot (1-s) \cdot m = 1 \quad (1)$$

Com que $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} = \frac{1}{s} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \left(1 - \frac{1}{s}\right) \overrightarrow{EB}$

Els punts B, T, F estan alineats, aplicant el teorema de Menelau al triangle $\triangle AEC$

$$\frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right) \cdot m = 1 \quad (2)$$

Dividint les expressions (1), (2)

$$\frac{r(1-s)m}{\frac{1}{t} \left(\frac{s-1}{s}\right) m} = 1 \Rightarrow r \cdot s \cdot t = -1$$

(\Leftarrow)

Suposem que els segments \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CD} no es tallen en un punt T

Suposem que els segments \overline{BF} , \overline{CD} es tallen en T.

Considerem el segment $\overline{AE'}$ que passa per T i talla en E' el segment \overline{BC}

Siga $\overrightarrow{BE'} = x \cdot \overrightarrow{CE'}$, $s \neq x$ (ja que $E \neq E'$)

Per la implicació anterior ($\overline{AE'}$, \overline{BF} , \overline{CD} , es tallen en T), $r \cdot x \cdot t = -1$,

Com que $x \neq s \Rightarrow r \cdot s \cdot t \neq -1$

Teorema de Ceva . (demostració sintètica).

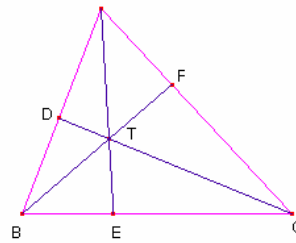
Siga el triangle $\triangle ABC$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$.

Aleshores,

els segments \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CD} es tallen en un punt T $\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Demostració:

Anomenem $\left[\triangle XYZ \right]$ a l'àrea del triangle XYZ



(\Rightarrow)

Suposem que \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CD} es tallen en un punt T

Dos triangle que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\left[\triangle ADC \right]}{\left[\triangle BDC \right]} = \frac{\left[\triangle ADT \right]}{\left[\triangle BDT \right]} = \frac{\left[\triangle ADC \right] - \left[\triangle ADT \right]}{\left[\triangle BDC \right] - \left[\triangle BDT \right]} = \frac{\left[\triangle ATC \right]}{\left[\triangle BTC \right]}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\left[\triangle BEA \right]}{\left[\triangle CEA \right]} = \frac{\left[\triangle BET \right]}{\left[\triangle CET \right]} = \frac{\left[\triangle BEA \right] - \left[\triangle BET \right]}{\left[\triangle CEA \right] - \left[\triangle CET \right]} = \frac{\left[\triangle ATB \right]}{\left[\triangle ATC \right]}$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\left[\triangle CFB \right]}{\left[\triangle AFB \right]} = \frac{\left[\triangle CFT \right]}{\left[\triangle AFT \right]} = \frac{\left[\triangle CFB \right] - \left[\triangle CFT \right]}{\left[\triangle AFB \right] - \left[\triangle AFT \right]} = \frac{\left[\triangle BTC \right]}{\left[\triangle ATB \right]}$$

Multiplicant les tres igualtats:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

(\Leftarrow)

Siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$ tal que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$ (1)

Siga T el punt intersecció de \overline{AE} , \overline{BF}

Siga la recta r que passa pels punt C, T que talla el costat \overline{AB} en D'

Vegem que D es igual a D'

$D' \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$ i es tallen en T aleshores, $\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$ (2)

Igalant les dues (1), (2) expressions, $\frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

Els punts D, D' pertanyen al costat \overline{AB} i divideixen el costat \overline{AB} amb la mateixa raó, per tant D i D' coincideixen.

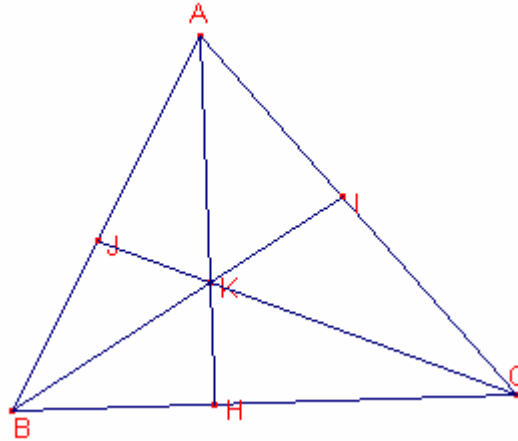
Aleshores D, E, F estan alineats.

Nota: tres segments que parteixen dels tres vèrtexs d'un triangle i que tallen els costats oposats i els tres es tallen en un punt s'anomenen cevianes del triangle.

Primer teorema de Von Aubel:

Siga un triangle $\triangle ABC$ i siguen els punts H, I, J sobre els costats a, b, c respectivament, tals que els segments AH, BI, CJ concorren en el punt K. Aleshores:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} + \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}}$$



Demostració:

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\triangle AHB$

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{KH}}{\overline{AK}} = 1, \text{ per tant, } \frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\triangle AHC$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{KH}}{\overline{AK}} = 1, \text{ per tant, } \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) i (2)

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} + \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} + \frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}} \left(\frac{\overline{HC} + \overline{HB}}{\overline{BC}} \right) = \frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}$$

Anàlogament:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HC}} + \frac{\overline{BJ}}{\overline{JC}}$$

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} + \frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}$$

Teorema: Recta d'Euler.

El baricentre de qualsevol triangle està alineat amb l'ortocentre i el circumcentre, i a doble distància del primer que del segon. A la recta que uneix els tres punts s'anomena **recta d'Euler**.

Demostració:

Considerem el triangle $\triangle ABC$.

Siguen les mitjanes, $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$
Siga G el baricentre del triangle.
Siga P el punt mig del segment \overline{AG} .
Siga Q el punt mig del segment \overline{BG} .

Tracem les altures als vèrtexs A i B
les quals es tallen en l'ortocentre H

Per P i Q tracem, respectivament,
dues paral·leles r, s a les altures, que es tallaran en un punt M', punt mig del segment \overline{HG} (per ser r i s paral·leles mitjanes dels triangles $\triangle AHG$ i $\triangle BHG$ respectivament.). Per

$$\text{tant } \overline{GM'} = \frac{1}{2} \overline{GH}$$

Considerem la recta r' simètrica de r respecte del punt G.
Considerem la recta s' simètrica de s respecte del punt G.

Observem que el punt M_a pertany a la recta r'.

Observem que el punt M_b pertany a la recta s'.

Siga el punt M la intersecció de les rectes r' i s'.

M és el punt simètric de M' respecte del punt G. Per tant M, G, M', H estan alineats.

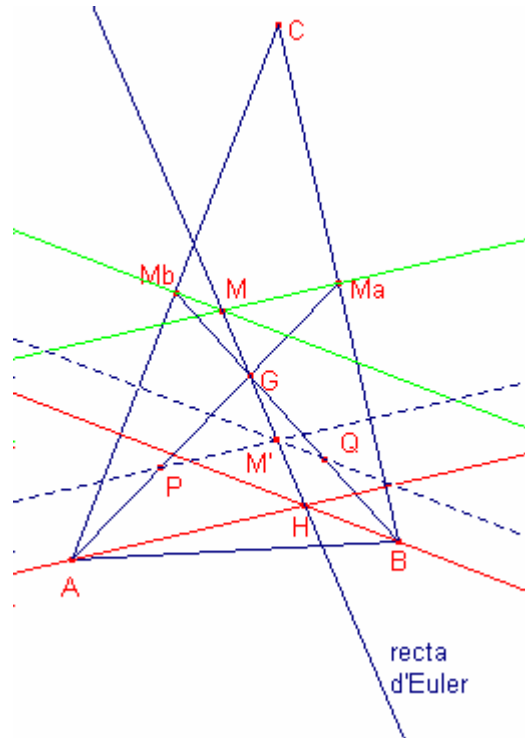
$$\overline{GM} = \overline{GM'}$$

La recta r' és paral·lela a l'altura que passa per A

La recta s' és paral·lela a l'altura que passa per B

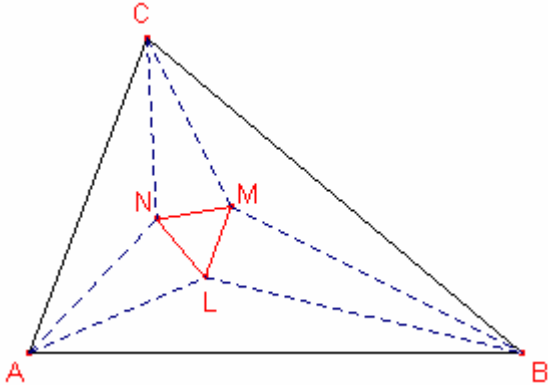
Per tant M és el circumcentre.

$$\text{A més a més, per la simetria, } \overline{GM} = \overline{GM'} = \frac{1}{2} \overline{GH}$$



Teorema de Morley. (demostració trigonomètrica)

En tot triangle $\triangle ABC$ les semirectes que divideixen cadascun dels angles A, B, C , en tres parts iguals determinen un triangle equilàter $\triangle LMN$ (veure figura).



Aquest teorema no es pot demostrar mitjançant regla i compàs ja que no es pot fer la trisecció d'un angle amb regla i compàs.

Lema 1:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

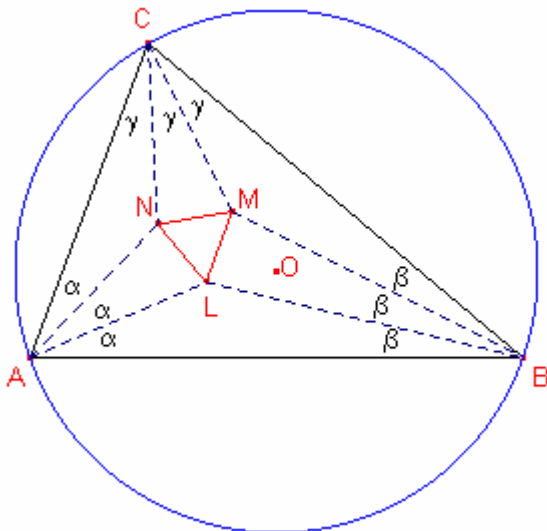
$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

Lema 2:

a) $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$

b) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha + \beta)$

Demostració trigonomètrica del teorema de Morley.



$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$

$$\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin 3\beta} = \frac{c}{\sin 3\gamma} = 2R \quad \text{on } R = \overline{OA} \text{ és el radi de la circumferència circumscrita.}$$

Apliquem el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABL$

$$\frac{\overline{AL}}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Com que $c = 2R \sin 3\gamma$

$$\overline{AL} = \frac{2R \sin \beta \sin 3\gamma}{\sin(60^\circ - \gamma)}$$

Aplicant el lema 2a: $\sin 3\gamma = 4 \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma) \sin(60^\circ - \gamma)$

$$\overline{AL} = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma)$$

Anàlogament:

$$\overline{AN} = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \beta)$$

Apliquem el teorema del cosinus al triangle $\triangle ALN$

$$\begin{aligned} \overline{LN}^2 &= \overline{AL}^2 + \overline{AN}^2 - 2 \cdot \overline{AL} \cdot \overline{AN} \cdot \cos \alpha = \\ &= 64R^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma (\sin^2(60^\circ + \gamma) + \sin^2(60^\circ + \beta) - 2 \cdot \sin(60^\circ + \gamma) \sin(60^\circ + \beta) \cos \alpha) \end{aligned}$$

$180^\circ - \alpha = 120^\circ + \beta + \gamma$, per tant, $\cos \alpha = -\cos(120^\circ + \beta + \gamma)$

Aplicant el lema 2b

$$\sin^2(60^\circ + \gamma) + \sin^2(60^\circ + \beta) + 2 \cdot \sin(60^\circ + \gamma) \sin(60^\circ + \beta) \cos(120^\circ + \beta + \gamma) = \sin^2(120^\circ + \beta + \gamma) = \sin^2 \alpha$$

Aleshores,

$$\overline{LN} = 64R^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha$$

Per simetria de la fórmula:

$$\overline{LM} = 64R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

$$\overline{MN} = 64R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

Aleshores el triangle $\triangle LMN$ és equilàter.

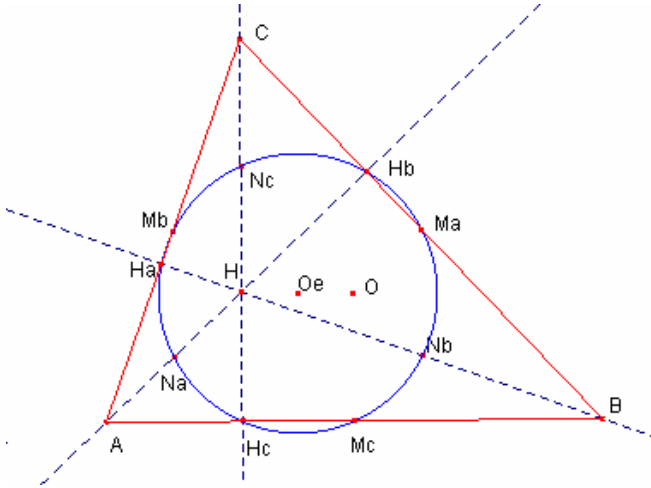
La circumferència d'Euler.

Donat qualsevol triangle $\triangle ABC$ existeix la circumferència d'Euler que conté els següents 9 punts:

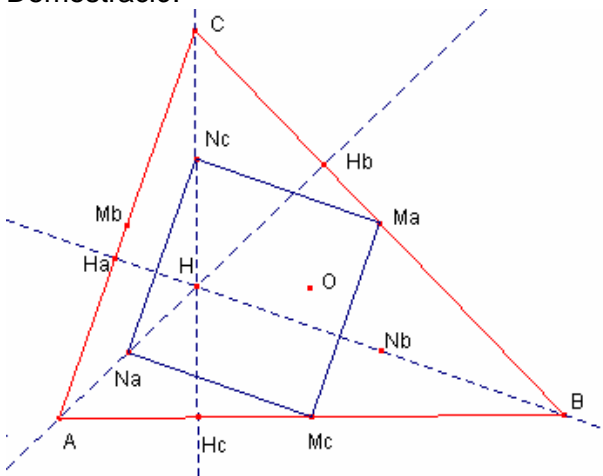
H_a, H_b, H_c , els tres peus de les altures del triangle $\triangle ABC$.

M_a, M_b, M_c , els tres punts mig dels costats del triangle $\triangle ABC$.

N_a, N_b, N_c , els tres punts mig dels segments compresos entre els vèrtexs i l'ortocentre.



Demostració:



Siguen H l'ortocentre del triangle i O el circumcentre del triangle.

Els triangles $\triangle BM_aM_c$, $\triangle ABC$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Els triangles $\triangle HN_aN_c$, $\triangle HAB$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Aleshores $\overline{N_aN_c} = \overline{M_aM_c}$ i són paral·lels.

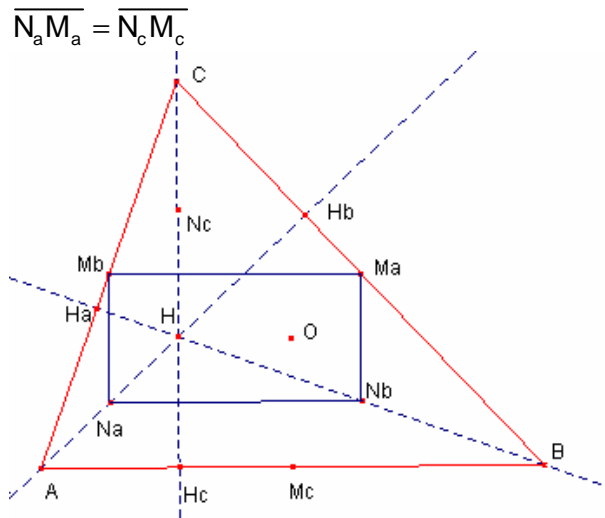
Els triangles $\triangle CN_cM_a$, $\triangle CHB$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Els triangles $\triangle AN_aM_c$, $\triangle AHB$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{N_aM_c} = \overline{M_aN_c}$ i són paral·lels.

Per altra banda, \overline{BH} és perpendicular a \overline{AC} , per tant, $\overline{N_cM_a}$ és perpendicular a $\overline{M_aM_c}$.
Per tant, $N_aM_cM_aN_c$ és un rectangle.

Aleshores el rectangle $N_aM_cM_aN_c$ està inscrit en una circumferència de diàmetre



Anàlogament provaríem que $N_aM_bM_aN_b$ és un rectangle que està inscrit en la circumferència de diàmetre $\overline{N_aM_a}$.

Com que $\angle N_aH_bM_a = 90^\circ$, H_b pertany a la circumferència de diàmetre $\overline{N_aM_a}$.
Anàlogament H_a, H_c pertanyen a la mateixa circumferència.

Propietat:

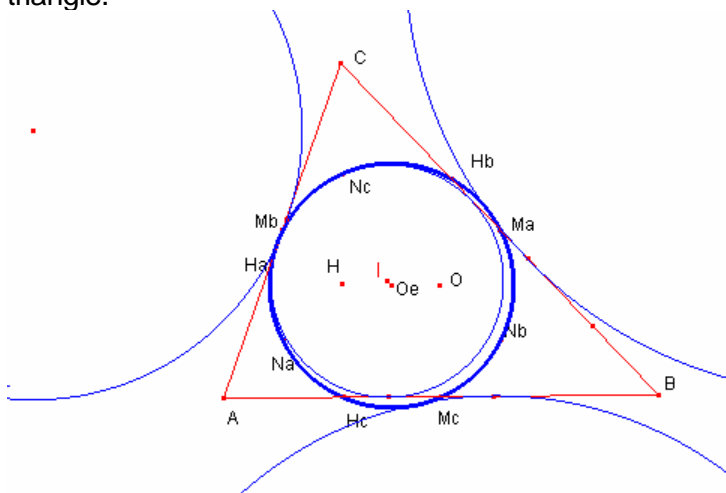
El centre de la circumferència d'Euler és el punt mig entre l'ortocentre i el circumcentre del triangle.

Propietat

El radi de la circumferència d'Euler és la meitat del radi de la circumferència circumscria al triangle.

Propietat:

La circumferència d'Euler és tangent a les circumferències inscrita i exinscrites al triangle.



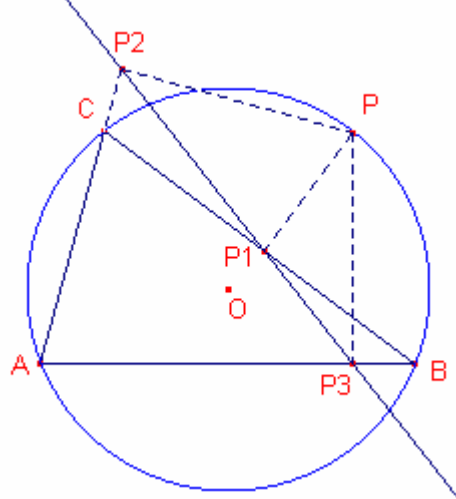
La recta de Simson

Teorema: La recta de Simson

Siga el triangle $\triangle ABC$

Siga P un punt del plànel.

Siguen P_1, P_2, P_3 , les projeccions del punt P sobre els costats (o les rectes que formen els costats) a, b, c .



Aleshores:

P pertany a la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$ si i només si els punts P_1, P_2, P_3 estan alineats.

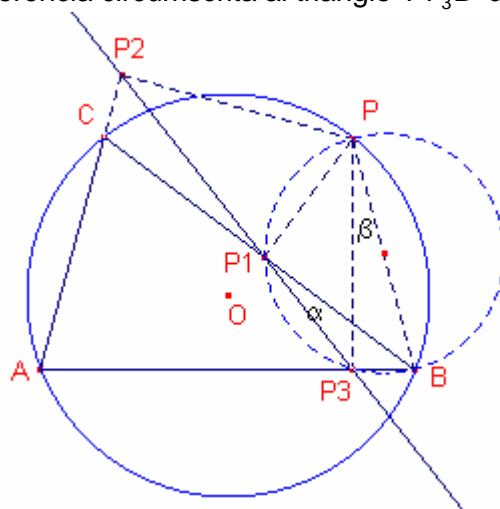
Demostració:

(\Rightarrow)

Suposem que el punt P està en la circumferència circumscriu en l'arc BC que no conté A . Els altres casos es demostrarien canviant de nom els vèrtexs

Siguen P_1, P_2, P_3 , les projeccions del punt P sobre els costats a, b, c (o les rectes que formen els costats).

Considerem la circumferència circumscriu al triangle $\triangle PP_3B$ de diàmetre \overline{BP} , per ser



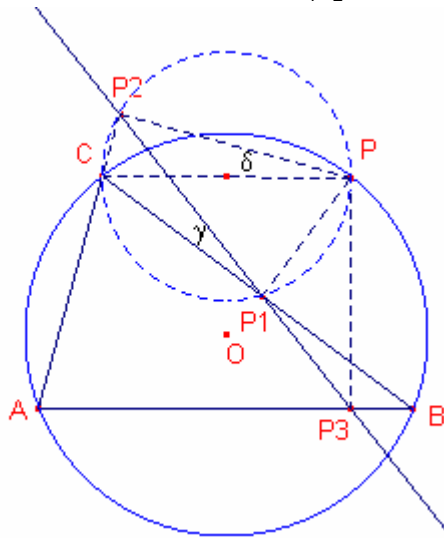
l'angle $\angle PP_3B = 90^\circ$

El quadrilàter BPP_1P_3 és cíclic, perquè, $\angle PP_1P_3 = 90^\circ$,

Considerem els angles $\alpha = \angle BP_1P_3$, $\beta = \angle BPP_3$

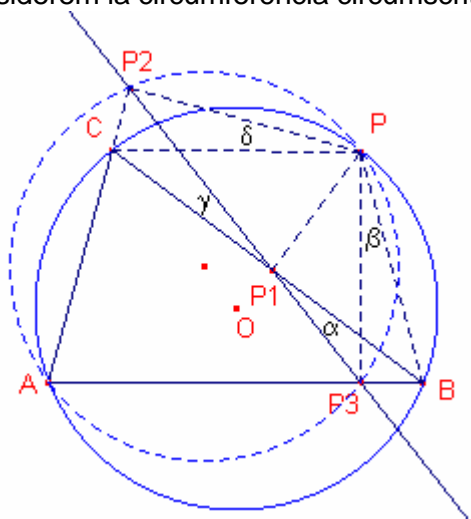
Aleshores, $\alpha = \beta$ per ser inscrits i abraçar el mateix arc.

El quadrilàter PP_2CP_1 és cíclic per ser $\angle PP_2C = \angle CP_1P = 90^\circ$
 Considerem els angles $\gamma = \angle CP_1P_2$, $\delta = \angle CPP_2$



Aleshores, $\gamma = \delta$ per ser inscrits i abraçar el mateix arc.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.



P pertany a la circumferència circumscrita si i només si $\angle CPB = 180^\circ - A$

El quadrilàter PP_2AP_3 és cíclic per ser $\angle PP_2A = \angle AP_3P = 90^\circ$

Aleshores, $\angle P_2PP_3 = 180^\circ - A$

Aleshores, $\angle CPB = \angle P_2PP_3 = 180^\circ - A$ (1)

Restant a la igualtat (1) l'angle $\angle CPP_3$ tindriem que $\beta = \delta$.

Aleshores, $\alpha = \gamma$, per tant, els punts P_1, P_2, P_3 estan alineats ja que C, P_1, B estan alineats.

(\Leftarrow)

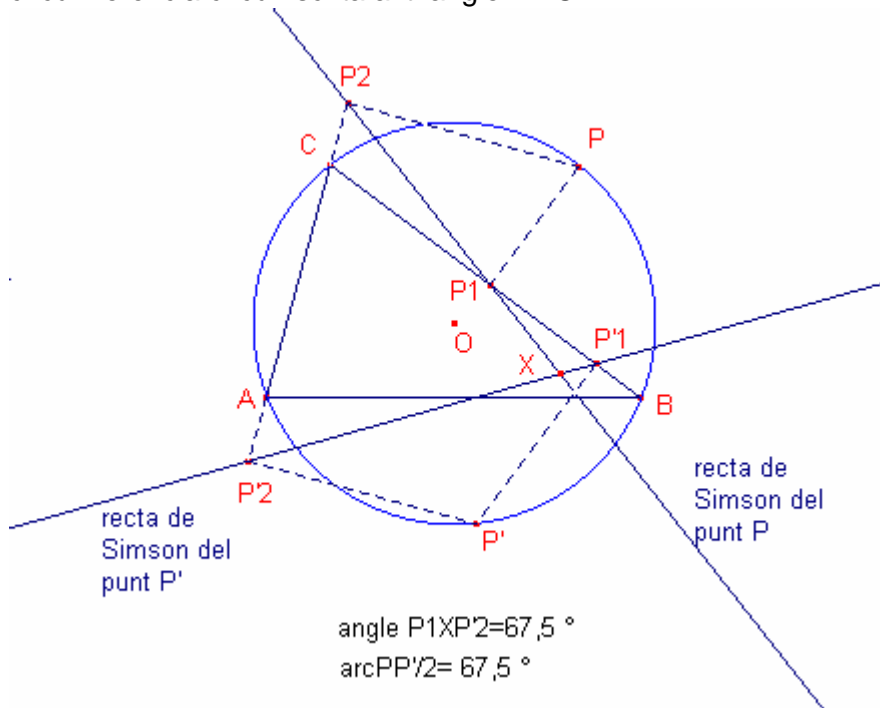
Si els punts P_1, P_2, P_3 estan alineats invertint l'ordre de la demostració anterior podem concloure que P pertany a la circumferència circumscrita del triangle $\triangle ABC$.

Teorema

Siga el triangle $\triangle ABC$

Siga el punt P de la circumferència circumscriu al triangle.

L'angle de les rectes de Simson dels punts P, P' mesura la meitat de l'arc PP' de la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$.

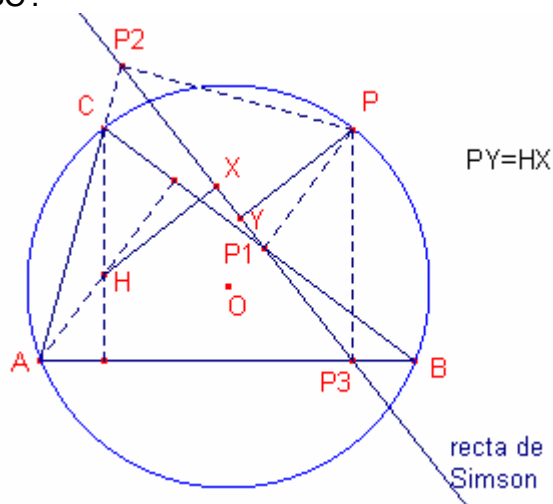


Teorema

Siga el triangle $\triangle ABC$

Siga el punt P de la circumferència circumscriu al triangle.

La recta de Simson del punt P equidista del punt P i de l'ortocentre H del triangle $\triangle ABC$.



Teorema de Stewart

Siga un triangle $\triangle ABC$:

Siga N un punt qualsevol sobre el costat \overline{AB}

Aleshores:

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BN} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{AN} - \overline{CN}^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AN} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{AB} = 0$$

$$AC^2 \cdot BN + BC^2 \cdot AN - CN^2 \cdot AB - AN \cdot BN \cdot AB = 0,00$$

$$AB = 4,63 \text{ cm}$$

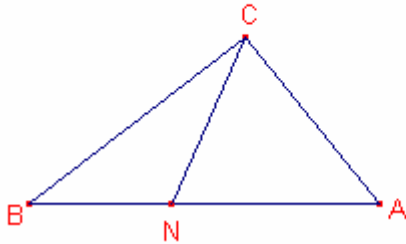
$$BC = 3,60 \text{ cm}$$

$$AC = 2,82 \text{ cm}$$

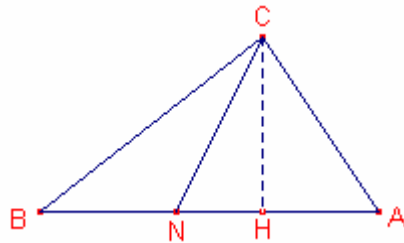
$$CN = 2,40 \text{ cm}$$

$$AN = 2,74 \text{ cm}$$

$$BN = 1,89 \text{ cm}$$



Demostració:



Siga \overline{CH} l'altura del triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Provem que: } a^2 = \overline{CN}^2 + \overline{BN}^2 + 2\overline{BN} \cdot \overline{NH}$$

$$\text{Aplicuem el teorema de Pitàgores al triangle } \triangle CBH \quad a^2 = (\overline{BN} + \overline{NH})^2 + \overline{CH}^2$$

$$\text{Aplicuem el teorema de Pitàgores al triangle } \triangle CNH \quad \overline{CN}^2 = \overline{NH}^2 + \overline{CH}^2$$

Aïllant \overline{CH}^2 de les dues igualtats i igualant:

$$a^2 - (\overline{BN} + \overline{NH})^2 = \overline{CN}^2 - \overline{NH}^2$$

$$\text{Simplificant: } a^2 = \overline{CN}^2 + \overline{BN}^2 + 2\overline{BN} \cdot \overline{NH} \quad (1)$$

$$\text{Anàlogament: } b^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NA}^2 - 2\overline{NA} \cdot \overline{NH} \quad (2)$$

Multiplicant (1) per \overline{NA}

$$\overline{NA} \cdot a^2 = \overline{NA} \cdot \overline{CN}^2 + \overline{NA} \cdot \overline{BN}^2 + 2\overline{BN} \cdot \overline{NA} \cdot \overline{NH} \quad (3)$$

Multiplicant (2) per \overline{BN}

$$\overline{BN} \cdot b^2 = \overline{BN} \cdot \overline{CN}^2 + \overline{BN} \cdot \overline{NA}^2 - 2\overline{BN} \cdot \overline{NA} \cdot \overline{NH} \quad (4)$$

Sumant (3) i (4)

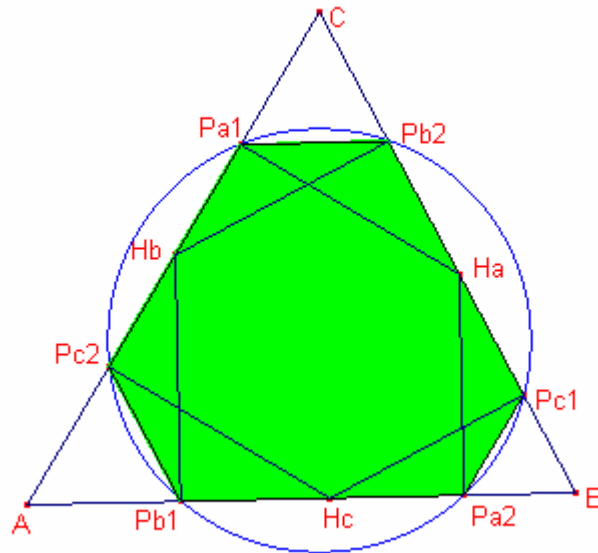
$$\begin{aligned} \overline{AN} \cdot a^2 + \overline{BN} \cdot b^2 &= \overline{AN} \cdot \overline{CN}^2 + \overline{AN} \cdot \overline{BN}^2 + \overline{BN} \cdot \overline{CN}^2 + \overline{BN} \cdot \overline{AN}^2 = \\ &= \overline{CN}^2 (\overline{AN} + \overline{BN}) + \overline{AN} \cdot \overline{BN} (\overline{AN} + \overline{BN}) \end{aligned}$$

Simplificant ($\overline{AN} + \overline{BN} = \overline{AB}$)

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BN} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{AN} - \overline{CN}^2 \cdot \overline{AB} - \overline{AN} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{AB} = 0$$

Teorema de E. Catalan (1814-1894). Circumferència de Taylor.

Si els peus de les altures d'un triangle les projectem sobre els altres costats, s'obtenen 6 punts que formen un hexàgon inscrit en una circumferència.



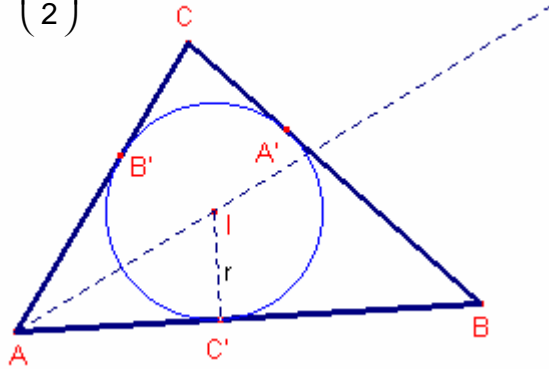
Set teoremes sobre radis.

Teorema 1:

Siga el triangle $\triangle ABC$. Siguen r i R els radis de les circumferències inscrita i circumscria, respectivament.

$$\text{Aleshores: } \frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

Demostració:



Sabem que els radis de la circumferència inscrita i de la circumscrita en funció del costats són:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \text{ on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{Aleshores; } \frac{r}{R} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \quad (1)$$

$$\text{Pel teorema del cosinus: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{p(p-a)}{2bc}$$

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \\ &= \frac{a^2 + (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc}, \end{aligned}$$

$$\text{per tant, } \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\text{Anàlogament: } \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

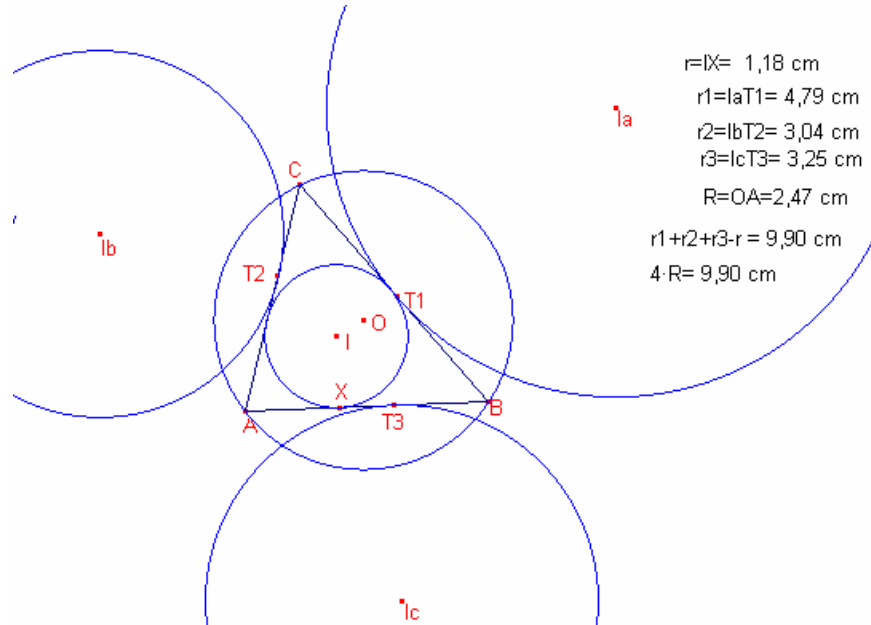
$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right) &= 4 \cdot \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \\ &= 4 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{De (1) i (2) podem concloure que } \frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

Teorema 2

En qualsevol triangle $\triangle ABC$ els radis de la circumferència inscrita r , circumscrita R i els 3 radis de les circumferències exinscrites tenen la següent relació:

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R$$



Demostració:

A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites obtenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

$$r_a = \frac{r \cdot p}{p-a}, \quad r_b = \frac{r \cdot p}{p-b}, \quad r_c = \frac{r \cdot p}{p-c}, \quad \text{on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{També sabem que, } r \cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad R = \frac{abc}{4r \cdot p}$$

$$\text{Calculem } \frac{r_a}{R} + \frac{r_b}{R} + \frac{r_c}{R} - \frac{r}{R}$$

$$\frac{r_a}{R} + \frac{r_b}{R} + \frac{r_c}{R} - \frac{r}{R} = \frac{\frac{rp}{p-a}}{\frac{abc}{4rp}} + \frac{\frac{rp}{p-b}}{\frac{abc}{4rp}} + \frac{\frac{rp}{p-c}}{\frac{abc}{4rp}} - \frac{r}{\frac{abc}{4rp}} =$$

$$= \frac{4r^2p^2}{(p-a)abc} + \frac{4r^2p^2}{(p-b)abc} + \frac{4r^2p^2}{(p-c)abc} - \frac{4r^2p}{abc} =$$

$$= \frac{4}{abc} (p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)) =$$

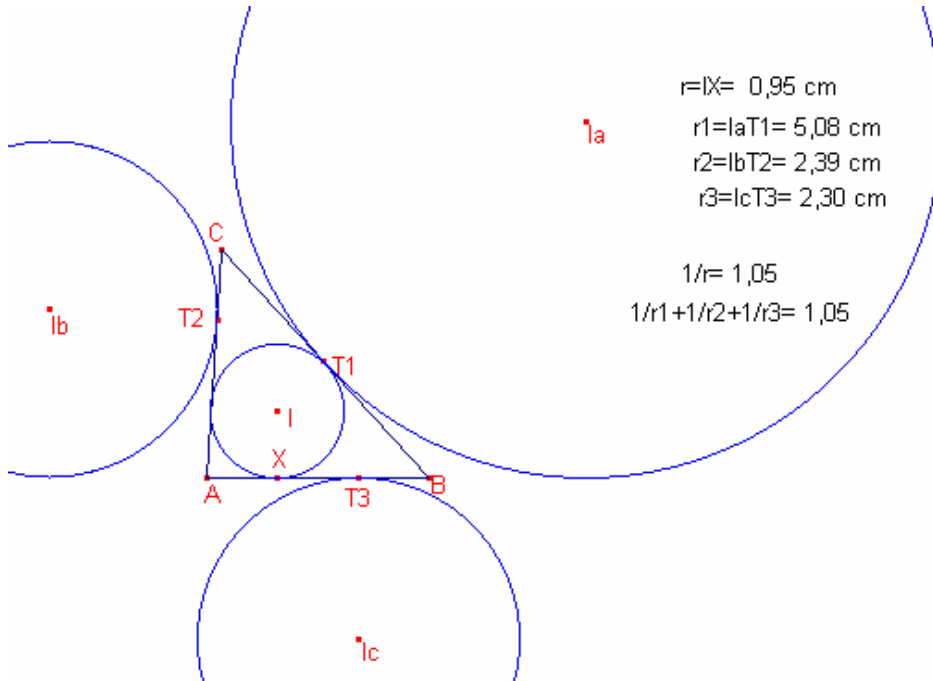
$$= \frac{4}{abc} abc = 4$$

Aleshores, $r_a + r_b + r_c - r = 4R$

Teorema 3:

En qualsevol triangle $\triangle ABC$ la relació dels radis de la circumferència inscrita, i de les exinscrites és la següent:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$



Demostració

A partir de la proporció entre els radis de la circumferència inscrita i les exinscrites obtenim:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}, \quad \frac{r}{r_b} = \frac{p-b}{p}, \quad \frac{r}{r_c} = \frac{p-c}{p}, \quad \text{on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{p-a}{p} + \frac{p-b}{p} + \frac{p-c}{p} = 1$$

Dividint l'expressió per r:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

Nota: Una altra fórmula de radis: $\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1$

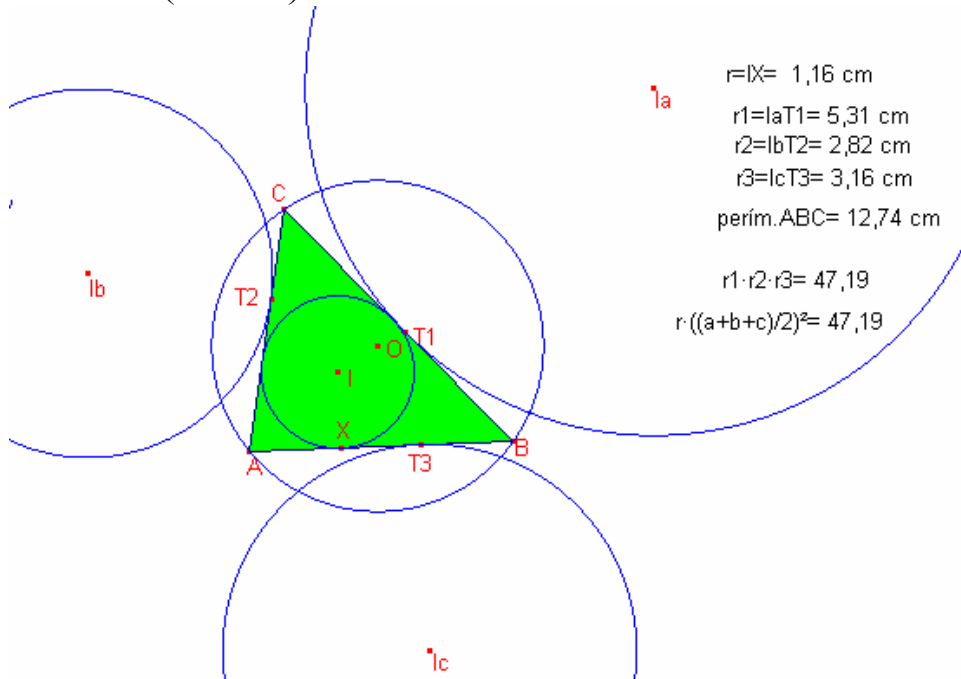
Teorema 4:

Siga el triangle $\triangle ABC$.

Siguen r el radi de la circumferència inscrita i r_a, r_b, r_c els radis de les circumferències exinscrites.

Aleshores:

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2 = rp^2$$



Demostració:

A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites obtenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

$$r_a = \frac{r \cdot p}{p-a}, \quad r_b = \frac{r \cdot p}{p-b}, \quad r_c = \frac{r \cdot p}{p-c}, \quad \text{on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

El radi de la circumferència inscrita en funció dels costats és: $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{r^3 p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r \cdot r^2 \cdot p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = rp^2$$

Teorema d'Euler: Distància entre l' incentre i el circumcentre

Siga el triangle $\triangle ABC$ i siguin R el radi de la circumferència circumscrita (de centre O) i r el radi de la circumferència inscrita (de centre I).

Aleshores:

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

Demostració:

Siga $d = \overline{OI}$.

Siga \overline{AX} la bisectriu a l'angle A .

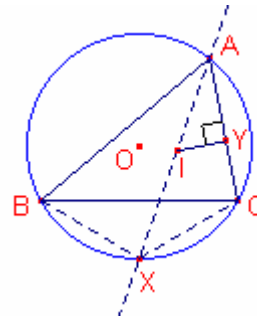
Notem que X és el punt mig de l'arc BC .

Vegem que el triangle $\triangle BIX$ és isòsceles.

$$\angle CBX = \frac{A}{2}, \quad \angle IBC = \frac{B}{2}$$

$$\angle IBX = \frac{A+B}{2}, \quad \angle BIX = \frac{A+B}{2}, \text{ per tant } \triangle BIX \text{ és isòsceles.}$$

$$\text{Aleshores: } \overline{IX} = \overline{XB} = \overline{XC}$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABX$

$$\frac{\overline{XB}}{\sin \frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow \overline{XB} = 2R \cdot \sin \frac{A}{2}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AIY$

$$\overline{IA} = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$$

Apliquem la potencia del punt I respecte de la circumferència circumscrita al triangle

$$R^2 - d^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IX} = 2R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = 2Rr$$

$$\text{Aleshores, } \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

Nota: $R^2 - 2Rr \geq 0$, Aleshores tenim la desigualtat, $R \geq 2r$.

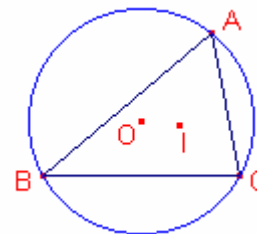
Teorema 6:

Siguin r, R els radis de les circumferències inscrita i circumscrita d'un triangle

qualsevol $\triangle ABC$ i siga $d = \overline{OI}$ la distància entre els centres de les dues circumferències anteriors.

Aleshores:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d}$$



Demostració:

Pel teorema d'Euler sobre la distància entre l' incentre i el circumcentre:

$d^2 = \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ on R és el radi de la circumferència circumscrita i r el radi de la circumferència inscrita.

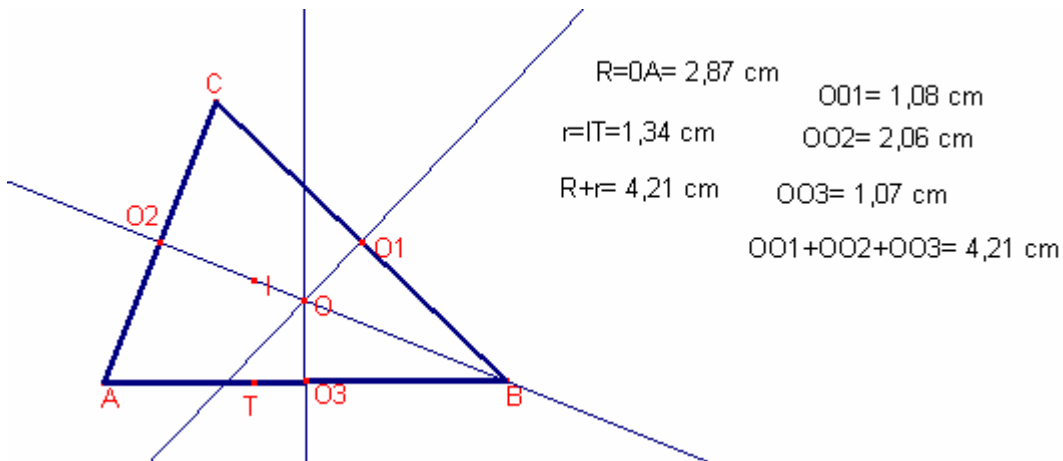
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{2R}{(R-r)(R+r)} \Leftrightarrow 2rR = R^2 - d^2 \Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$$

Teorema de Carnot

Siga el triangle $\triangle ABC$ acutangle. Siguen els punts O, I el circumcentre i l' incentre del triangle, respectivament. Siguen R, r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita al triangle, respectivament.

Siguen O_1, O_2, O_3 els punts mig dels costats.

Aleshores: $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$



Demostració:

Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$ de radi R .

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Siguen O_1, O_2, O_3 els punts mig dels costats a, b, c , respectivament.

Àrea $\triangle ABC = rp$, on p és el semiperímetre del triangle $\triangle ABC$.

Àrea $\triangle ABC = \text{Àrea } \triangle ABO + \text{Àrea } \triangle BCO + \text{Àrea } \triangle ACO$.

Per tant, $2 \cdot rp = a \cdot \overline{OO_1} + b \cdot \overline{OO_2} + c \cdot \overline{OO_3}$ (1)

El quadrilàter AO_2OO_3 és cíclic ja que $\angle AO_3O = \angle AO_2O = 90^\circ$

Els triangles $\triangle ABC, \triangle AO_2O_3$ són semblants i la raó de semblança és 2:1

Per tant el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle AO_2O_3$ és $\frac{R}{2}$

$\angle OO_2O_3 = 90^\circ - C, \angle OO_3O_2 = 90^\circ - B$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AO_2O_3$,

$\frac{\overline{OO_2}}{\sin(90^\circ - B)} = \frac{\overline{OO_3}}{\sin(90^\circ - C)} = 2 \left(\frac{R}{2} \right)$. Aleshores, $\overline{OO_2} = R \cdot \cos B, \overline{OO_3} = R \cdot \cos C$

Anàlogament, $\overline{OO_1} = R \cdot \cos A$

Sabem que:

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$$

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$$

$$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$$

Sumant les tres equacions:

$$2p = (b + c) \cos A + (a + c) \cos B + (a + b) \cos C$$

Multiplicant l'equació per R

$$2pR = (b + c)R \cdot \cos A + (a + c)R \cdot \cos B + (a + b)R \cdot \cos C$$

Aleshores:

$$2pR = (b + c)\overline{OO_1} + (a + c)\overline{OO_2} + (a + b)\overline{OO_3} \quad (2)$$

Sumant (1) i (2)

$$2pr + 2pR = (a + b + c)\overline{OO_1} + (a + b + c)\overline{OO_2} + (a + b + c)\overline{OO_3}$$

Simplificant:

$$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$$

Nota: si A és obtusangle la fórmula és: $-\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$

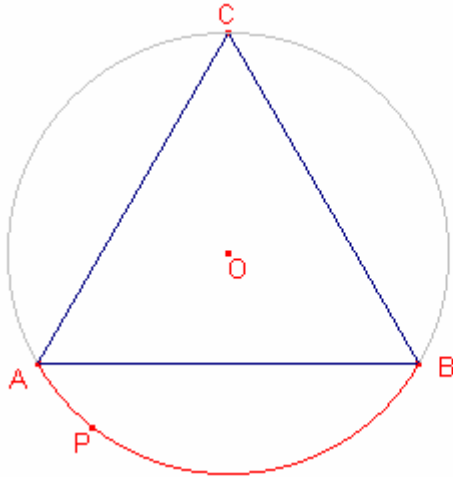
Quatre teoremes sobre triangles equilàters

Teorema 1:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.

Siga P un punt en l'arc menor de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

Proveu que $\overline{CP} = \overline{AP} + \overline{BP}$



$$CP = 5,50 \text{ cm}$$

$$AP = 1,11 \text{ cm}$$

$$BP = 4,39 \text{ cm}$$

$$AP + BP = 5,50 \text{ cm}$$

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ el costat del triangle equilàter $\triangle ABC$

El quadrilàter APBC es inscrit en la circumferència circumscrita del triangle $\triangle ABC$.

Aplicant el teorema de Ptolomeu:

$$\overline{CP} \cdot \overline{AB} = \overline{AP} \cdot \overline{BC} + \overline{BP} \cdot \overline{AC}$$

Per ser el triangle rectangle:

$$\overline{CP} \cdot a = \overline{AP} \cdot a + \overline{BP} \cdot a$$

Simplificant:

$$\overline{CP} = \overline{AP} + \overline{BP}.$$

Teorema 2:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat a

Siga P un punt de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Aleshores:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 5 \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

Solució:

Sense restar generalització podem suposar que

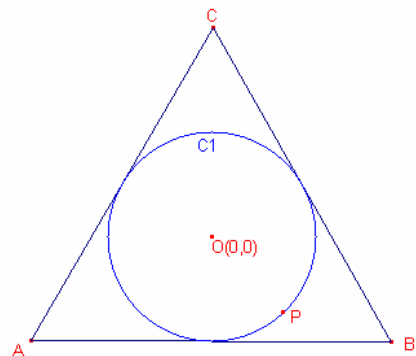
$a=1$

Considerem el plànol cartesià, d'origen el

baricentre del triangle $\triangle ABC$

Aleshores:

Les coordenades dels vèrtexs del triangle són:



$$A\left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

El radi de la circumferència inscrita és $\frac{\sqrt{3}}{6}$

L'equació de la circumferència inscrita és:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

Siga un punt P de la circumferència, $P\left(x, \pm\sqrt{\frac{1}{12} - x^2}\right)$

- Considerem el cas $P\left(x, \sqrt{\frac{1}{12} - x^2}\right)$

Calculem les distàncies del punt P als vèrtexs:

$$d(A,P) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{12} - x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{12} - x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(C,P) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{12} - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{12} - x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{12} - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

- El cas $P\left(x, -\sqrt{\frac{1}{12} - x^2}\right)$ és anàleg.

Teorema 3:

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat a.

Siga P un punt de la circumferència circumscriba al triangle $\triangle ABC$.

Aleshores:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 2a^2$$

Solució:

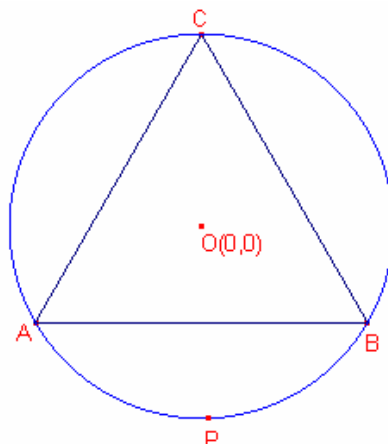
Sense restar generalització podem suposar que $a=1$

Considerem el pla cartesià, d'origen el

baricentre del triangle $\triangle ABC$

Aleshores:

Les coordenades dels vèrtexs del triangle són:



$$A\left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

El radi de la circumferència circumscrita és $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

L'equació de la circumferència inscrita és:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Siga un punt P de la circumferència, $P\left(x, \pm\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$

- Considerem el cas $P\left(x, \sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$

Calculem les distàncies del punt P als vèrtexs:

$$d(A,P) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(C,P) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2$$

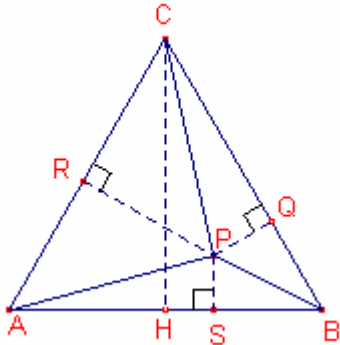
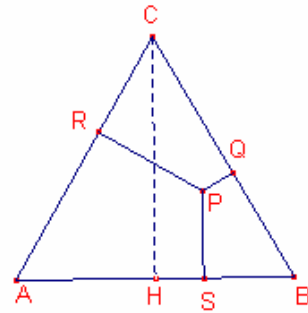
- El cas $P\left(x, -\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$ és anàleg.

Teorema de Vincenzo Viviani (1622-1703)

En un triangle equilàter $\triangle ABC$ la suma de les perpendiculars d'un punt P interior al triangle (o del triangle) als costats és igual a l'altura del triangle.

Demostració:

Siga $a = \overline{AB}$, el costat del triangle equilàter $\triangle ABC$



Considerem els triangles $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle ACP$

$\text{Àrea } \triangle ABC = \text{Àrea } \triangle ABP + \text{Àrea } \triangle BCP + \text{Àrea } \triangle ACP$

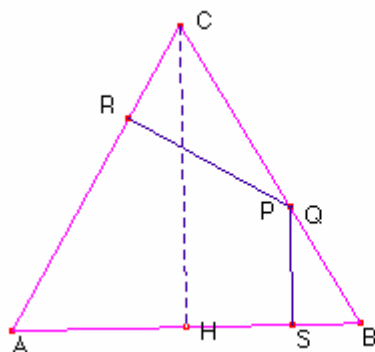
$$\frac{a \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{a \cdot \overline{PS}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PQ}}{2} + \frac{a \cdot \overline{PR}}{2}$$

Simplificant:

$\overline{CH} = \overline{PS} + \overline{PQ} + \overline{PR}$, la suma de les perpendiculars d'un punt P interior al triangle (o del triangle) als costats és igual a l'altura del triangle.

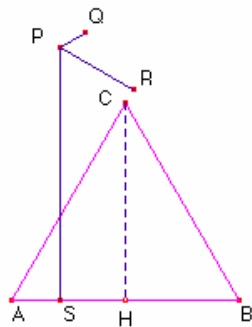
Generalització:

Si el punt P pertany al triangle $\triangle ABC$ es té el mateix resultat.



CH= 5,02 cm
PQ= 0,00 cm
PR= 3,06 cm
PS= 1,96 cm
PQ+PR+PS: 5,02 cm

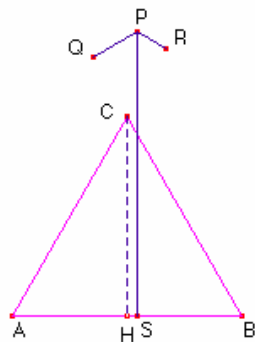
Si el punt P és exterior al triangle ABC , depèn de la regió on es trobe es té el següent resultat:



$$CH = 3,93 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} PQ &= 0,57 \text{ cm} \\ PR &= 1,68 \text{ cm} \\ PS &= 5,04 \text{ cm} \end{aligned}$$

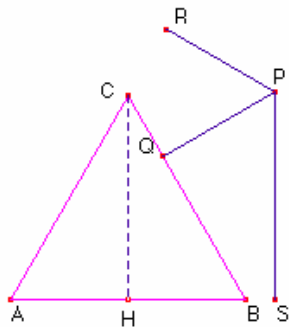
$$\begin{aligned} \text{abs}(PR+PS-PQ) &: 6,15 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PS-PR) &: 3,93 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PR-PS) &: 2,79 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$CH = 3,93 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} PQ &= 1,01 \text{ cm} \\ PR &= 0,67 \text{ cm} \\ PS &= 5,61 \text{ cm} \end{aligned}$$

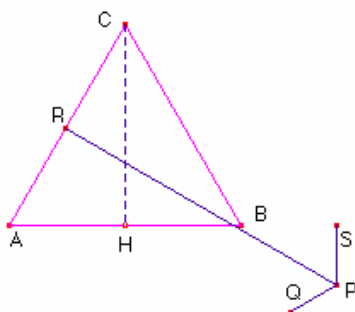
$$\begin{aligned} \text{abs}(PR+PS-PQ) &: 5,27 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PS-PR) &: 5,95 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PR-PS) &: 3,93 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$CH = 3,93 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} PQ &= 2,49 \text{ cm} \\ PR &= 2,41 \text{ cm} \\ PS &= 4,01 \text{ cm} \end{aligned}$$

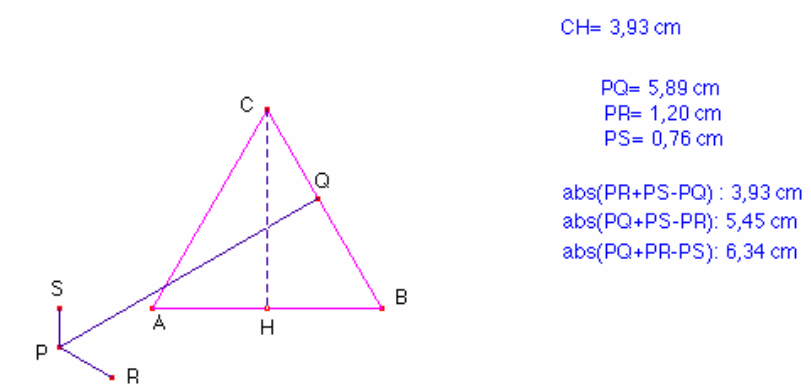
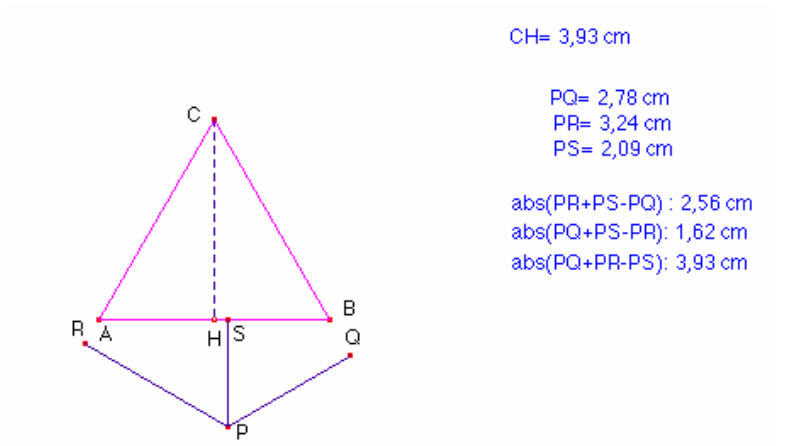
$$\begin{aligned} \text{abs}(PR+PS-PQ) &: 3,93 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PS-PR) &: 4,09 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PR-PS) &: 0,89 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$CH = 3,93 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} PQ &= 1,04 \text{ cm} \\ PR &= 6,12 \text{ cm} \\ PS &= 1,15 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{abs}(PR+PS-PQ) &: 6,24 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PS-PR) &: 3,93 \text{ cm} \\ \text{abs}(PQ+PR-PS) &: 6,01 \text{ cm} \end{aligned}$$



Tres teoremes sobre l'ortocentre i l'altura.

Teorema 1

En qualsevol $\triangle ABC$ considerem la altura al vèrtex A i el peu de l'altura D.
Siga H el ortocentre del triangle.
L'altura al vèrtex A talla la circumferència circumscrita al triangle en el punt K.
Aleshores: $\overline{HD} = \overline{DK}$

Demostració:

Considerem la circumferència circumscrita al triangle

$\triangle ABC$.

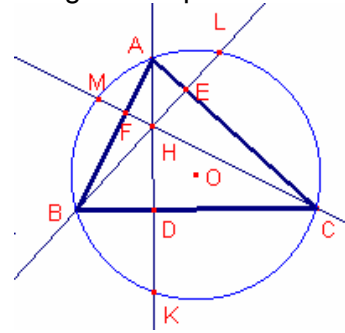
Podem notar que $\angle BAD = \angle FCB$ per ser angles sobre rectes perpendiculars.

$\angle BAK = \angle BCK$ per ser angles inscrits que abracen el mateix arc.

Aleshores els triangles $\triangle DHC, \triangle DKC$ són iguals perquè són rectangles, tenen un angle agut igual i un catet \overline{DC} igual.

Aleshores, $\overline{HD} = \overline{DK}$

Anàlogament, $\overline{HE} = \overline{EL}$, $\overline{HF} = \overline{FM}$.



Teorema 2:

Siga H l'ortocentre d'un triangle $\triangle ABC$.

El producte dels segments que cada altura queda dividida per l'ortocentre és igual en les tres altures.

Demostració:

Considerem la circumferència C_1 de diàmetre \overline{AB} .

Els punts H_a, H_b pertanyen a la circumferència C_1 .

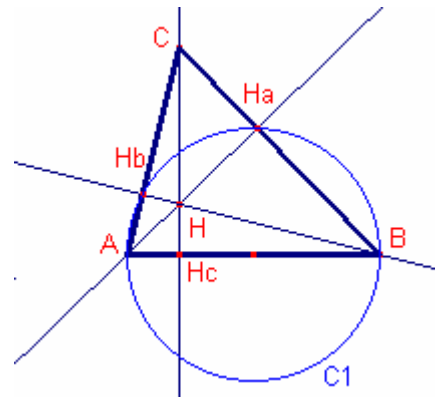
Aplicant la potència del punt H (ortocentre) respecte de la circumferència C_1 .

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}$$

Anàlogament dibuixant la circumferència C_2 de

diàmetre \overline{AC} demostrariem que:

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c}$$



Teorema 3:

Donat un triangle $\triangle ABC$. Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

Siga $h = \overline{AH_a}$ l'altura al costat a.

Aleshores:

$$h = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$$

Demostració:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$

Aplicant raons trigonomètriques $h = c \cdot \sin B$

Aleshores, $h = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

Tres teoremes sobre el baricentre i les mitjanes.

Teorema 1

En un triangle $\triangle ABC$, siga G el baricentre.
Es compleix la següent igualtat:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 3(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2)$$

Demostració:

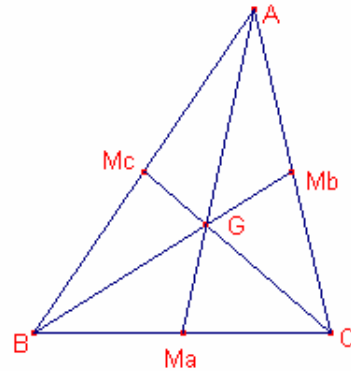
Les mesures de les mitjanes són:

$$m_A = \overline{AM_a} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$m_B = \overline{BM_b} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \quad m_C = \overline{CM_c} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

Per la propietat del baricentre $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM_a}$, $\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BM_b}$, $\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CM_c}$

$$\begin{aligned} \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 &= \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

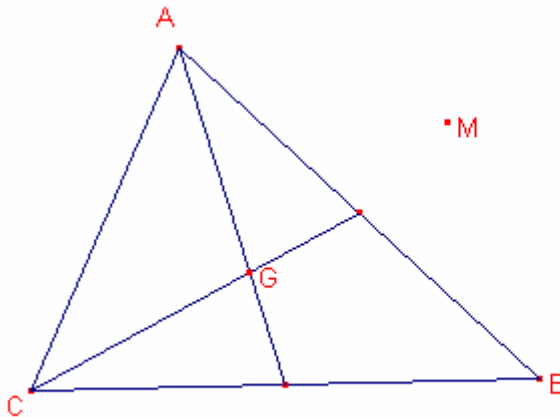


Propietat del baricentre 2.

Siga el triangle $\triangle ABC$ i G el seu baricentre.
Siga M un punt qualsevol del plànol.

Aleshores:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3 \cdot \overline{MG}^2$$



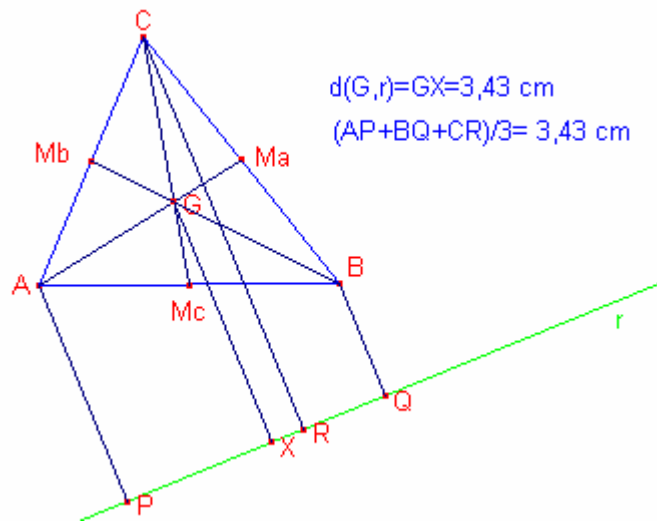
MA= 3,68 cm
MB=3,60 cm
MC= 6,55 cm
AG= 3,11 cm
BG= 4,08 cm
CG= 3,29 cm
MG= 3,28 cm

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 69,34 \text{ cm}^2$$

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3 \cdot MG^2 = 69,34 \text{ cm}^2$$

Teorema 3

La distància del baricentre d'un triangle $\triangle ABC$ a una recta r exterior al triangle és igual a la mitjana aritmètica de les distàncies dels vèrtexs a la recta.

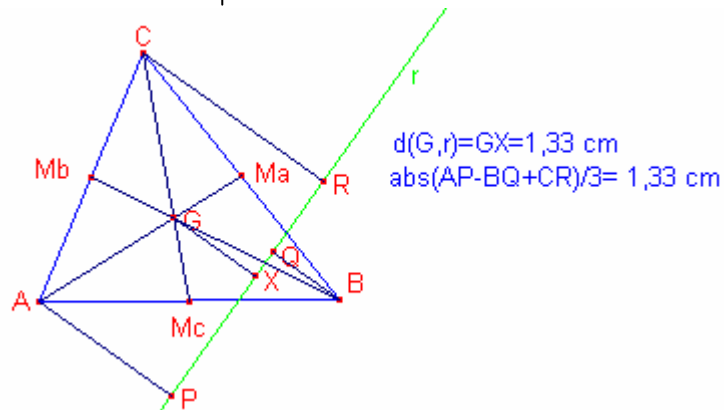


Si la recta r talla el triangle $\triangle ABC$, aleshores es dóna una de les tres igualtats:

$$d(G,r) = \left| \frac{d(A,r) + d(B,r) - d(C,r)}{3} \right|$$

$$d(G,r) = \left| \frac{d(A,r) - d(B,r) + d(C,r)}{3} \right|$$

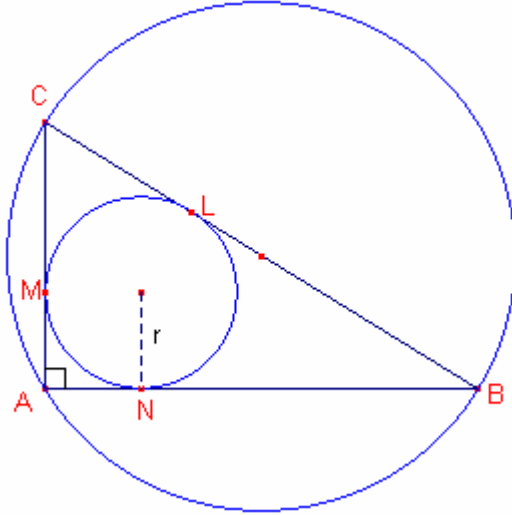
$$d(G,r) = \left| \frac{-d(A,r) + d(B,r) + d(C,r)}{3} \right|$$



Tres teoremes sobre triangles rectangles.

Teorema 1:

La suma dels catets d'un triangle rectangle $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$ és igual a la suma dels diàmetres de les circumferències inscrites i circumscrites.



Demostració:

Siga D el diàmetre de la circumferència circumscrita. Sigui d el diàmetre de la circumferència inscrita.

Siga $p = \frac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre.

$$\overline{AM} = \overline{AN} = p - a$$

$$\overline{BL} = \overline{BN} = p - b$$

Per ser $\hat{A} = 90^\circ$ el diàmetre de la circumferència circumscrita és la hipotenusa del triangle $\triangle ABC$, $D = a$

El radi de la circumferència inscrita és $r = p - a$

$$D + d = a + 2(p - a) = 2p - a = b + c$$

Per tant, la suma dels diàmetres de les circumferències inscrita i circumscrita és igual a la suma dels catets d'un triangle rectangle.

Teorema 2:

Considerem el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A=90^\circ$.

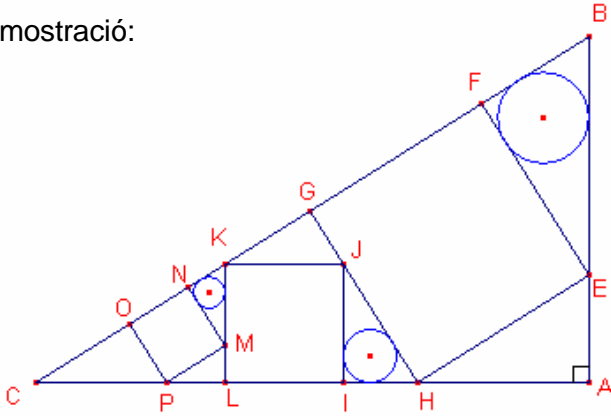
Sobre el que fem la construcció següent:

(els polígons són quadrats) i les circumferències inscrites als triangles.

Aleshores el radi de la circumferència mitjana és la mitjana geomètrica dels radis de

les altres dues circumferències, és a dir, $R_{mitjana} = \sqrt{R_{gran} \cdot R_{petita}}$

Demostració:



Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle FEB$, $\triangle IHJ$, $\triangle NMK$ són semblants.

Siga x_1 el costat del quadrat EFGH. Siga x_2 el costat del quadrat IJKL. Siga x_3 el costat del quadrat MNOP. Siguen $y_1 = \overline{BE}$, $y_2 = \overline{HJ}$, $y_3 = \overline{KL}$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle IHJ$ són semblants, aleshores, $\frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{b}$ (1)

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle GKJ$ són semblants, aleshores, $\frac{x_1 - y_2}{x_2} = \frac{c}{a}$ (2)

De (1) i (2) tenim que: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{bc + a^2}{ab}$

Els triangles $\triangle FEB$, $\triangle IHJ$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{x_1}{x_2} = \frac{bc + a^2}{ab} = k$

Per tant, $\frac{R_{gran}}{R_{mitjana}} = k$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle NMK$ són semblants, aleshores, $\frac{y_3}{x_3} = \frac{a}{b}$ (3)

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle LMP$ són semblants, aleshores, $\frac{x_2 - y_3}{x_3} = \frac{c}{a}$ (4)

De (3) i (4) tenim que: $\frac{x_2}{x_3} = \frac{bc + a^2}{ab}$

Els triangles $\triangle IHJ$, $\triangle NMK$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{x_2}{x_3} = \frac{bc + a^2}{ab} = k$

Per tant, $\frac{R_{mitjana}}{R_{petita}} = k$

Aleshores, $\frac{R_{gran}}{R_{mitjana}} = \frac{R_{mitjana}}{R_{petita}}$, o bé, $R_{mitjana} = \sqrt{R_{gran} \cdot R_{petita}}$

Teorema 3:

a) La mitjana d'un triangle rectangle traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

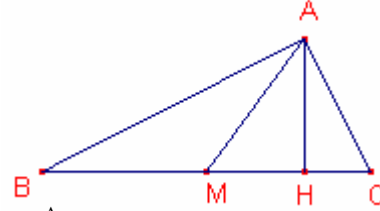
b) Si un triangle una de les mitjanes és mesura la meitat del costat sobre la que està traçada, el triangle és rectangle.

Demostració:

a)

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$

Siguen la mitjana \overline{AM} i l'altura \overline{AH}



$$\overline{AM}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{AH}^2 = \quad (\text{ja que el triangle } \triangle MAH \text{ és rectangle})$$

$$= (\overline{MC} - \overline{HC})^2 + \overline{AH}^2 =$$

$$= \overline{MC}^2 + \overline{HC}^2 - 2\overline{MC} \cdot \overline{HC} + \overline{AH}^2 =$$

$$= \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{MC} \cdot \overline{HC} \quad (\text{ja que } \overline{AC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AH}^2)$$

$$\text{Per tant } \overline{AM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{MC} \cdot \overline{HC} \quad (1)$$

$$\overline{AM}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{AH}^2 = \quad (\text{ja que el triangle } \triangle MAH \text{ és rectangle})$$

$$= (\overline{BH} - \overline{BM})^2 + \overline{AH}^2 =$$

$$= \overline{BH}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{BM} + \overline{AH}^2 =$$

$$= \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{BM} = \quad (\text{ja que } \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2)$$

$$= \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{MC} \quad (\text{ja que } \overline{BM} = \overline{MC})$$

$$\text{Per tant } \overline{AM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH} \cdot \overline{MC} \quad (2)$$

Sumant (1)+(2)

$$2\overline{AM}^2 = 2\overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{MC} \cdot (\overline{BH} + \overline{HC}) =$$

$$= 2\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{MC} \cdot \overline{BC} = \quad (\text{ja que } \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2)$$

$$= 2\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BC} \cdot \overline{BC} = \quad (\text{ja que } 2\overline{MC} = \overline{BC})$$

$$= 2\overline{MC}^2$$

Aleshores, $\overline{AM} = \overline{MC}$

b)

Considerem el triangle $\triangle ABC$

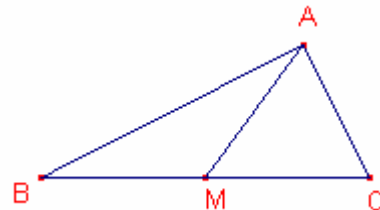
Si es compleix que $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$,
aleshores,

el triangle $\triangle BMA$ és isòsceles, per tant $\angle BAM = \hat{B}$

el triangle $\triangle AMC$ és isòsceles, per tant $\angle CAM = \hat{C}$.

Per tant, $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$,

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$, per tant, el triangle és rectangle.

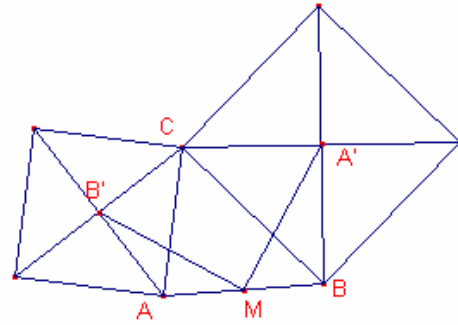


Dos teoremes sobre un triangle i 3 quadrats sobre els costats

Lema:

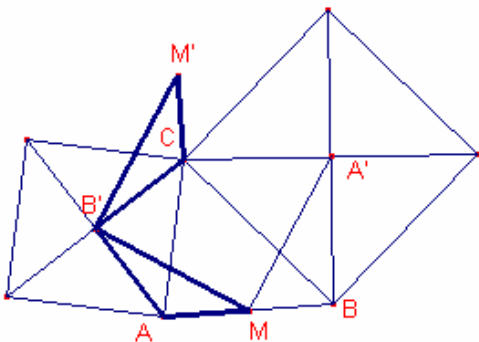
Sobre l'exterior de dos costats d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem 2 quadrats (veure figura).
Siguen A' , B' els centres dels quadrats. Siga M el punt mig de l'altre costat.

Aleshores els segments $\overline{A'M}$, $\overline{B'M}$ són perpendiculars i mesuren el mateix.



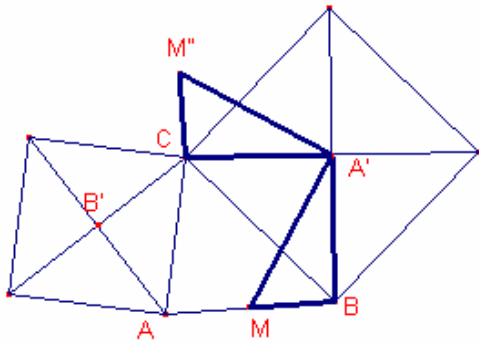
Demostració:

Considerem la rotació de centre B' i angle 90° del triangle $\triangle B'AM$ que té per imatge $\triangle B'AM'$.



$\overline{AM} = \overline{CM'}$, $\overline{AB'} = \overline{B'C}$, $\overline{B'M} = \overline{B'M'}$, a més a més, $\overline{B'M}$, $\overline{B'M'}$ són perpendiculars.

Considerem la rotació de centre A' i angle -90° del triangle $\triangle A'BM$ que té per imatge $\triangle A'CM''$.



$\overline{BM} = \overline{CM''}$, $\overline{A'B} = \overline{A'C}$, $\overline{A'M} = \overline{A'M''}$, a més a més, $\overline{A'M}$, $\overline{A'M''}$ són perpendiculars.

Provem que $M' = M''$

La recta que passa pels punts C , M' i la recta que passa pels punts C , M'' són ambdues perpendiculars a la recta que passa pels punts A , B .

Aleshores C , M' , M'' estan alineats.

Com que C no està entre M' i M'' i a més a més, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM'} = \overline{CM''}$

Tenim que $M' = M''$

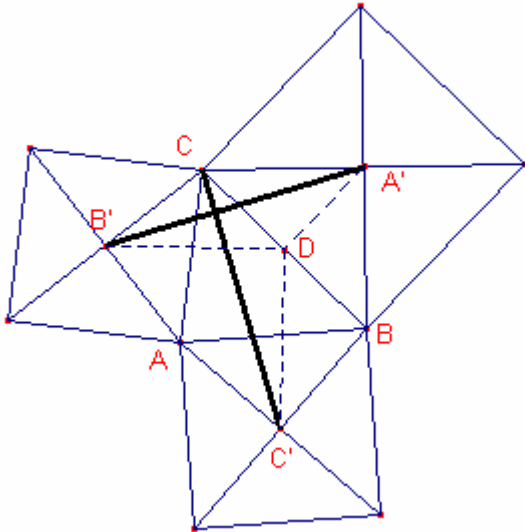
Aleshores, $\overline{MA'M'B'}$ és un quadrat.

Per tant, $\overline{A'M} = \overline{B'M}$ i són perpendiculars.

Teorema 1:

Sobre l'exterior dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ dibuixem 3 quadrats (veure figura).
Siguen A' , B' , C' els centres dels quadrats.

Aleshores els segments $\overline{A'B'}$, $\overline{CC'}$ són perpendiculars i mesuren el mateix.



Siga D el punt mig del costat \overline{BC}

Pel lema anterior: $\overline{DB'} = \overline{DC'}$ i $\angle B'DC' = 90^\circ$.

$\overline{CD} = \overline{DA'}$ i $\angle CDA' = 90^\circ$

Considerem la rotació de centre D i angle 90° positiu.

La imatge de B' és C' .

La imatge de A' és C.

Aleshores els triangles $\triangle DCC'$, $\triangle DA'B'$ són iguals.

Per tant, $\overline{A'B'} = \overline{CC'}$

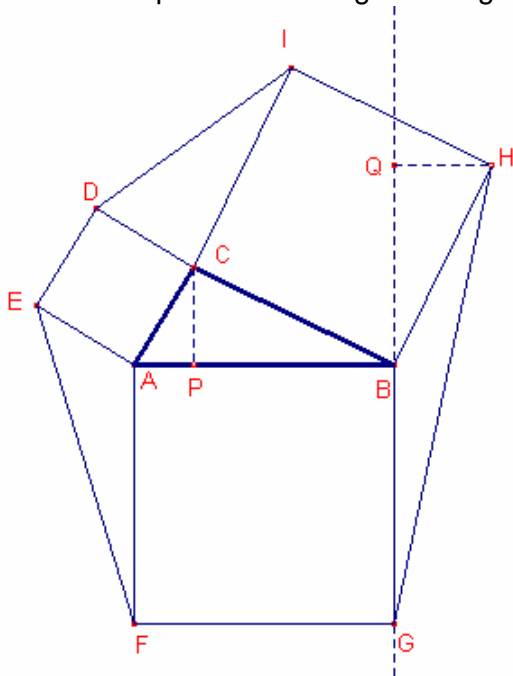
També la recta que passa pels punt C, C' és la imatge de la recta que passa pels punts A' , B' en la rotació anterior.

Per tant, $\overline{A'B'}$, $\overline{CC'}$ són perpendiculars.

Teorema de Cross

Sobre l'exterior dels costats d'un triangle qualsevol $\triangle ABC$ construïm 3 quadrats i pels vèrtexs lliures s'uneixen formant 3 triangles. (Veure figura).

Les àrees d'aquests tres triangles són iguals a l'àrea del triangle $\triangle ABC$.



Demostració:

Siga \overline{CP} perpendicular al costat c.

Siga \overline{QH} perpendicular a la recta que passa pels punts B, G.

Provem que els triangles $\triangle BCP$, $\triangle BHQ$ són iguals.

Els angles $\angle CBP$, $\angle QBH$ són iguals per ser els dos complementaris de l'angle $\angle CBQ$.

Els angles $\angle CPB$, $\angle HGB$ són iguals per ser angles rectes.

$\overline{BC} = \overline{BH}$ (per construcció del quadrat).

Per tant, $\triangle BCP$, $\triangle BHQ$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CP} = \overline{GH}$

Notem que \overline{CP} , \overline{GH} són les altures dels triangles $\triangle ABC$, $\triangle BGH$.

Notem que $\overline{AB} = \overline{BG}$ (per construcció del quadrat).

Aleshores, els triangles $\triangle ABC$, $\triangle BGH$ tenen la mateixa àrea (per tenir igual base i igual altura).

Anàlogament provaríem que els triangles $\triangle ABC$, $\triangle CID$, $\triangle AEF$ tenen la mateixa àrea.

Altres teoremes sobre triangles.

Teorema

Siga el triangle $\triangle ABC$ i la seua circumferència inscrita C de radi r .

Siguen les rectes tangents a la circumferència C paral·leles als costats del triangle, les quals determinen amb els vèrtexs

els triangles $\triangle PQC$, $\triangle RSB$, $\triangle TUA$.

En cada triangle, dibuixem la circumferència inscrita de radis

r_1, r_2, r_3 , respectivament.

Aleshores:

$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

Demostració:

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ és:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \text{on } p \text{ és el semiperímetre del triangle } \triangle ABC$$

Siguen h_a l'altura del triangle referida al costat $a = \overline{BC}$ del triangle $\triangle ABC$

L'altura (aplicant la fórmula d'Heró) mesura:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle TUA$ són semblants.

Siga h_3 l'altura del triangle $\triangle TUA$ referida al costat \overline{TU} .

$$h_3 = h_a - 2r$$

Aleshores:

$$\frac{r}{r_3} = \frac{h_a}{h_3}$$

$$\frac{r}{r_3} = \frac{h_a}{h_a - 2r} = \frac{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}}{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} - 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-a}$$

Anàlogament:

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle RSB$ són semblants, aleshores:

$$\frac{r}{r_2} = \frac{p}{p-b}$$

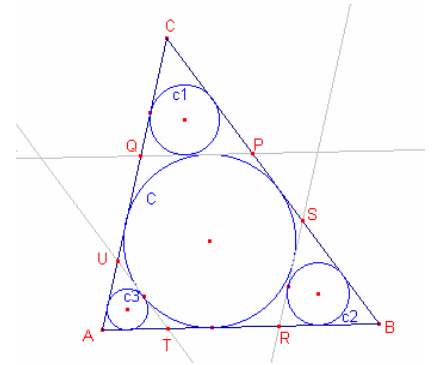
Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle PQC$ són semblants, aleshores:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{p}{p-c}$$

$$\text{Per tant: } r_3 = \frac{r(p-a)}{p}, \quad r_2 = \frac{r(p-b)}{p}, \quad r_1 = \frac{r(p-c)}{p}$$

Aleshores:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{r}{p}(p-a + p-b + p-c) = r$$

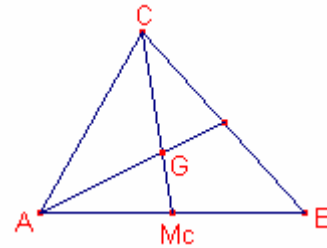


Teorema: Coordenades cartesianes del baricentre d'un triangle.

Siga el triangle $\triangle ABC$. $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$

Siga G el baricentre del triangle, aleshores

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$



Demostració:

Siga M_c el punt mig del segment \overline{AB} .

Les seues coordenades són: $M_c\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$

El baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

Aleshores, $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$

Siga $G(x, y)$ el baricentre.

$$\overrightarrow{CG} = (x - c_1, y - c_2), \quad \overrightarrow{CM_c} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2} - c_1, \frac{a_2 + b_2}{2} - c_2\right)$$

Aleshores,

$$(x - c_1, y - c_2) = \frac{2}{3} \left(\frac{a_1 + b_1}{2} - c_1, \frac{a_2 + b_2}{2} - c_2\right)$$

Igualant les components:

$$\begin{cases} x - c_1 = \frac{a_1 + b_1}{3} - \frac{2}{3}c_1 \\ y - c_2 = \frac{a_2 + b_2}{3} - \frac{2}{3}c_2 \end{cases} \quad \text{La solució del sistema és} \quad \begin{cases} x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \\ y = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \end{cases}$$

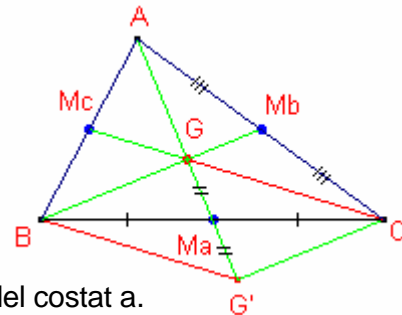
$$\text{Per tant, } G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Nota: El teorema s'hauria pogut provar determinant la intersecció de dues rectes mitjanes.

Teorema: (Propietat vectorial del baricentre)

Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga G el baricentre.

Aleshores, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$



Demostració:

Siga G' El simètric de G respecte del punt mig M_a del costat a.

$BG'CG$ és un paral·lelogram.

Aleshores, $\vec{GC} = \vec{BG'}$ (1)

Aplicant la propietat del baricentre:

$\vec{AG} = \vec{GG'}$ (2)

$$\vec{GB} + \vec{BG'} = \vec{GG'}$$

Substituint (1) i (2)

$$\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GG'} = -\vec{GA}$$

Aleshores, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

Punts del triangle

Punt de Miquel

Siga un triangle $\triangle ABC$.

Siga la recta r que passa pels punts B, C .

Siga la recta s que passa pels punts A, C .

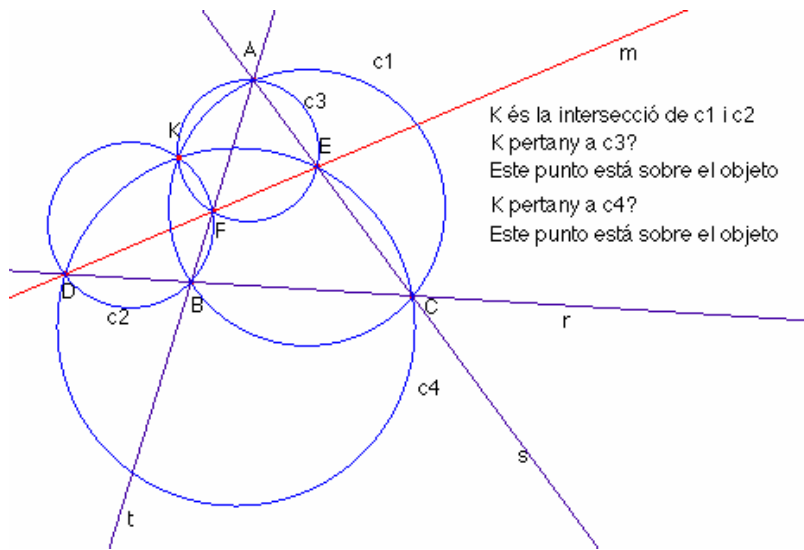
Siga la recta t que passa pels punts A, B .

Siga una recta m que talla les rectes r, s, t en els punts D, E, F , respectivament.

Considerem les circumferències C_1, C_2, C_3, C_4 circumscrites als triangles

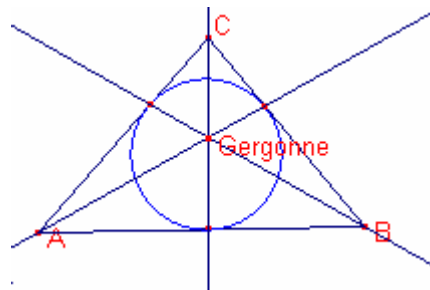
$\triangle ABC, \triangle DBF, \triangle AEF, \triangle DCE$ respectivament.

Aleshores, les circumferències C_1, C_2, C_3, C_4 concorren en el punt K (anomenat punt Miquel). Auguste Miquel 1838.



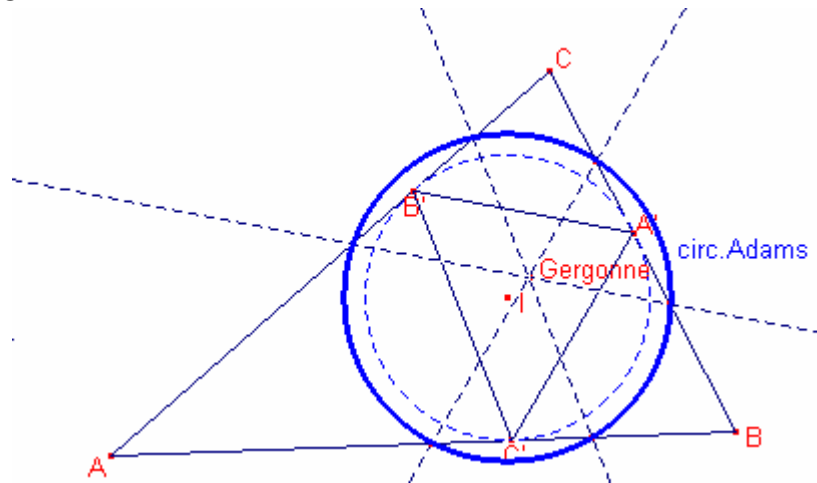
Punt de Gergonne 1771-1859

En un triangle $\triangle ABC$ les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle (en els costats oposats) s'intersecten en un punt, anomenat el punt de Gergonne.



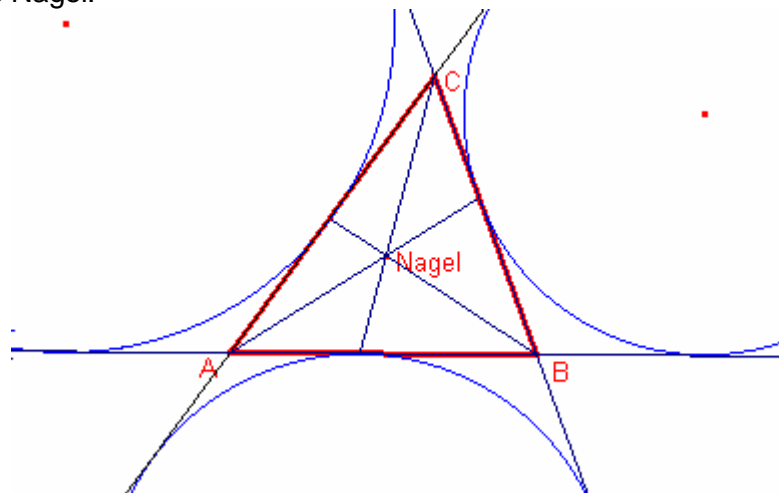
La circumferència d'Adams

Si pel punt de Gergonne d'un triangle $\triangle ABC$ es tracen paral·leles als costats del triangle de contacte interior $\triangle A'B'C'$ (triangle que forma els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle), aquestes paral·leles tallen els costats del triangle en sis punts. Aquests punts estan en una mateixa circumferència, anomenada circumferència d'Adams. El centre de la circumferència d'Adams és l'incentre I del triangle $\triangle ABC$.



Punt de Nagel

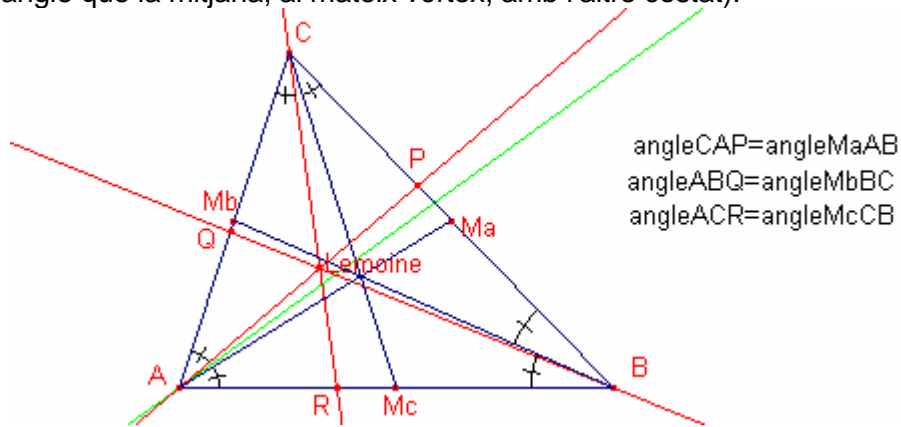
En un triangle $\triangle ABC$ les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de tangència dels circumferències exinscrites (en els costats oposats), s'intersecten en un punt anomenat de Nagel.



Punt de Lemoine.

En qualsevol triangle $\triangle ABC$ les isogonals de les mitjanes concorren en un punt anomenat punt de Lemoine.

(La isogonal a una mitjana és la recta que passa per un vèrtex i forma amb el costat el mateix angle que la mitjana, al mateix vèrtex, amb l'altre costat).

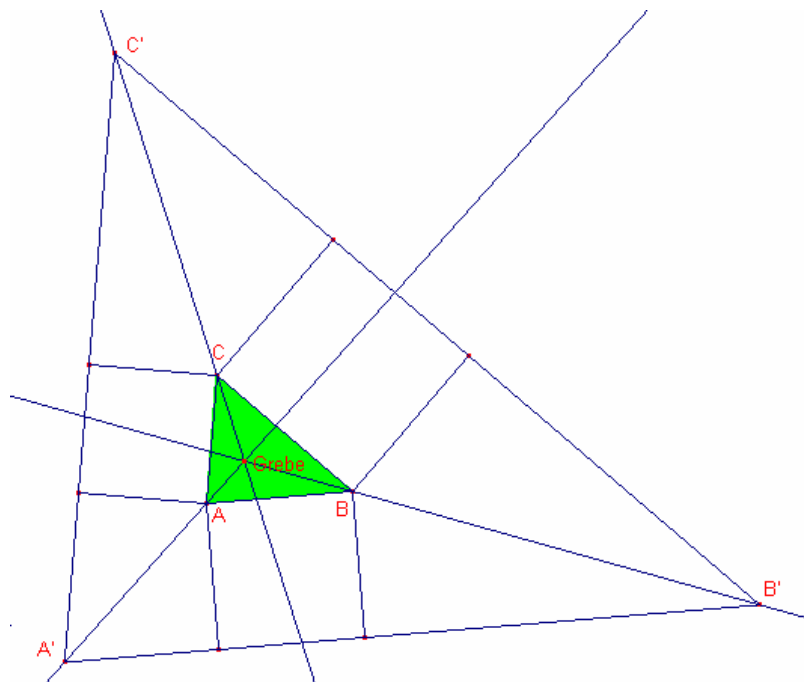


Punt de Grebe.

Sobre el costats d'un triangle qualsevol $\triangle ABC$ construïm 3 quadrats (exterior al triangle) i prolongats els vèrtexs lliures d'aquests quadrats construïm el triangle

$\triangle A'B'C'$ (veure figura).

Aleshores les rectes AA' , BB' , CC' concorren en un punt que s'anomena punt de Grebe (Ernst Wilhelm Grebe (1804-1874)). Aquest punt coincideix amb el punt de Lemoine.

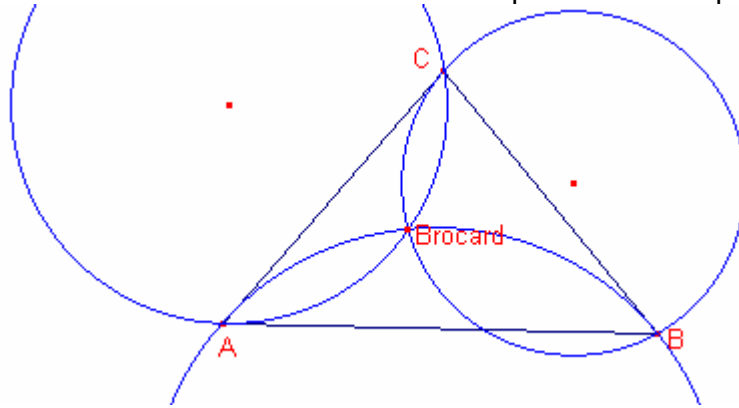


Punt de Brocard 1845-1922

Siga un triangle $\triangle ABC$ qualsevol. Considerem les següents circumferències:

- Circumferència que passa pels punts A, B i és tangent a BC
- Circumferència que passa pels punts B, C i és tangent a CA
- Circumferència que passa pels punts C, A i és tangent a AB

Les tres circumferències anteriors concorren en un punt anomenat punt de Brocard.



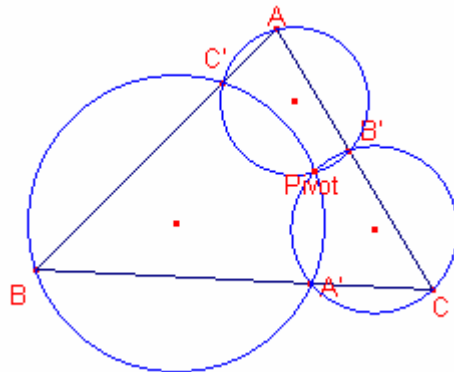
Punt pivot

Siga un triangle qualsevol $\triangle ABC$.

Siguen els punts A' sobre el costat a, B' sobre el costat b, C' sobre el costat c.

Considerem les circumferències circumscrites als triangles $\triangle AB'C'$, $\triangle BA'C'$, $\triangle CA'B'$

Les tres circumferències concorren en un punt que s'anomena pivot.



Aquesta proposició l'he trobada en la Lletra 54 del Club Cabri. Genova (Suïssa)
L'adreça de la pàgina web és: <http://www.edu.ge.ch/cptic/clubs/cabri>

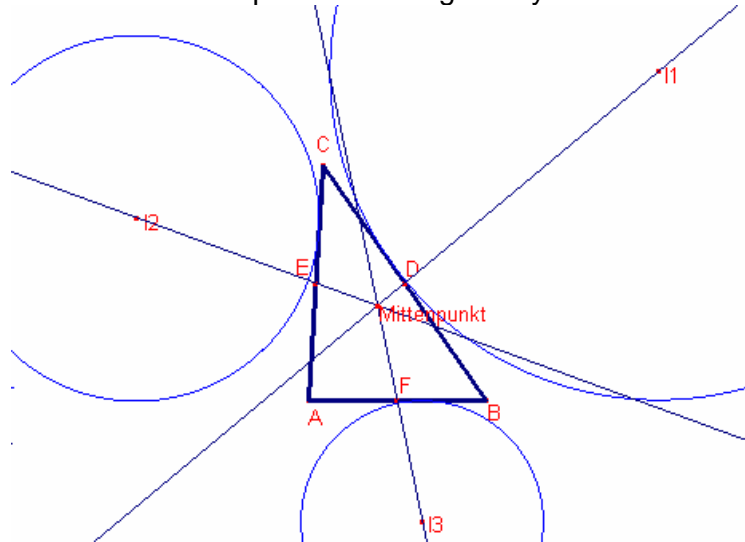
Teorema: Mittenpunkt.

Siga el triangle $\triangle ABC$ siguen D, E, F els punts mig dels costats a, b, c respectivament.

Siguen I_1, I_2, I_3 els centres de les circumferències circumscrites al triangle.

Les rectes $r(D, I_1), r(E, I_2), r(F, I_3)$ s'intersecten en un punt Mittenpunkt.

Aquest teorema ha estat estudiat per C. Von Nagel l'any 1836.



Punt d'Apoloni.

Siga el triangle $\triangle ABC$.

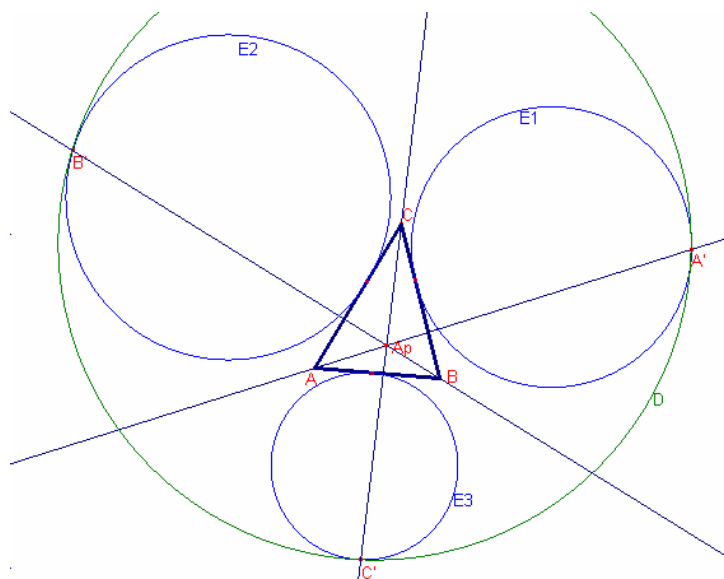
Siguen E_1, E_2, E_3 les circumferències exinscrites al triangle.

Siga D la circumferència tangent exterior a les 3 circumferències anteriors (circumferència d'Apoloni).

Siguen A', B', C' els punts de tangència.

Aleshores: les rectes $r(A, A'), r(B, B'), r(C, C')$ s'intersecten en un punt (Punt d'Apoloni).

Aquest teorema ha estat estudiat l'any 1987 per C. Kimberling, Shiko Iwata, Hidetosi Fukagawa.



Punt d'Exeter.

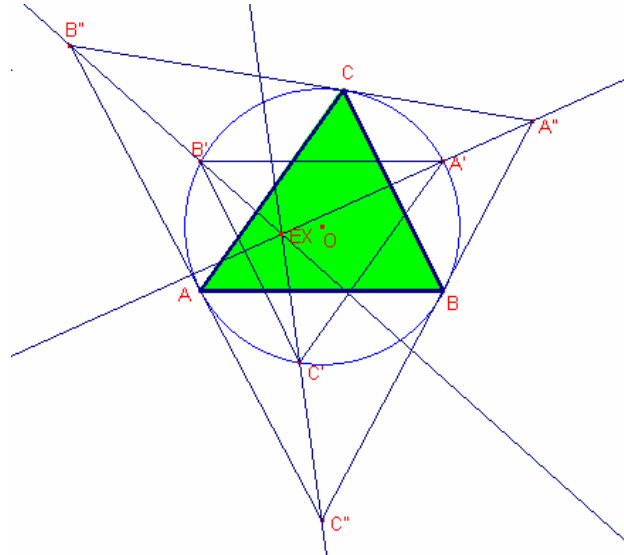
Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga la circumferència circumscrita al triangle

Considerem el triangle $\triangle A'B'C'$ simètric del triangle anterior respecte del circumcentre.

Considerem el triangle $\triangle A''B''C''$ format per les rectes tangents a la circumferència circumscrita al triangle que passen pels punts A, B, C respectivament.

Aleshores: les rectes $r(A',A'')$, $r(B',B'')$, $r(C',C'')$ s'intersecten en un punt que s'anomena punt d'Exeter.

Aquest teorema va ser estudiat l'any 1986 a Phillips Exeter Academy



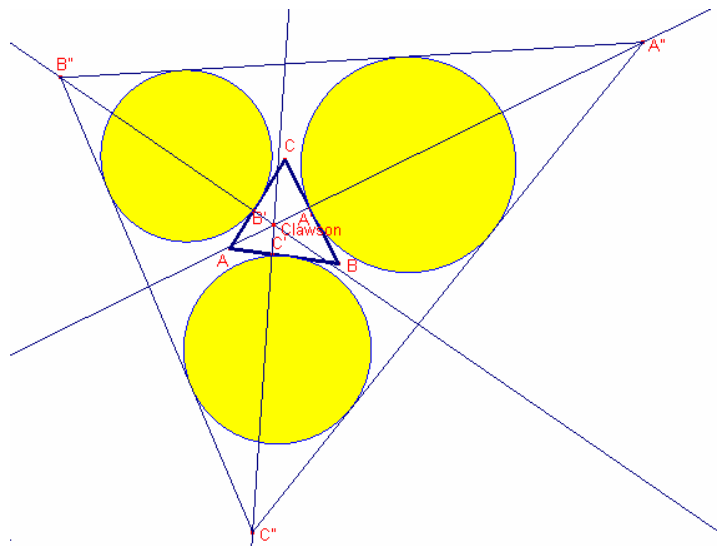
Punt de Clawson.

Siga el triangle $\triangle ABC$. Siguen A' , B' , C' els peus de les alures als costats a, b, c, respectivament. Siguen E_1 , E_2 , E_3 les

circumferències exinscrites al triangle $\triangle ABC$. Considerem el triangle $\triangle A''B''C''$ format per les rectes tangents exteriors a les 3 circumferències exinscrites.

Aleshores: les rectes $r(A',A'')$, $r(B',B'')$, $r(C',C'')$ s'intersecten en un punt que s'anomena punt de Clawson.

Aquest teorema ha estat demostrat per R. Lyness i G. R. Veldkamp l'any 1983



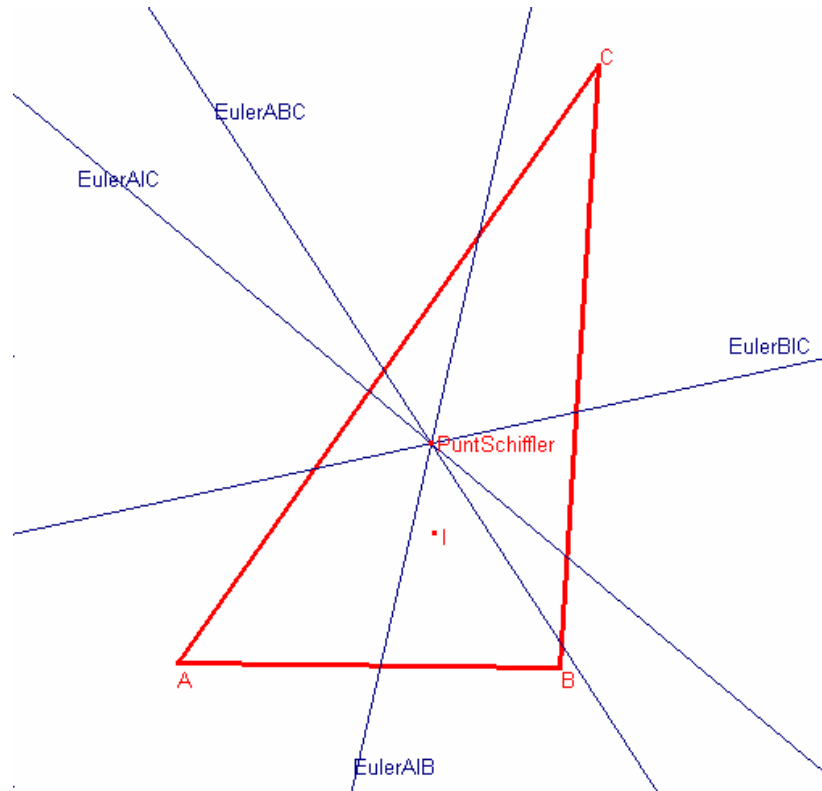
Punt de Schiffler.

Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga I l'incentre del triangle.

Considerem [les rectes d'Euler](#) dels triangles $\triangle ABC, \triangle AIB, \triangle AIC, \triangle BIC$

Aleshores: les quatre rectes s'intersecten en un punt, que s'anomena punt de Schiffler.

Aquest teorema va ser provat l'any 1986 per Kurt Schiffler, G. R. Veldkamp, i W. A. van der Spek.

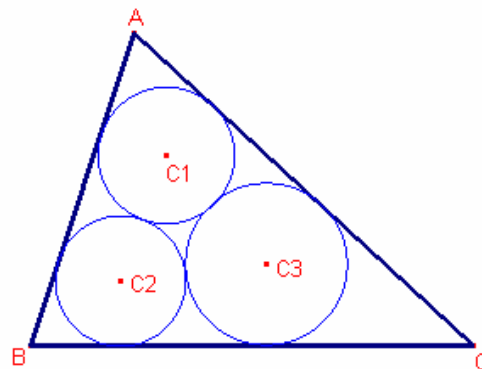


Punts de Malfatti

Circumferències de Malfatti

Donat un triangle $\triangle ABC$ s'anomenen circumferències de Malfatti a les tres circumferències inscrites en el triangle de manera que les circumferències siguin tangents entre elles i tangents cadascuna d'elles a dos costats del triangle. (Veure l'aplet)

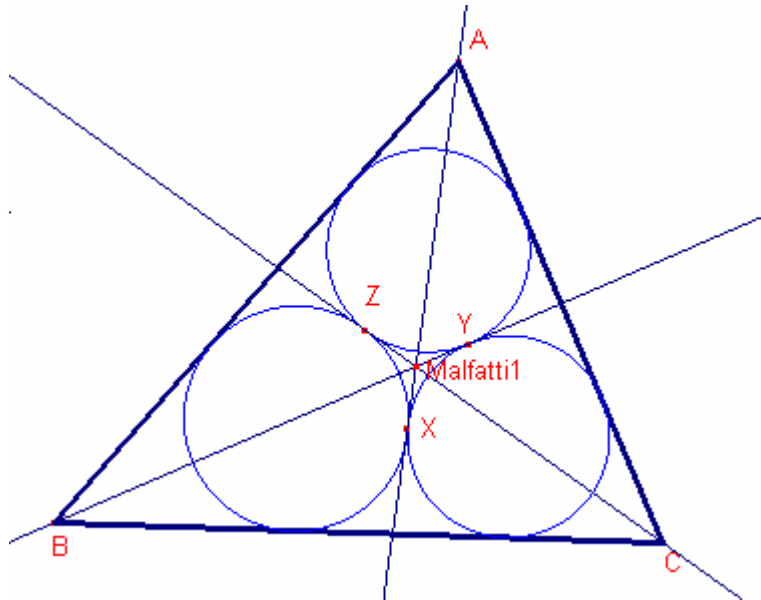
Aquest problema va ser proposat per **Gian Francesco Malfatti** (1731-1807)



Les circumferències de Malfatti tenen les següents propietats:

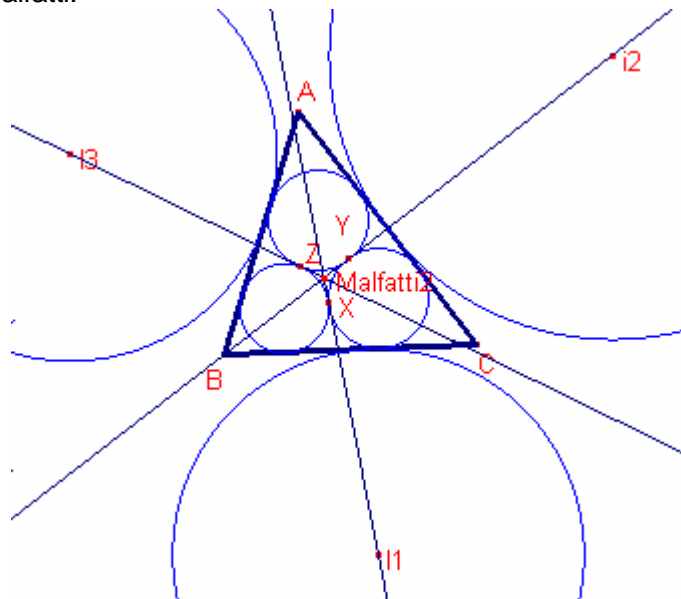
Primer punt de Malfatti

Donat un triangle $\triangle ABC$, dibuixem les tres circumferències de Malfatti.
Siguen X, Y, Z els punts de tangència de les tres circumferències (Vegeu la figura).
Aleshores les rectes $r(A,X)$, $r(B,Y)$, $r(C,Z)$ s'intersecten en un punt que s'anomena primer punt de Malfatti.



Segon punt de Malfatti

Donat un triangle $\triangle ABC$, dibuixem les tres circumferències de Malfatti.
Siguen X, Y, Z els punts de tangència de les tres circumferències (Vegeu la figura).
Siguen I_1, I_2, I_3 els centres de les circumferències exincries.
Aleshores les rectes $r(I_1,X)$, $r(I_2,Y)$, $r(I_3,Z)$ s'intersecten en un punt que s'anomena segon punt de Malfatti.



Problemes

Problemes

- 1.- Demostreu que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle entre la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex.
- 2.- La mitjana traçada sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix l'angle recte en una raó 1:2 i és igual a m.
Determineu el valor dels costats.
- 3.- Siga un punt de la hipotenusa d'un triangle rectangle que dista igual dels dos catets, divideix a la hipotenusa en dos segments de 40 i 30 cm.
Determineu els catets.
- 4.- Determineu la bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle de catets x i y.
- 5.- Des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle s'han traçat la bisectriu que divideix la hipotenusa en dos segments m i n.
Determineu l'altura traçada sobre la hipotenusa.
- 6.- En un triangle rectangle les mitjanes traçades des dels angles aguts mesuren $\sqrt{52}$, $\sqrt{73}$. Calculeu la hipotenusa.
- 7.- El perímetre d'un triangle rectangle és igual a 60 m i l'altura traçada sobre la hipotenusa mesura 12 m.
Determineu els costats del triangle.
- 8.- En un triangle rectangle $\triangle ABC$, siga la mitjana $\overline{AM} = m$, siga la bisectriu \overline{AP} , siga $\overline{MP} = n$.
Determineu els catets.
- 9.- Determineu l'angle que formen la mitjana i bisectriu d'un angle agut d'un triangle rectangle, en funció d'aquest angle.
- 10.- Demostreu que si un triangle la raó de les tangents dels angles aguts és igual a la raó dels quadrats dels sinus d'aquests angles, aleshores el triangle és isòsceles o rectangle.
- 11.- Demostreu que si en un triangle es verifica $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ aleshores el triangle és isòsceles.
- 12.- La base d'un triangle isòsceles és $4\sqrt{2}$ m. La mitjana traçada sobre el costat lateral és igual a 5 m.
Calculeu el costat lateral.
- 13.- El costat lateral d'un triangle isòsceles mesura 4m, la mitjana traçada sobre el costat lateral 3 m.
Calculeu la base del triangle.

14.- La base d'un triangle isòsceles és 12 m i el costat lateral mesura 18 m. Sobre els costats iguals es tracen les altures.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus d'aquestes altures.

15.- La base d'un triangle isòsceles és 12 i el costat lateral mesura 18.
Es tracen sobre els costats laterals les bisectrius.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus de les bisectrius.

16.- Siga el triangle $\triangle ABC$ isòsceles $\overline{AB} = \overline{BC}$. A l'altura \overline{BH} s'agafa un punt M tal que els angles $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ són iguals.
En quina raó estan \overline{BM} i l'altura si l'angle de la base és α .

17.- L'angle de la base d'un triangle isòsceles és α .
Determineu la raó entre la base i la mitjana traçada sobre un costat lateral.

18.- Determineu els angles d'un triangle isòsceles si sabem que l'ortocentre divideix per la meitat l'altura traçada sobre la base.

19.- Les rectes r, s, t són paral·leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.
Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

20.- Siga un triangle isòsceles $\triangle ABC$. Sobre el costat \overline{BC} determineu el punt D tal que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1}{4}$.
Calculeu $\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}$ on M és la intersecció del segment \overline{AD} i l'altura \overline{BE} .

21.- La base d'un triangle isòsceles és a. L'angle oposat a la base 2α .
Calculeu la bisectriu sobre el costat lateral.

22.- En un triangle equilàter es traça un segment que uneix un vèrtex i un punt del costat oposat E tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}$.
Calculeu l'angle que forma aquest segment i cada costat.

23.- L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\arctg \frac{3}{4}$.
Calculeu l'angle ω que formen la mitjana i la bisectriu traçades al costat lateral.

24.- Determineu l'angle desigual d'un triangle isòsceles si la mitjana a un costat lateral i la base formen un angle $\arcsin \frac{3}{5}$.

25.- Siga un triangle isòsceles tal que $\hat{B} = 110^\circ$. En el seu interior es determina el punt M que forma els angles $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle MCA = 25^\circ$.
Calculeu l'angle $\angle CMB$.

26.- Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.

27.- La bisectriu d'un angle d'un triangle divideix el costat oposat en segments de 2 cm. i 4 cm. L'altura traçada sobre el mateix costat és igual a $\sqrt{15}$ cm. Determineu el triangle i classifiqueu-lo.

28.- Determineu la raó que hi ha entre la suma dels quadrats de les mitjanes i la suma dels quadrats dels costats d'un triangle.

29.- Classifiqueu un triangle sabent que les mitjanes compleixen $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

30.- Dos costats d'un triangle mesuren a, b i les mitjanes sobre aquests costats formen 90° . Calculeu l'altre costat.

31.- En un triangle $\triangle ABC$ tracem la bisectriu \overline{AD} . Determineu \overline{BC} sabent que $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = \overline{BD}$.

32.- En un triangle $\triangle ABC$ $\overline{BC} = 12$ $\overline{AC} = 8$ i l'angle $\hat{A} = 2\hat{B}$
Calculeu \overline{AB}

33.- L'altura d'un triangle mesura 6 cm i divideix l'angle en una proporció 2:1 i la base en 2 segments el menor dels quals mesura 3 cm.
Determineu els costats del triangle.

34.- L'altura d'un triangle divideix els angles en proporció 2:1 i la base en dos segments en proporció k:1 ($k > 0$).
Determineu l'angle major de la base.

35.- En un triangle acutangle $\triangle ABC$ l'angle agut format per les altures \overline{AD} , \overline{CE} és $\alpha = \angle ABC$. Sabent que $\overline{AD} = x$ $\overline{CE} = y$, calculeu \overline{AC} .

36.- La base d'un triangle és 4. La mitjana sobre la base és $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ un dels angles aguts de la base és 15° .
Calculeu l'angle agut format per la mitjana i la base.

37.- En un triangle $\triangle ABC$ $\hat{A} = 30^\circ$ $\hat{B} = 50^\circ$. Demostreu que $c^2 = b(a + b)$.

38.- Siguen dos triangles $\triangle ABC$ $\triangle A'B'C'$ tal que $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$
Demostreu que $aa' = bb' + cc'$.

39.- Siga el triangle $\triangle ABC$ els angles del qual estan en proporció 4:2:1
Demostreu que els costats compleixen $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

40.- L'altura, la bisectriu i la mitjana traçades des d'un vèrtex d'un triangle divideixen l'angle en 4 parts iguals.

Determineu els angles del triangle.

41.- Siga \overline{CD} l'altura del triangle $\triangle ABC$.

Determineu la dependència dels angles \hat{A}, \hat{B} sabent que $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

42.- Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.

Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.

43.- Siga $\triangle ABC$ un triangle rectangle $A = 90^\circ$.

Si els costats del triangle rectangle estan en progressió geomètrica la raó de proporcionalitat és $\sqrt{\Phi}$.

44.- De tots els triangles isòsceles circumscrits en un semicercle de radi R determineu el de menor perímetre.

Calculeu també la raó entre l'altura del triangle (sobre el costat desigual) i el radi R.

45.- Siga el triangle $\triangle ABC$ de incentre I.

Siga P el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts B, I.

Siga Q el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts C, I.

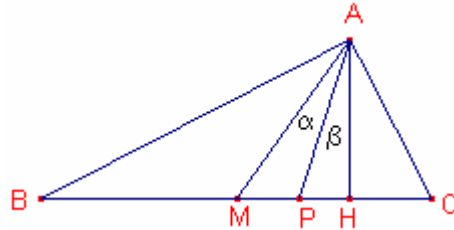
Aleshores, $\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}} = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$

46.- Un triangle $\triangle ABC$ és rectangle si i només si $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

Problema 1

Demostreu que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle entre la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex.

Solució:



Siguen la mitjana \overline{AM} , l'altura \overline{AH} , i la bisectriu \overline{AP} .

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Per tant,

$\overline{AM} = \overline{MC} \Rightarrow \triangle AMC$ és isòsceles.

Aleshores $\hat{C} = 45^\circ + \alpha$

$\hat{P} + 45^\circ + \hat{C} = 180^\circ$

$\hat{P} + \beta = 90^\circ \Rightarrow \hat{P} = 90^\circ - \beta$

Per tant $90^\circ - \beta + 45^\circ + 45^\circ + \alpha = 180^\circ$

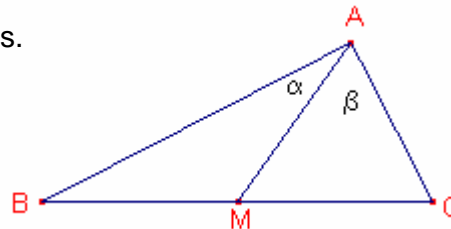
Podem concloure que $\beta = \alpha$.

Problema 2

La mitjana traçada sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix l'angle recte en una raó 1:2 i és igual a m.

Determineu el valor dels costats.

Solució:



Siga la mitjana $\overline{AM} = m$

En un triangle rectangle $\triangle ABC$ $A = 90^\circ$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Aleshores, $\overline{BC} = 2\overline{AM} = 2m$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ aleshores } \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$$

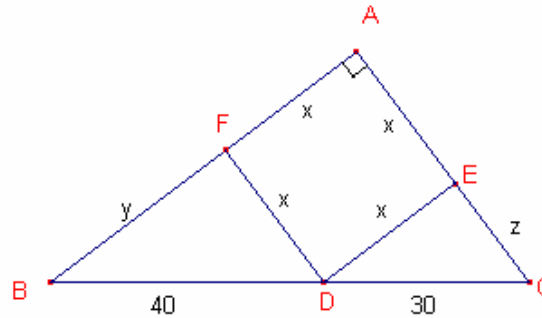
$\triangle AMC$ és equilàter $\overline{AM} = m \Rightarrow \overline{AC} = m$

$\triangle AMB$ és isòsceles, per tant $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}$

Problema 3

Siga un punt de la hipotenusa d'un triangle rectangle que dista igual dels dos catets, divideix a la hipotenusa en dos segments de 40 i 30 cm. Determineu els catets.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$ $A = 90^\circ$

Siga el punt D sobre el costat \overline{BC} tal que dista una distància x dels altres dos costats:
 $\overline{DF} = \overline{DE} = x$, DEAF és un quadrat.

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{(x+y)(x+z)}{2}$$

$$\text{Àrea del triangle} = x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xz}{2}$$

$$\frac{(x+y)(x+z)}{2} = x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{xz}{2}, \text{ aleshores } x^2 = yz$$

Com que $\triangle DEC$ és rectangle $x^2 + z^2 = 30^2$

Com que $\triangle BDF$ és rectangle $x^2 + y^2 = 40^2$

Siga el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 = yz \\ x^2 + z^2 = 30^2 \\ x^2 + y^2 = 40^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = yz \\ yz + z^2 = 900 \\ yz + y^2 = 1600 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 \\ y = 32 \\ z = 18 \end{cases}$$

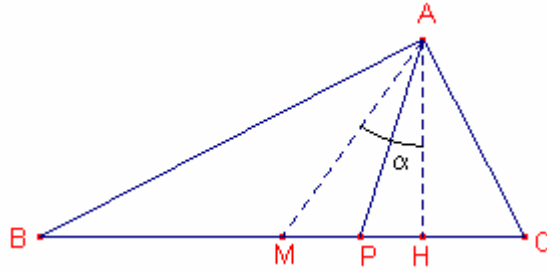
$$\overline{AB} = x + y = 56$$

$$\overline{AC} = x + z = 42$$

Problema 4

Determineu la bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle de catets x i y .

Solució:



Siguen la mitjana \overline{AM} , l'altura \overline{AH} , i la bisectriu \overline{AP} .

Siga l'angle $\alpha = \angle MAH$

$$\overline{AB} = x \quad \overline{AC} = y \quad \overline{BC} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

$$\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

$$\text{L'àrea} \left[\triangle ABC \right] = \frac{xy}{2}, \quad \text{L'àrea} \left[\triangle ABC \right] = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \overline{AH}}{2}.$$

Igualant les àrees:

$$\frac{xy}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \overline{AH}}{2} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Com que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle que formen la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex. (problema 1).

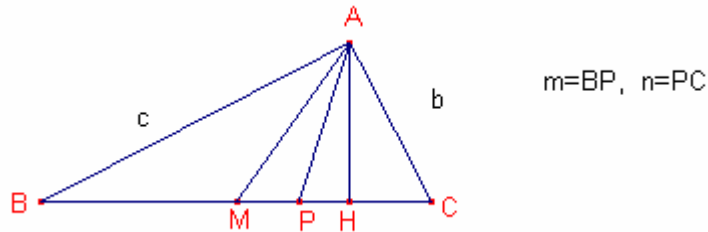
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Aleshores } \overline{AP} = \frac{\overline{AH}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{\frac{1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}xy}{x + y}$$

Problema 5

Des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle s'ha traçat la bisectriu que divideix la hipotenusa en dos segments m i n .
Determineu l'altura traçada sobre la hipotenusa.

Solució:



Siguen la mitjana \overline{AM} , l'altura \overline{AH} , i la bisectriu \overline{AP} .

Siguen els segments $\overline{BP} = m$, $\overline{PC} = n$. Siguen $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$

La bisectriu d'un triangle divideix el costat que talla en segments proporcionals als costats adjacents. Per tant:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$

Per les àrees $\frac{m+n}{2} \overline{AH} = \frac{bc}{2}$

Com que $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$ és rectangle $c^2 + b^2 = (m+n)^2$

Considerem el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{m} = \frac{b}{c} \\ bc = (m+n)\overline{AH} \\ b^2 + c^2 = (m+n)^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{n}{m}c \\ \frac{n}{m}c^2 = (m+n)\overline{AH} \\ \frac{n^2}{m^2}c^2 + c^2 = (m+n)^2 \end{array} \right.$$

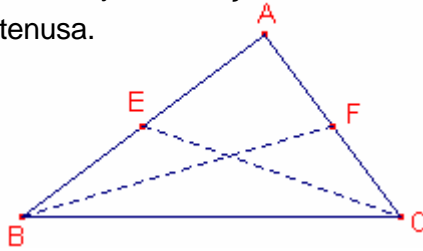
Dividint les dues últimes equacions obtenim:

$$\overline{AH} = \frac{nm(m+n)}{n^2 + m^2}$$

Problema 6

En un triangle rectangle les mitjanes traçades de dels angles aguts mesuren $\sqrt{52}$, $\sqrt{73}$. Calculeu la hipotenusa.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.

Siguen les mitjanes \overline{BF} , \overline{CE}

Siguen $\overline{BC} = x$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ $\overline{BF} = \sqrt{73}$ $\overline{CE} = \sqrt{52}$

Com que $\triangle AFB$ és rectangle $c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (\sqrt{73})^2$

Com que $\triangle AEC$ és rectangle $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = (\sqrt{52})^2$

Com que $\triangle ABC$ és rectangle $c^2 + b^2 = x^2$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} c^2 + \frac{b^2}{4} = 73 \\ \frac{c^2}{4} + b^2 = 52 \\ c^2 + b^2 = x^2 \end{cases} \quad \text{les solucions són} \quad \begin{cases} c = 8 \\ b = 6 \\ x = 10 \end{cases}$$

Problema 7

El perímetre d'un triangle rectangle és igual a 60 m i l'altura traçada sobre la hipotenusa mesura 12 m.

Determineu els costats del triangle.

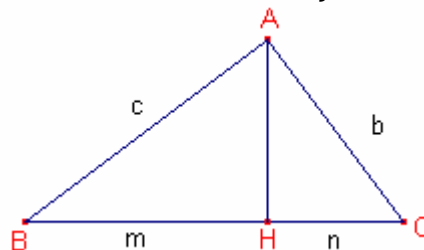
Solució:

Siguen $\overline{AB} = c$ $\overline{AC} = b$ $\overline{BC} = a$

El perímetre és $c + b + a = 60$

L'àrea és $bc = 12a$

Com que $\triangle ABC$ és rectangle $c^2 + b^2 = a^2$

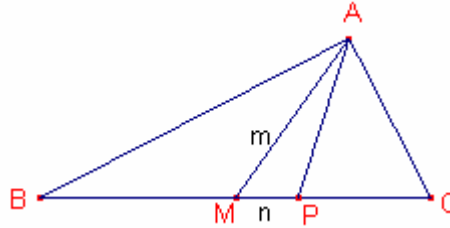


Considerem el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 60 \\ bc = 12a \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{la solució del qual és} \quad \begin{cases} a = 25 \\ b = 20 \\ c = 15 \end{cases}$$

Problema 8

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, siga la mitjana, $\overline{AM} = m$, siga la bisectriu \overline{AP} , siga $\overline{MP} = n$.
Determineu els catets.



Solució:

Siguen $\overline{AB} = c$ $\overline{AC} = b$

Siga la mitjana $\overline{AM} = m$, i siga la bisectriu $\overline{MP} = n$

En un triangle rectangle la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa, per tant $\overline{BC} = 2m$ $\overline{MC} = m$

Per la propietat de la bisectriu tenim que: $\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$, és a dir $\frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c}$

Com que el triangle $\triangle ABC$ és rectangle $b^2 + c^2 = (2m)^2$

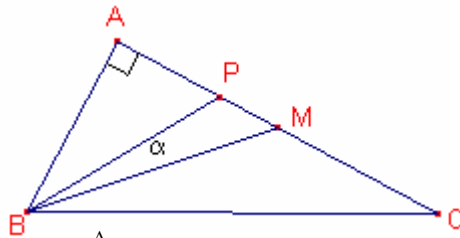
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c} \\ b^2 + c^2 = (2m)^2 \end{cases} \text{ la seua solució és: } \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2m(m-n)}}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ c = \frac{\sqrt{2m(m+n)}}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases}$$

Problema 9

Determineu l'angle que formen la mitjana i bisectriu d'un angle agut d'un triangle rectangle, en funció d'aquest angle.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$,

Siguen la bisectriu \overline{BP} , la mitjana \overline{BM} , $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ $\text{tg} \hat{B} = \frac{c}{b}$

$$\text{tg} \left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha \right) = \frac{b}{c}. \text{ Aleshores, } \frac{1}{2} \text{tg} \hat{B} = \text{tg} \left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha \right)$$

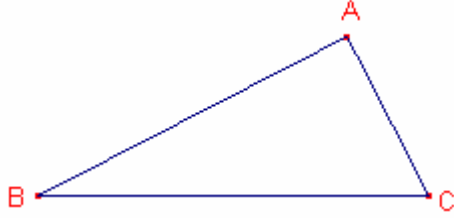
Deduïm:

$$\frac{\hat{B}}{2} + \alpha = \arctg \left(\frac{\text{tg} \hat{B}}{2} \right) \Rightarrow \alpha = -\frac{\hat{B}}{2} + \arctg \left(\frac{\text{tg} \hat{B}}{2} \right)$$

Problema 10

Demostreu que si en un triangle la raó de les tangents dels angles aguts és igual a la raó dels quadrats dels sinus d'aquests angles, aleshores el triangle és isòsceles o rectangle.

Solució:



$$\frac{\operatorname{tg}\hat{C}}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \frac{\sin^2\hat{C}}{\sin^2\hat{B}} \Rightarrow \frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin 2\hat{B} = \sin 2\hat{C}$$

Aleshores $2\hat{B} = 2\hat{C}$ o $2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C}$

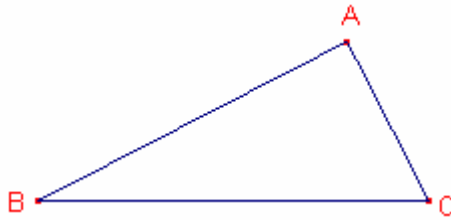
Per tant $\hat{C} = \hat{B}$ o $\hat{C} + \hat{B} = 90^\circ$.

En el primer cas el triangle és isòsceles i en el segon cas el triangle és rectangle.

Problema 11

Demostreu que si en un triangle es verifica $\frac{a}{\cos\hat{A}} = \frac{b}{\cos\hat{B}}$ aleshores el triangle és isòsceles.

Solució:



Aplicant el teorema dels sinus $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{\cos\hat{A}} = \frac{b}{\cos\hat{B}} \\ \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \end{cases}$$

Dividint-les:

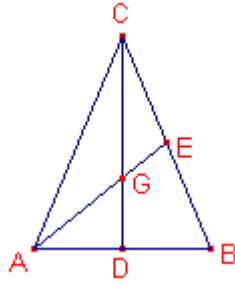
$$\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{tg}\hat{A} = \operatorname{tg}\hat{B}$$

Aleshores $\hat{A} = \hat{B}$

Problema 12

La base d'un triangle isòsceles és $4\sqrt{2}$ m. La mitjana traçada sobre el costat lateral és igual a 5 m.
Calculeu el costat lateral.

Solució:



Siguen l'altura \overline{CD} , la mitjana $\overline{AE} = 5$ i el costat $\overline{AC} = b$
Siga G el baricentre:

$$\text{Aleshores, } \overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot 5 \quad \overline{AD} = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Considerem el triangle rectangle } \triangle AGD \quad \overline{GD} = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{\frac{100}{9} - 8} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

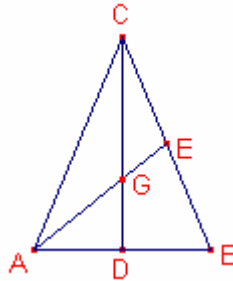
$$\text{Aleshores } \overline{DC} = 3\overline{GD} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{Per tant } b = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{7})^2} = 6$$

Problema 13

El costat lateral d'un triangle isòsceles mesura 4m, la mitjana traçada sobre el costat lateral 3 m.
Calculeu la base del triangle.

Solució:



Siguen la mitjana $\overline{AE} = 3$, el baricentre G.

Per la propietat del baricentre $\overline{GE} = 1$, $\overline{AG} = 2$

$$\text{Siguen } \overline{AD} = x, \quad \overline{CD} = h, \quad \overline{GD} = \frac{h}{3}$$

$$\text{Per ser el triangle } \triangle AGD \text{ rectangle tenim } 2^2 = x^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$\text{Per ser el triangle } \triangle ACD \text{ rectangle tenim } 4^2 = x^2 + h^2$$

$$\text{Considerem el sistema } \begin{cases} 4 = x^2 + \frac{h^2}{9} \\ 16 = x^2 + h^2 \end{cases} \text{ la seua solució és } \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ h = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

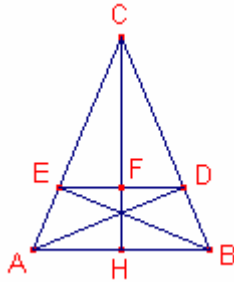
$$\text{Aleshores } \overline{AB} = 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10}$$

Problema 14

La base d'un triangle isòsceles és 12 m i el costat lateral mesura 18 m. Sobre els costats iguals es tracen les altures.

Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus d'aquestes altures.

Solució:



Considerem les altures \overline{CH} , \overline{AD} , \overline{BE} .

Per ser el triangle $\triangle ACH$ rectangle tenim $\overline{CH} = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288}$

Iguant les àrees del triangle $\triangle ABC$ tenim $\frac{12\sqrt{288}}{2} = \frac{18\overline{AD}}{2}$.

Per tant $\overline{AD} = \frac{2}{3}\sqrt{288}$

Per ser el triangle $\triangle ADB$ rectangle tenim $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = 12^2$.

Aleshores, $\overline{BD} = 4$, $\overline{CD} = 18 - 4$

Els triangles $\triangle CHB$, $\triangle CFD$ són semblants, aleshores $\frac{\overline{HB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$, $\frac{6}{18} = \frac{\overline{DF}}{14}$

Aleshores, $\overline{DF} = \frac{14}{3}$, $\overline{ED} = 2\overline{DF} = \frac{28}{3}$

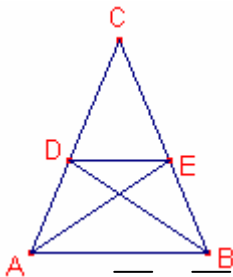
Problema 15

La base d'un triangle isòsceles és 12 i el costat lateral mesura 18.

Es tracen sobre els costats laterals les bisectrius.

Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus de les bisectrius.

Solució:



Considerem les bisectrius \overline{AE} , \overline{BD}

Per la propietat de les bisectrius,

$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$, $\frac{18 - \overline{BE}}{18} = \frac{\overline{BE}}{12}$, aleshores $\overline{BE} = \frac{36}{5}$, $\overline{CE} = 18 - \overline{BE} = \frac{54}{5}$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle DEC$ són semblants, per tant $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CE}}$

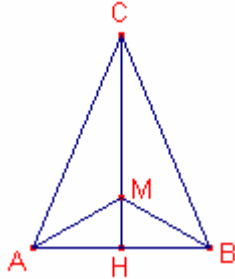
$\frac{12}{18} = \frac{\overline{DE}}{\frac{54}{5}} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{36}{5}$

Problema 16

Siga el triangle $\triangle ABC$ isòsceles $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sobre l'altura \overline{BH} s'agafa un punt M tal que els angles $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ són iguals.

En quina raó estan \overline{BM} i l'altura si l'angle de la base és α .

Solució:



Siguen $\angle CAB = \alpha$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$

Notem que $\angle MAB = 30^\circ$

$$\overline{BH} = c \cdot \sin \alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad \text{aleshores, } b = 2c \cdot \cos \alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AMC$ $\frac{b}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$\overline{MH} = \overline{AM} \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow \overline{MH} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2c \cdot \cos \alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{c \cdot \cos \alpha}{\sqrt{3}}$$

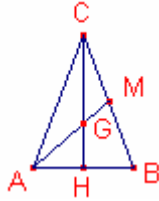
$$\overline{BM} = \overline{BH} - \overline{MH} = a \left(\sin \alpha - \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{3} \right)$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BM}} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{a \left(\sin \alpha - \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{3} \right)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \frac{\sqrt{3} \cos \alpha}{3}}$$

Problema 17

L'angle de la base d'un triangle isòsceles és α .

Determineu la raó entre la base i la mitjana traçada sobre un costat lateral.



Solució:

Siguen $\hat{A} = \alpha$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\overline{AB} = c$, la mitjana \overline{AM} , i G el baricentre.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$ $\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$

Aleshores, $\overline{AB} = c = 2a \cdot \cos \alpha$

$\overline{CH} = a \cdot \sin \alpha$ $\overline{GH} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{3}$ (aplicant la propietat del baricentre).

El triangle $\triangle AGH$ és rectangle per tant $\overline{AG} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{AH}^2} =$
 $= \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{9} + \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 \sin^2 \alpha + 9c^2}}{6} = \frac{\sqrt{4a^2 \sin^2 \alpha + 9(2a \cdot \cos \alpha)^2}}{6} =$
 $= \frac{a}{3} \sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha}$

Aleshores, $\overline{AM} = \frac{3}{2} \overline{AG} = \frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha}$

Per tant: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{2a \cdot \cos \alpha}{\frac{a}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + 9 \cos^2 \alpha}}$

Problema 18

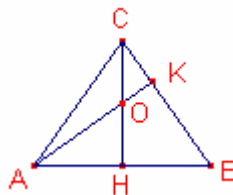
Determineu els angles d'un triangle isòsceles si sabem que l'ortocentre divideix per la meitat l'altura traçada sobre la base.

Solució:

Siguen $\overline{BC} = \overline{AC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\hat{A} = \alpha$

Siguen les altures \overline{CH} , \overline{AK} ,

l'ortocentre O, $\alpha = \angle AOH$. $\overline{OH} = \overline{CO} = x$



El triangle $\triangle ACH$ és rectangle per tant $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4x}{c}$

El triangle $\triangle AOH$ és rectangle per tant $\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{2x}$

Considerem el sistema $\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{4x}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{2x} \end{cases}$ multiplicant ambdues equacions queda,

$\operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$

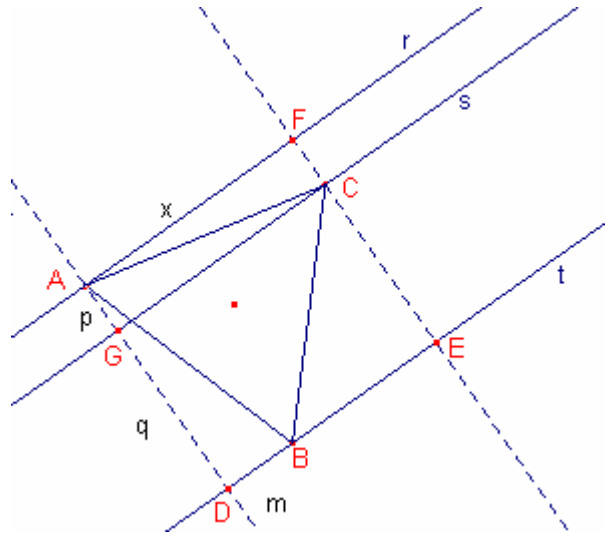
Per tant $\hat{A} = \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ $\hat{C} = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}$

Problema 19

Les rectes r, s, t són paral·leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.

Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

Solució:



Siga la recta f perpendicular a r que passa pel punt A .
Siga la recta g perpendicular a r que passa pel punt C .
Siga el rectangle $ADEF$ que determinen les rectes r, f, t, g .

Siguen $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$

Siguen $\overline{AD} = p + q$ $\overline{AF} = x$ $\overline{DB} = m$

El triangle $\triangle AFC$ és rectangle per tant $a^2 = p^2 + x^2$

El triangle $\triangle ADB$ és rectangle per tant $a^2 = (p + q)^2 + m^2$

El triangle $\triangle BCE$ és rectangle per tant $a^2 = q^2 + (x - m)^2$

Considerem el sistema
$$\begin{cases} a^2 = p^2 + x^2 \\ a^2 = (p + q)^2 + m^2 \\ a^2 = q^2 + (x - m)^2 \end{cases}$$

Resolent el sistema queda $a = \frac{2\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}{\sqrt{3}}$

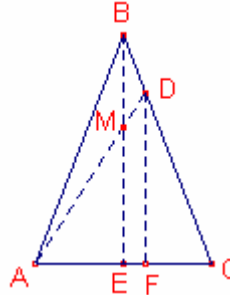
Problema 20

Siga un triangle isòsceles $\triangle ABC$. En el costat \overline{BC} determineu el punt D tal que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1}{4}.$$

Calculeu $\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}$ on M és la intersecció del segment \overline{AD} i l'altura \overline{BE} .

Solució:



$$\text{Siga } \overline{BC} = 5a \Rightarrow \overline{BD} = a \quad \overline{DC} = 4a$$

$$\text{Siguen } \overline{AE} = y \quad \overline{AF} = x$$

$$\text{El triangle } \triangle EBC \text{ és rectangle per tant } \overline{BE} = \sqrt{25a^2 - y^2}$$

$$\text{Els triangles } \triangle ABE, \triangle FDC \text{ són semblants, per tant } \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FC}}$$

$$\frac{\sqrt{25a^2 - y^2}}{y} = \frac{\overline{DF}}{2y - x} \quad (1)$$

$$\text{Els triangles } \triangle EBC, \triangle FDC \text{ són semblants, per tant } \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{FC}}$$

$$\frac{5a}{y} = \frac{4a}{2y - x} \Rightarrow 6y = 5x$$

Substituint en (1)

$$\overline{DF} = \frac{4}{5} \sqrt{25a^2 - y^2}$$

$$\text{Els triangles } \triangle AME, \triangle ADF \text{ són semblants, per tant } \frac{\overline{ME}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}$$

$$\frac{\overline{ME}}{y} = \frac{\frac{4}{5} \sqrt{25a^2 - y^2}}{x} \Rightarrow \overline{ME} = \frac{2}{3} \sqrt{25a^2 - y^2}$$

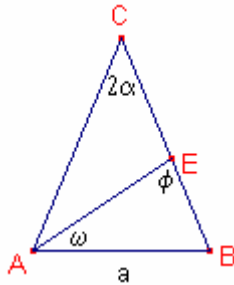
$$\overline{BM} = \overline{BE} - \overline{ME} = \sqrt{25a^2 - y^2} - \frac{2}{3} \sqrt{25a^2 - y^2} = \frac{1}{3} \sqrt{25a^2 - y^2}$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\frac{1}{3} \sqrt{25a^2 - y^2}}{\frac{2}{3} \sqrt{25a^2 - y^2}} = \frac{1}{2}$$

Problema 21

La base d'un triangle isòsceles és a . L'angle oposat a la base 2α .
Calculeu la bisectriu sobre el costat lateral.

Solució:



Siguen $\overline{AB} = a$ $\hat{C} = 2\alpha$ $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ - \alpha$.

Siga la bisectriu \overline{AE} . Siguen $\angle EAB = \omega$, $\angle AEB = \phi$.

$$\omega = \frac{90^\circ - \alpha}{2} \quad \phi = 180^\circ - (\omega + \hat{B}) = 45^\circ + \frac{3}{2}\alpha$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AEB$

$$\frac{a}{\sin \phi} = \frac{\overline{AE}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right)} = \frac{\overline{AE}}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\sin\left(45^\circ + \frac{3}{2}\alpha\right)}$$

Problema 22

En un triangle equilàter es traça un segment que uneix un vèrtex i un punt E del costat oposat tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}$. Calculeu l'angle que forma aquest segment i cada costat.

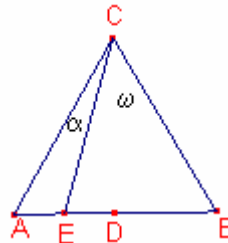
Solució:

Siga l'altura \overline{CD} .

Siga $\angle ACE = \alpha$, $\angle ECB = \omega$.

Siga $\overline{AB} = 3a \Rightarrow \overline{AE} = a$ $\overline{EB} = 2a$

$$\overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$$



El triangle $\triangle DCB$ és rectangle per tant $\overline{CD} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{3a}{2}\sqrt{3}$

El triangle $\triangle DCE$ és rectangle per tant, $\overline{CE} = \sqrt{\overline{ED}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 9a^2 - \frac{9}{4}a^2} = a\sqrt{28}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CEB$ $\frac{\overline{CE}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{EB}}{\sin \omega}$

$$\frac{a\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sin \omega} \Rightarrow \sin \omega = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$$

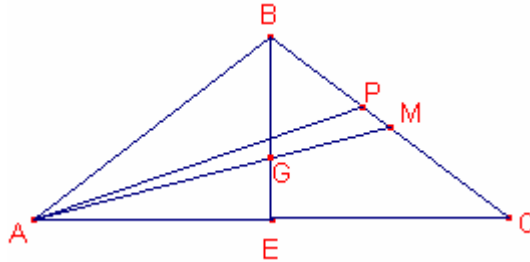
$$\omega = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right) \quad \alpha = 60^\circ - \omega = 60^\circ - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$$

Problema 23

L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\arctg \frac{3}{4}$.

Calculeu l'angle ω que formen la mitjana i la bisectriu traçades al costat lateral.

Solució:



Siguen la mitjana \overline{AM} , la bisectriu \overline{AP} i el baricentre G.

$$\hat{A} = \arctg \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{BE} = 3a, \overline{AE} = 4a$$

Per ser G el baricentre $\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{BE} = a$.

Siguen $\angle MAC = \alpha$, $\angle PAM = \omega$

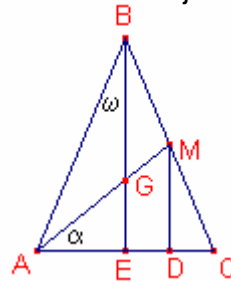
Considerem el triangle rectangle $\triangle AGE$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{a}{4a}$.

$$\text{Aleshores, } \alpha = \arctg \frac{1}{4} \quad \omega = \frac{1}{2}\hat{A} - \alpha = \frac{1}{2}\arctg \frac{3}{4} - \arctg \frac{1}{4}.$$

Problema 24

Determineu l'angle desigual d'un triangle isòsceles si la mitjana a un costat lateral i la base formen un angle $\arcsin \frac{3}{5}$.

Solució:



Siguen la mitjana \overline{AM} , el baricentre G

Siguen $\angle MAC = \alpha$, $\angle ABE = \omega$

Considerem el triangle rectangle $\triangle AMD$ $\sin \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{AM}} = \frac{3}{5}$

$$\overline{MD} = 3a \quad \overline{AM} = 5a \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{10}{3}a$$

Els triangles $\triangle AMD$ i $\triangle AGE$ són semblants, per tant $\frac{3a}{5a} = \frac{\overline{GE}}{\overline{AG}} \Rightarrow \overline{GE} = 2a$

$$\overline{BE} = 3\overline{GE} = 6a$$

Per ser el triangle $\triangle AGE$ rectangle $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{GE}^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}a\right)^2 - (2a)^2} = \frac{8}{3}a$

Per ser el triangle $\triangle ABE$ rectangle,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{8}{3}a}{6a} = \frac{4}{9} \Rightarrow \omega = \arctg \frac{4}{9} \quad \hat{B} = 2\omega = 2\arctg \frac{4}{9}$$

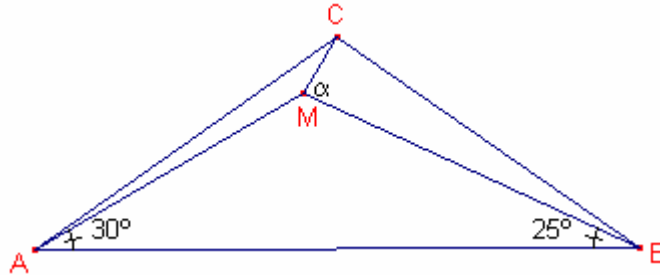
Problema 25

Siga un triangle isòscele tal que $\hat{B} = 110^\circ$. En el seu interior es determina el punt M que forma els angles $\angle MAC=30^\circ$, $\angle MCA=25^\circ$.
Calculeu l'angle $\angle CMB$.

Solució:

Siga $\angle CMB = \alpha$

$$\hat{A} = \hat{C} = 35^\circ$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle MBC$ $\frac{\overline{BC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BM}}{\sin 10^\circ}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AMB$ $\frac{\overline{BM}}{\sin 5^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin(235^\circ - \alpha)}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = \frac{\sin \alpha}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin(235^\circ - \alpha)}{\sin 5^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin(235^\circ - \alpha)}{\sin 5^\circ} \Rightarrow 2 \sin(235^\circ - \alpha) \cos 5^\circ = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow -2 \sin(55^\circ - \alpha) \cos 5^\circ = \sin \alpha$$

Transformant productes en sumes:

$$-2 \left(\frac{1}{2} \sin(60^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} \sin(50^\circ - \alpha) \right) = \sin \alpha$$

$$-\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha - \sin 50^\circ \cos \alpha + \cos 50^\circ \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \sin 50^\circ \cos \alpha + \cos 50^\circ \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \sin 50^\circ \right) \cos \alpha = \left(\frac{1}{2} - \cos 50^\circ \right) \sin \alpha$$

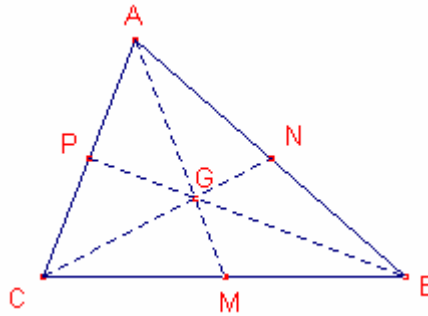
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 50^\circ}{\frac{1}{2} - \cos 50^\circ}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 50^\circ}{\frac{1}{2} - \cos 50^\circ} \right) = 85^\circ$$

Problema 26

Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.

Solució:



Siguen les mitjanes $\overline{AM} = m_a$ $\overline{CN} = m_c$ $\overline{BR} = m_b$. Siga el baricentre G.

Siguen $S = m_a + m_b + m_c$ $P = a + b + c$

Considerem el triangle $\triangle CGB$ $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$

Considerem el triangle $\triangle AGC$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$

Considerem el triangle $\triangle AGB$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$

Sumant les 3 inequacions:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \Rightarrow \frac{4}{3}S > P$$

Considerem el triangle $\triangle AMN$ $m_a < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Considerem el triangle $\triangle BNR$ $m_b < \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$

Considerem el triangle $\triangle CNR$ $m_c < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

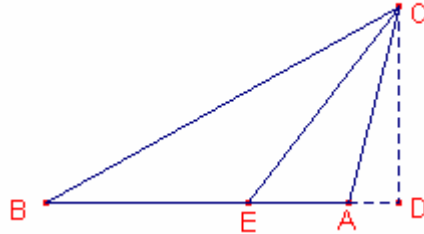
Sumant les desigualtats:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c \Rightarrow S < P$$

Problema 27

La bisectriu d'un angle d'un triangle divideix el costat oposat en segments de 2 cm i 4 cm. L'altura traçada sobre el mateix costat és igual a $\sqrt{15}$ cm. Determineu el triangle i classifiqueu-lo.

Solució:



Siguem la bisectriu \overline{CE} i l'altura $\overline{CD} = \sqrt{15}$.

Siguem els segments $\overline{BE} = 4$ $\overline{EA} = 2$ $\overline{AD} = x$.

Per la propietat de la proporcionalitat de la bisectriu:

$$\frac{4}{a} = \frac{2}{b} \Rightarrow a = 2b$$

Considerem el triangle rectangle $\triangle ADC$ $x^2 + (\sqrt{15})^2 = b^2$

Considerem el triangle rectangle $\triangle BDC$ $(6+x)^2 + (\sqrt{15})^2 = b^2$

$$\text{Considerem el sistema } \begin{cases} a = 2b \\ x^2 + 15 = b^2 \\ x^2 + 36 + 12x + 15 = a^2 \end{cases}$$

Els sistema té dues solucions:

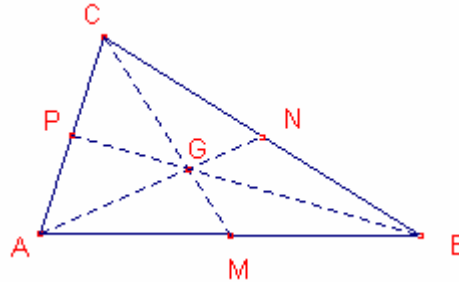
$$\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ x = 1 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{triangle obtusangle ja que } a^2 > b^2 + c^2$$

$$\begin{cases} a = 4\sqrt{6} \\ b = 2\sqrt{6} \\ x = 3 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{triangle obtusangle ja que } a^2 > b^2 + c^2$$

Problema 28

Determineu la raó que hi ha entre la suma des quadrats de les mitjanes i la suma dels quadrats dels costats d'un triangle.

Solució:



Siguen les mitjanes \overline{AN} , \overline{CM} , \overline{BP}

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ACM$

$$\overline{CM}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos \hat{A}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle BAN$,

$$\overline{AN}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos \hat{B}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CBP$,

$$\overline{BP}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos \hat{C}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

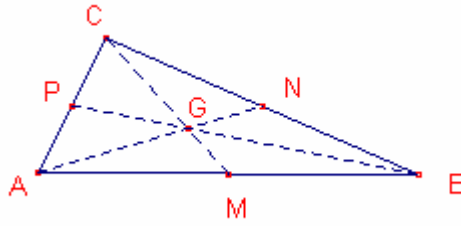
Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{BP}^2}{a^2 + b^2 + c^2} &= \\ &= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos \hat{A} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos \hat{B} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos \hat{C}}{a^2 + b^2 + c^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \\ &= \frac{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Problema 29

Classifiqueu un triangle sabent que les mitjanes compleixen $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

Solució:



Siguen les mitjanes $\overline{AN} = m_a$ $\overline{CM} = m_c$ $\overline{BP} = m_b$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ACM$,

$$m_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos \hat{A}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle BAN$,

$$m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos \hat{B}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle CBP$,

$$m_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos \hat{C}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Per tant,

$$m_a^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

Com que $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ tenim:

$$\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} = 5 \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 10a^2 + 10b^2 - 5c^2$$

Aleshores:

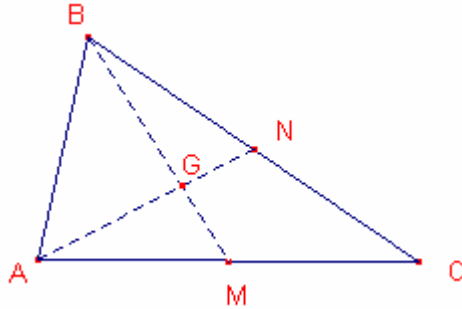
$$a^2 + b^2 = c^2$$

El triangle és rectangle $\hat{C} = 90^\circ$.

Problema 30

Dos costats d'un triangle mesuren a , b i les mitjanes sobre aquests costats formen 90° . Calculeu l'altre costat,

Solució:



Siguen les mitjanes \overline{AN} , \overline{BM} siga el baricentre G.

Volem determinar $\overline{AB} = c$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle MNC$ són semblants

Siguen $\overline{GN} = x$ $\overline{AG} = 2x$ $\overline{GM} = y$ $\overline{BG} = 2y$ $\overline{MN} = \frac{c}{2}$ (propietat del baricentre).

El triangle $\triangle GMN$ és rectangle, per tant $x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$

El triangle $\triangle AGM$ és rectangle, per tant $(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

El triangle $\triangle BGN$ és rectangle, per tant $x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Considerem el sistema

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \text{ la solució del qual és } \begin{cases} x^2 = \frac{b^2}{15} - \frac{a^2}{60} \\ y^2 = \frac{a^2}{15} - \frac{b^2}{60} \end{cases}$$

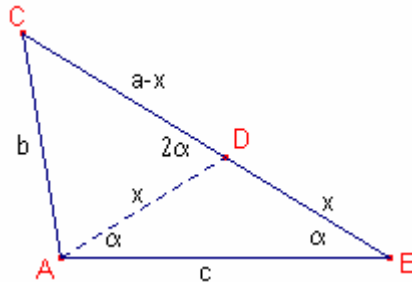
Com que $x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow c^2 = 4(x^2 + y^2) = \frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{5}$.

Per tant $c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$

Problema 31

En un triangle $\triangle ABC$ tracem la bisectriu \overline{AD} . Determineu \overline{BC} sabent que $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = \overline{BD}$.

Solució:



Siga la bisectriu $\overline{AD} = x$

Siga l'angle $\angle CAD = \alpha$

Per la propietat de proporcionalitat de la bisectriu:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{a-x} \quad (1)$$

Per ser el triangle $\triangle ADB$ isòsceles $\hat{B} = \alpha$

Els triangles $\triangle ABC$ $\triangle DAC$ són semblants, aleshores $\frac{b}{a} = \frac{x}{c} \quad (2)$

Considerem el sistema format per (1) i (2)

$$\begin{cases} \frac{c}{x} = \frac{b}{a-x} \\ \frac{b}{a} = \frac{x}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{c}{bc} = \frac{b}{a-\frac{bc}{a}} \\ x = \frac{bc}{a} \end{cases}$$

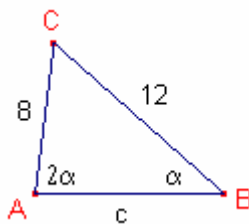
Aleshores $a = \sqrt{b^2 + bc}$

Problema 32

En un triangle $\triangle ABC$ tal que $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 8$ i l'angle $\hat{A} = 2\hat{B}$

Calculeu \overline{AB}

Solució:



Siga el costat $\overline{AB} = c$

Siguen $\hat{B} = \alpha$, $\hat{A} = 2\alpha$, $\hat{C} = 180^\circ - 3\alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$$

$$\frac{12}{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{8}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha (4\cos^2 \alpha - 1)}$$

$$\frac{6}{\cos \alpha} = 8 = \frac{c}{4\cos^2 \alpha - 1}$$

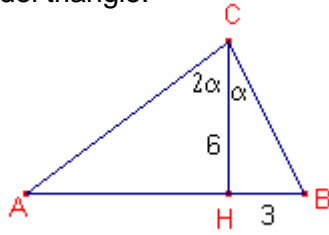
Aleshores, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $c = 8(4\cos^2 \alpha - 1) = 10$.

Problema 33

L'altura d'un triangle mesura 6 cm i divideix l'angle en una proporció 2:1 i la base en 2 segments el menor dels quals mesura 3 cm.

Determineu els costats del triangle.

Solució:



Siga l'altura $\overline{CH} = 6$.

Siga el segment $\overline{HB} = 3$.

Siga els angles $\angle HCB = \alpha$ $\angle ACH = 2\alpha$.

El triangle $\triangle CHB$ és rectangle, per tant, $a = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad \cos \alpha = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$$

El triangle $\triangle ACH$ és rectangle, per tant,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{c-3}{6} \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{c-3}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{c-3}{2} \Rightarrow c = 11$$

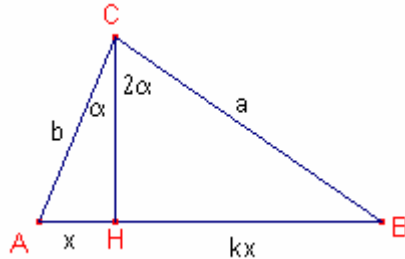
$$b = \sqrt{AH^2 + 6^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Problema 34

L'altura d'un triangle divideix els angles en proporció 2:1 i la base en dos segments en proporció k:1 (k>0).

Determineu l'angle major de la base.

Solució:



Siga l'altura \overline{CH} . Siguen els angles $\angle ACH = \alpha$ $\angle BCH = 2\alpha$

$$\hat{A} = 90^\circ - \alpha \quad \hat{B} = 90^\circ - 2\alpha$$

Siguen els segments $\overline{AH} = x$ $\overline{HB} = kx$

El triangle $\triangle ACH$ és rectangle, per tant, $\sin \alpha = \frac{x}{b}$

El triangle $\triangle CHB$ és rectangle, per tant, $\sin 2\alpha = \frac{kx}{a}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{a}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos 2\alpha}$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos 2\alpha} \\ \frac{a}{bk} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Dividint ambdues equacions:

$$k = \frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{k}{2(k-1)}$$

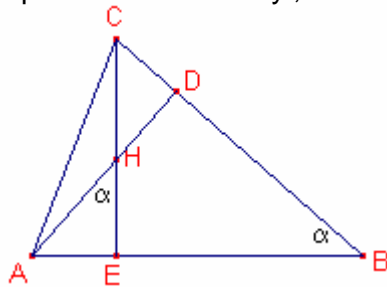
$$\text{per tant, } \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}} \Rightarrow 90^\circ - \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{k}{2(k-1)}}$$

Nota: Es pot observar que $k > 2$ ja que $\frac{k}{2(k-1)} < 1$ i $\frac{k}{2(k-1)} > 0$

Problema 35

En un triangle acutangle $\triangle ABC$ l'angle agut format per les altures $\overline{AD}, \overline{CE}$ és $\alpha = \angle ABC$. Sabent que $\overline{AD} = x$ $\overline{CE} = y$, calculeu \overline{AC}

Solució:



Siga $\hat{B} = \alpha$, aleshores l'angle $\angle AHE = \alpha$.

El triangle $\triangle DAB$ és rectangle, per tant, $\sin \alpha = \frac{x}{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{x}{\sin \alpha}$

El triangle $\triangle ECB$ és rectangle, per tant, $\sin \alpha = \frac{y}{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{y}{\sin \alpha}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Per tant, } \overline{AC}^2 = \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2xy \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

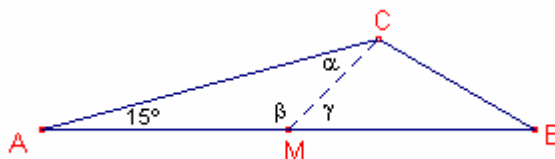
$$\text{Aleshores: } \overline{AC} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \alpha}}{\sin \alpha}$$

Problema 36

La base d'un triangle és 4. La mitjana sobre la base és $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ un dels angles aguts de la base és 15° .

Calculeu l'angle agut entre la mitjana i la base.

Solució:



Siga la mitjana $\overline{CM} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Siga el segment $\overline{AM} = 2$

Siguen els angles $\hat{A} = 15^\circ$ $\angle CMB = \gamma$ $\angle MCA = \alpha$ $\angle AMC = \beta$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ACM$,

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sin 15^\circ} = \frac{2}{\sin \alpha}, \text{ per tant, } \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ o } \alpha = 150^\circ$$

Les dues solucions són:

a) $\beta = 180^\circ - (15 + \alpha) = 135^\circ$ $\gamma = 180^\circ - \beta = 45^\circ$

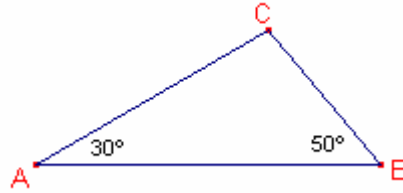
b) $\beta = 180^\circ - (15 + \alpha) = 15^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \beta = 165^\circ$

Problema 37

En un triangle $\triangle ABC$ $\hat{A} = 30^\circ$ $\hat{B} = 50^\circ$. Demostreu que $c^2 = b(a + b)$.

Solució:



$$\hat{C} = 180^\circ - (A + B) = 100^\circ$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{\sin 100^\circ}$$

$$2a = \frac{b}{\sin 50^\circ} = \frac{c}{2 \sin 100^\circ} \Rightarrow a = \frac{c}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ}, \quad b = \frac{c}{2 \cos 50^\circ}$$

$$b(a+b) = \frac{c}{2 \cos 50^\circ} \left(\frac{c}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} + \frac{c}{2 \cos 50^\circ} \right) = c^2 \frac{1}{2 \cos 50^\circ} \left(\frac{1 + 2 \sin 50^\circ}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} \right)$$

$$\text{Cal demostrar que } \frac{1}{2 \cos 50^\circ} \left(\frac{1 + 2 \sin 50^\circ}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} \right) = 1$$

$$8 \cos 50^\circ \sin 50^\circ \cos 50^\circ = 4 \sin 100^\circ \cos 50^\circ = 2(\sin 150^\circ + \sin 50^\circ) = 1 + 2 \sin 50^\circ$$

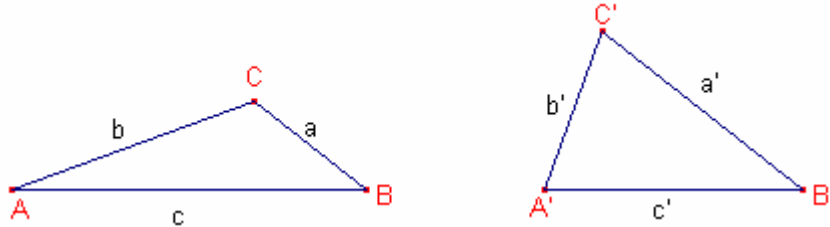
Per tant, podem concloure que:

$$b(a+b) = c^2$$

Problema 38

Siguen dos triangles $\triangle ABC$ $\triangle A'B'C'$ tal que $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$
Demostreu que $aa' = bb' + cc'$.

Solució:



Com que $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}' = 180^\circ - \hat{A}$, $\hat{C}' = \hat{A} - \hat{B}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}. \text{ Per tant, } b = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} a \quad c = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} a$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle A'B'C'$

$$\frac{a'}{\sin \hat{A}'} = \frac{b'}{\sin \hat{B}'} = \frac{c'}{\sin \hat{C}'} \Rightarrow \frac{a'}{\sin(180^\circ - \hat{A})} = \frac{b'}{\sin \hat{B}} = \frac{c'}{\sin(\hat{A} - \hat{B})}$$

$$\text{Per tant, } b' = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} a' \quad c' = \frac{\sin(\hat{A} - \hat{B})}{\sin \hat{A}} a'$$

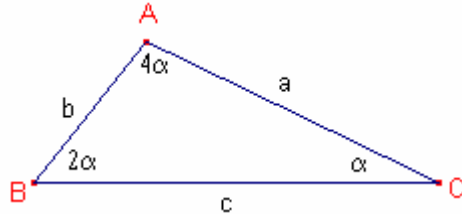
$$\begin{aligned} bb' + cc' &= \frac{\sin^2 \hat{B}}{\sin^2 \hat{A}} aa' + \frac{\sin \hat{C} \cdot \sin(\hat{A} - \hat{B})}{\sin^2 \hat{A}} aa' = \\ &= aa' \frac{\sin^2 \hat{B} + \sin(\hat{A} + \hat{B}) \sin(\hat{A} - \hat{B})}{\sin^2 \hat{A}} = \\ &= aa' \frac{\sin^2 \hat{B} + (\sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B})(\sin \hat{A} \cos \hat{B} - \cos \hat{A} \sin \hat{B})}{\sin^2 \hat{A}} = \\ &= aa' \frac{\sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{A} \cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{A} \sin^2 \hat{B}}{\sin^2 \hat{A}} = aa' \end{aligned}$$

Problema 39

Siga el triangle $\triangle ABC$ els angles del qual estan en proporció 4:2:1

Demostreu que els costats compleixen $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Solució:



Siguen els angles $\hat{C} = \alpha$ $\hat{B} = 2\alpha$ $\hat{A} = 4\alpha$

$$7\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ}{7}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{a}{\sin 4\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

Aleshores:

$$a = \frac{c \cdot \sin 4\alpha}{\sin \alpha} = 4c \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \quad b = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2c \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4c \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} + \frac{1}{2c \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{c} \left(\frac{1 + 2\cos 2\alpha}{4 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} \right)$$

Amb l'ajut de la calculadora demostrem que

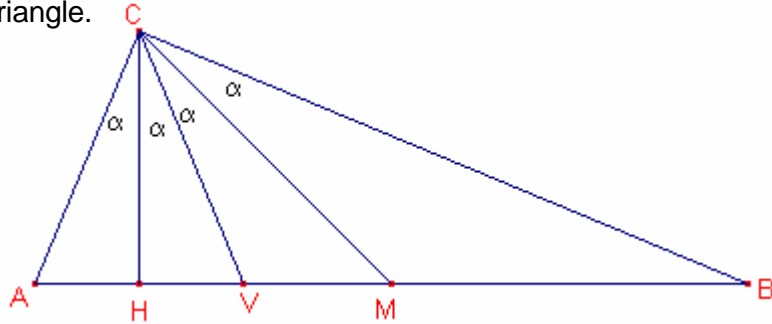
$$\frac{1 + 2\cos 2\alpha}{4 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha} = 1$$

Problema 40

L'altura, la bisectriu i la mitjana traçades des d'un vèrtex d'un triangle divideixen l'angle en 4 parts iguals.

Determineu els angles del triangle.

Solució:



Siguen l'altura \overline{CH} , la bisectriu \overline{CV} , la mitjana \overline{CM} .
Siguen els angles $\angle ACH = \angle HCV = \angle VCM = \angle MCB = \alpha$.
El punt V està entre H i M

El triangle $\triangle AHC$ és rectangle, per tant $\hat{A} = 90^\circ - \alpha$

El triangle $\triangle CHB$ és rectangle, per tant $\hat{B} = 90^\circ - 3\alpha$

El triangle $\triangle ACV$ és isòsceles, per tant $\overline{CV} = b$

$$\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{c}{2}$$

Siga $\overline{CM} = x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AMC$,

$$\frac{x}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\frac{c}{2}}{\sin 3\alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CMB$,

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin(90^\circ - 3\alpha)}$$

Dividint ambdues equacions,

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2\sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 6\alpha \Rightarrow 6\alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\text{Aleshores, } \alpha = \frac{180^\circ}{8} = 22^\circ 30'$$

$$\text{Per tant, } \hat{A} = 90^\circ - \alpha = 67^\circ 30'$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 3\alpha = 22^\circ 30'$$

$$\hat{C} = 4\alpha = 90^\circ$$

Problema 41

Siga \overline{CD} l'altura del triangle $\triangle ABC$.

Determineu la dependència dels angles \hat{A}, \hat{B} sabent que $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

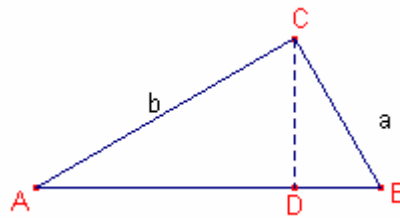
Solució:

Estudiarem dos casos:

- 1.- \hat{A}, \hat{B} angles aguts.
- 2.- \hat{A} o \hat{B} obtús.

1r cas

Suposem que \hat{A}, \hat{B} són angles aguts.



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2 = \\ &= \overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{DB}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DB} = \\ &= \overline{AD}(\overline{AD} + \overline{DB}) + \overline{DB}(\overline{AD} + \overline{DB}) = (\overline{AD} + \overline{DB})^2 = c^2 \end{aligned}$$

Aleshores el triangle $\triangle ABC$ és rectangle, $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$.

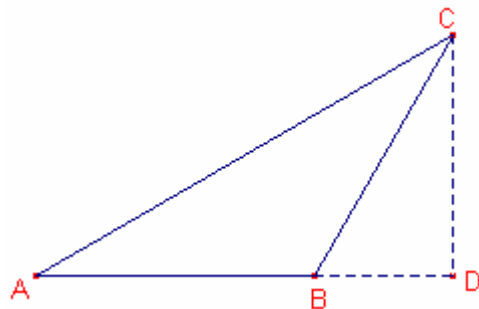
2n cas

Suposem que l'angle \hat{B} és obtús.

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \quad a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$,

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$



$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \hat{A}}{\sin^2 \hat{B}} &= \frac{a^2}{b^2} = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2}{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DB}}{\overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DB}} = \frac{\overline{BD}(\overline{AD} + \overline{BD})}{\overline{AD}(\overline{AD} + \overline{BD})} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \\ &= \frac{-a \cos \hat{B}}{b \cos \hat{A}} = \frac{-\sin \hat{A} \cdot \cos \hat{B}}{\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{A}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{-\cos \hat{B}}{\cos \hat{A}} \Rightarrow 2 \sin \hat{A} \cdot \cos \hat{A} = -2 \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2\hat{A}) = -\sin(2\hat{B}) \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ + 2\hat{A} \Rightarrow \hat{B} - \hat{A} = 90^\circ$$

Si \hat{A} és obtús $\hat{A} - \hat{B} = 90^\circ$.

Podem concloure que si \hat{A} o \hat{B} obtús $|\hat{A} - \hat{B}| = 90^\circ$

Problema 42

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.

Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$.

La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

$$\text{Proveu que } \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$$

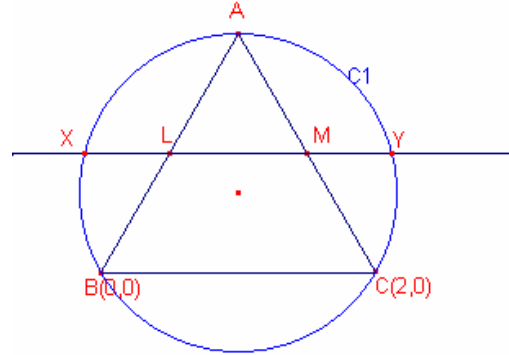
Solució: (Amb coordenades cartesianes).

Considerem El triangle $\triangle ABC$, tal que B(0,0), C(2,0).

Per ser el triangle equilàter A(1, $\sqrt{3}$)

Les coordenades dels punts L, M són:

$$L\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad M\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Siga C1 la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$ de centre O i radi R.

El centre O té coordenades $O\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscriu C1 és: $R = \sqrt{\frac{4}{3}}$

L'equació de la circumferència C1 és: $C1 \equiv (x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

L'equació de la recta r que passa pels punts L, M és: $r \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les interseccions de la circumferència C1 i la recta r són: $X\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$$Y\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overline{LM} = 1$$

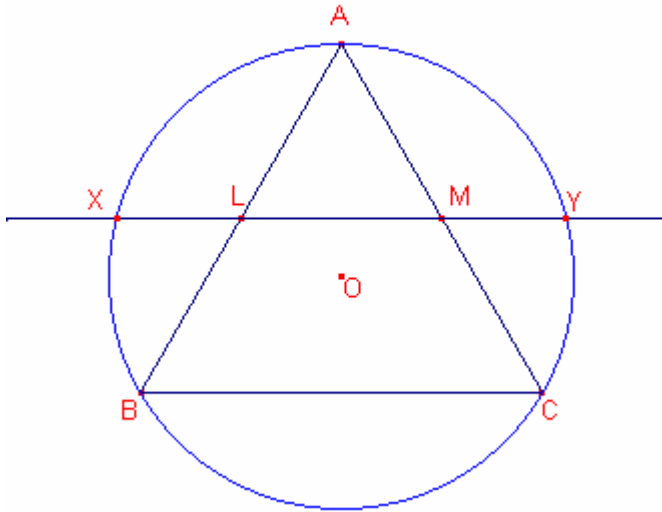
$$\overline{LY} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{MY} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Aleshores:

$$\frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \quad \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Solució trigonomètrica:



Considerem el triangle $\triangle ABC$ de costat $AB = 2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ALC$,
 $CL = \sqrt{3}$

Aleshores $LM = 1$

Considerem el triangle $\triangle OLM$

Per la propietat del baricentre del triangle $\triangle ABC$

$$OL = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

L'angle $\angle MLO = 30^\circ$

Considerem el triangle $\triangle LOY$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LOY$,
 $\overline{OY}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LY}^2 - 2 \cdot \overline{OL} \cdot \overline{LY} \cdot \cos 30^\circ$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \overline{LY}^2 - \overline{LY}$$

Simplificant:

$$\overline{LY}^2 - \overline{LY} - 1 = 0$$

Aleshores,

$$\overline{LY} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Problema 43

Siga $\triangle ABC$ un triangle rectangle $A = 90^\circ$.

Si els costats del triangle rectangle estan en progressió geomètrica la raó de proporcionalitat és $\sqrt{\Phi}$

Solució:

Siga r la raó de proporcionalitat.

Els costats del triangle rectangle són a, ar, ar^2 , on ar^2 és la hipotenusa.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$(ar^2)^2 = a^2 + (ar)^2$$

$$a^2r^4 = a^2 + a^2r^2$$

Simplificant,

$$r^4 - r^2 - 1 = 0$$

$$\text{Resolent l'equació: } r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

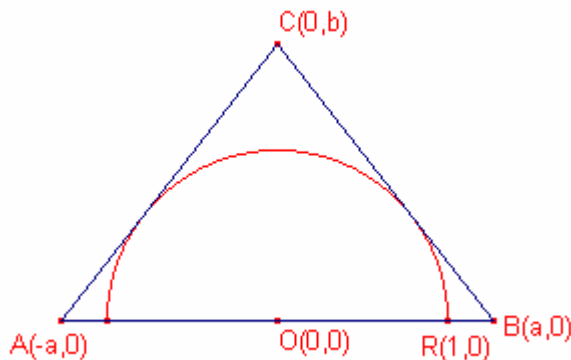
$$\text{Aleshores, } r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\Phi}$$

Problema 44

De tots els triangles isòsceles circumscrits en un semicercle de radi R determineu el de menor perímetre.

Calculeu també la raó entre l'altura del triangle (sobre el costat desigual) i el radi R .

Solució:



Considerem el sistema de referència cartesià amb origen $O(0,0)$.

Considerem la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi $\overline{OR} = 1$ que té per equació:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$$

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle OBC$ el perímetre del triangle $\triangle ABC$ és:

$$P(a,b) = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

Considerem la recta que passa pels punts B, C, $r \equiv y = \frac{-b}{a}(x - a)$

Com que la recta r és tangent a la circumferència C_1 , el sistema format per les seues

equacions té solució única.
$$\begin{cases} y = \frac{-b}{a}(x - a) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Substituint: $x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 - 2\frac{b^2}{a}x - 1 = 0$

Simplificant: $(a^2 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - a^2 = 0$

Per tenir solució única el discriminant de l'equació de segon grau és 0.

$$4a^2b^4 - 4(a^2 + b^2)(a^2b^2 - a^2) = 0$$

Simplificant: $b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}$

Aleshores la funció perímetre quedaria:

$$P(a) = 2a + 2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{a^2 - 1}} = 2a + 2\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - 1}} \quad \text{on } a > 1$$

Calculem la primera derivada:

$$P'(a) = 2 + \frac{2a^5 - 4a^3}{(a^2 - 1)^2 \cdot \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - 1}}}$$

Igualant a zero la primera derivada:

$$2 + \frac{2a^5 - 4a^3}{(a^2 - 1)^2 \cdot \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - 1}}} = 0$$

Simplificant:

$$(a^2 - 1)^2 + (a^3 - 2a)\sqrt{a^2 - 1} = 0, \quad (a^2 - 1)^2 = -(a^3 - 2a)\sqrt{a^2 - 1}$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$a^4 - a^2 - 1 = 0$$

Aleshores, $a^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$, $a = \sqrt{\Phi}$

Per tant, $b^2 = \frac{\Phi}{\Phi - 1} = \Phi^2$

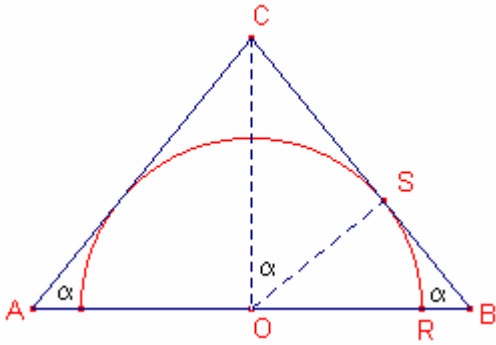
Aleshores, $b = \Phi$

El menor perímetre s'assoleix quan $a = \sqrt{\Phi}$, $b = \Phi$

El perímetre mínim és $P(\sqrt{\Phi}) = 2\Phi + 2\sqrt{\Phi + \Phi^2} = 2\Phi + 2\sqrt{1 + 2\Phi}$

La proporció entre l'altura i el radi és $b = \Phi$

Solució trigonomètrica:



Considerem la circumferència de centre O i radi $\overline{OR} = 1$.

Siga $\alpha = \angle OBC$, aleshores, $\alpha = \angle SOC$

Siga S el punt de tangència de la circumferència i el triangle $\overline{OS} = 1$.

Aleshores, $\overline{CS} = \operatorname{tg}\alpha$, $\overline{BS} = \operatorname{ctg}\alpha$, $\overline{OB} = \frac{1}{\sin\alpha}$

Aleshores el perímetre en funció de l'angle $\alpha = \angle OBC$ és:

$$P(\alpha) = 2 \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} \right)$$

Calculem la primera derivada:

$$P'(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{-1}{\sin^2\alpha} + \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \right)$$

Igualant a zero la primera derivada:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{-1}{\sin^2\alpha} + \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

$$1 - 2\cos^2\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

Substituint $a = \cos\alpha$

$$1 - 2a^2 - a^3 = 0, \text{ les solucions són: } a = -1, a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Com que $0 < \cos\alpha < 1$, $\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$ on $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aleshores, $\overline{OB} = \frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\Phi}$, $\overline{CS} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\Phi}$, $\overline{BS} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}$

També: $\overline{OC} = \Phi$, per tant la proporció entre l'altura i el radi és $\overline{OC} = \Phi$.

El perímetre és:

$$P(\alpha) = 2 \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} \right) = 2 \left(\sqrt{\Phi} + \sqrt{\Phi} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi} \right) = 2 \left(2\sqrt{\Phi} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi} \right).$$

Problema 45

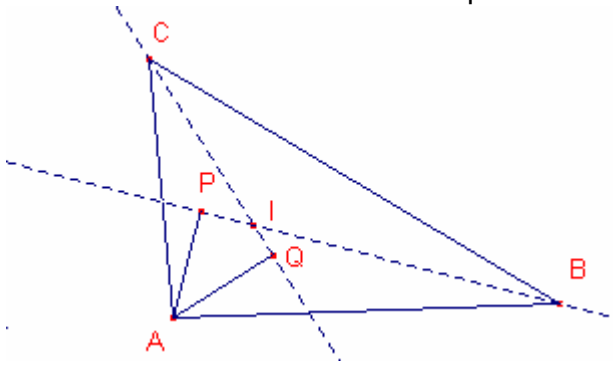
Siga el triangle $\triangle ABC$ de incentre I .

Siga P el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts B, I .

Siga Q el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punt C, I .

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{AP}}{\overline{BI}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}} = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

Solució: Problema2102 Crux resolt per Panos E. Tsaousoglou (Grècia).



$$\text{Considerem el triangle rectangle } \triangle APB, \quad \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

$$\text{Considerem el triangle rectangle } \triangle AQC, \quad \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$$

$$\text{Aleshores, } \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right), \quad \overline{AQ} = \overline{AB} \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{Aplicant el teorema dels sinus al triangle } \triangle ABI, \quad \frac{\overline{BI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right)}$$

$$\text{Aplicant el teorema dels sinus al triangle } \triangle ACI, \quad \frac{\overline{CI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)\right)}$$

$$\text{Aleshores, } \overline{BI} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}, \quad \overline{CI} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}} + \frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}} = \frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

Problema 46

Un triangle $\triangle ABC$ és rectangle si i només si $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$.

Solució:

(\Rightarrow)

Suposem que el triangle $\triangle ABC$ és rectangle i $A = 90^\circ$.

Aleshores, $C = 90^\circ - B$, $\sin 90^\circ - B = \cos B$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 90^\circ + \sin^2 B + \sin^2 (90^\circ - B) = 1 + \sin^2 B + \cos^2 B = 1 + 1 = 2$$

(\Leftarrow)

Suposem que $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$, $A + B + C = 180^\circ$

Aleshores, $\sin^2 A = 2 - \sin^2 B - \sin^2 C$

$$\sin^2 A = 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C$$

$$\sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\sin^2 (180^\circ - (B + C)) = \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\sin^2 (B + C) = \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$(\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B)^2 = \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\sin^2 B \cdot \cos^2 C + \sin^2 C \cdot \cos^2 B + 2 \sin B \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \cos B = \cos^2 B + \cos^2 C$$

Simplificant:

$$- \cos^2 B \cdot \cos^2 C + \sin B \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \cos B = 0$$

Factoritzant:

$$\cos B \cdot \cos C (\cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C) = 0$$

$$\cos B \cdot \cos C \cdot \cos(B + C) = 0$$

Aleshores $\cos B = 0$, o $\cos C = 0$, o $\cos(B + C) = 0$

És a dir, $B = 90^\circ$, o $C = 90^\circ$, o $B + C = 90^\circ$, en tots tres casos el triangle $\triangle ABC$ és rectangle.

Bibliografía.

- PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 1. Fundamentos*. Nuevas gráficas S.A. 8ª ed., Madrid, 1965
- PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 2. Complementos*. Nuevas gráficas S.A., 7ª ed., Madrid, 1961.
- ROANES MACIAS, E., *Introducción a la geometría*. Anaya, Madrid, 1980.
- GELTNER, P.B. PETERSON, D.J. *Geometría*. Ed. Thomson editores. Mèxic. 1998.
- VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría*. Ed. Limusa. Mèxic. 1983.
- LEVI S. SHIVELY, PH.D. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. Mèxic. 1972.
- COXETER, H.S.M. *Retorno a la geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. 1994.
- COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría*. Ed. Limusa. Mèxic. 1971.
- GONZÁLEZ, M. i PALENCIA, J. *Trazado geométrico*. Editorial: els autors. Sevilla.
- REDÓN GÓMEZ, A. *Geometría paso a paso*. Ed. Tébar. 2000.
- ALSINA, C. i altres, *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 12, Madrid, 1992.
- MARTÍNEZ RECIO, A. i altres, *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 16, Madrid, 1989.
- GUSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría*. Editorial Mir. Moscou, 1989.
- GREMILLION, D. i altres, *Cabri géomètre II. Manual para Macintosh y MS-DOS*.
- LYÚBICH, Yu.I. i SHOR, L.A. *Método cinemático en problemas geométricos*. Editorial Mir Moscou 1978. Col·lecció: Lecciones populares de matemáticas.
- NATASON, I.P. *Problemas elementales de máximo y mínimo*. Ed. Mir. Moscou 1977. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- SMOGORZHEVSKI, A.S. *La regla en construcciones geométricas*. Ed. Mir. Moscou 1988. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- KOSTOVSKI, A.N. *Construcciones geométricas mediante compás*. Ed. Mir. Moscou. 1984. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- GUILLÉN SOLER, G. *Poliedros*. Ed. Síntesis. Col. Educacions matemática en secundaria, 15. Madrid. 1997.
- FERRER MUÑOZ, J.L. *Superficies poliédricas*. Ed. Paraninfo. Madrid. 1999.
- JAIME, A. GUTIÉRREZ, A. *El grupo de la isometrias del plano*. Ed. Síntesis. Col. Educacions matemática en secundaria, 13. Madrid. 1996.
- Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid. 1996.
- Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Álgebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid. 1996.
- AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados Unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

- GREITZER, S.L. *Olimpiadas Matemáticas I*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 2. Madrid. 1994.
- KLAMKIN, M.S *Olimpiadas Matemáticas II*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 12. Madrid. 1998.
- AA.VV. *Matemáticas Recurrentes*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid. 1998.
- SÁNCHEZ-RUBIO. RIPOLLÉS AMELA. *Manual de matemáticas para preparación olímpica*.E. Universitat Castelló. Castelló de la Plana. 2000.
- PÉREZ FUENTES, R. *Olimpiada Matemática*. Ed autor. Utiel. 1998.
- PÉREZ FUENTES, R. *El triángulo y sus cosas*. Ed. Arpe. Utiel-Requena. 1988.
- Col· lecció de problemes de l'Olimpíada Argentina de Cabri.*
- REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 1. Fundamentos, álgebra y geometría*. Alianza atlas, 3, Alianza, 1984.
- REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 2. Análisis y matemática aplicada*. Alianza atlas, 12, Alianza, 1996.
- COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas I* Siglo XXI, Madrid, 1985.
- COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas II*. Siglo XXI, Madrid, 1985

Algunes adreces d'internet sobre Cabri Géomètre II.

Aquesta és la meua adreça:
<http://webs.ono.com/ricardpeiro>

<http://www.xtec.es/recursos/mates/index.htm>
Matemàtiques de la xarxa telemàtica educativa de Catalunya.

<http://www-cabri.imag.fr/index.html>
Pàgina dels autors del Cabri

<http://www.xtec.es/~qcastell/armilar/index.htm>
Pàgina de Quim Castellsaguer. Recursos de matemàtiques classificats.
<http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwcat/portada.html>
Tot triangles web. Pàgina de Quim castellsaguer sobre triangles. Macros de Cabri 2. Excel· lent.

<http://terra.es/personal/joseantm/>
Pàgina de José Antonio Mora. Coordenades i mecanismes amb Cabri (CabriJava). Omnipolíedre (CabriJava).

<http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/>
Pàgina de Juan Manuel Arranz. Applets amb CabriJava.

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm>
Pàgina de matemàtiques de l'IES "Marqués de Santillana" Colmenar Viejo, Madrid. Geometria interactiva (CabriJava, Descartes).

<http://www.oma.org.ar/>
Olimpíada matemàtica d'Argentina. Bona col·lecció de problemes. Curs de Cabri.

<http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/icosaweb/>
Pàgina francesa (La Reunion) sobre cabri.

<http://wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/cabri/>
Pàgina suïssa sobre Cabri. Lletres de Cabri i un manual.

<http://arci01.bo.cnr.it/cabri/index.htm>
Pàgina italiana de Cabri. Té dues revistes el Bollettini, i quaderni.

<http://atene.provincia.parma.it/~ssrondan/coniche/index.htm>
Pàgina italiana sobre còniques (Cabri i Derive).

<http://www.xtec.es/~jjareno/index.htm>
Pàgina de Joan Jareño, Lloc dedicat als problemes i entreteniments matemàtics, pensant en el seu ús en educació. Presenta problemes, activitats, llibres i enllaços del mes.

<http://www.cabri.com.br/>
Pàgina del Brasil sobre Cabri. Curs de Cabri. Enllaços, CabriJava...

<http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/sugest.htm>
Pàgina del Brasil. Mecanismes amb Cabri.

<http://www.peda.com/poly/>
Programa sobre políedres. Molt interessant. Programa de funcions.

<http://www.xtec.es/~jlagares/matemati.htm>
Pàgina de Jordi Lagares. Programa winfun. Integrals. Derivades. Apunts de problemes de Cou2.... D'entrada obligatòria.

<http://www.arrakis.es/~fcalbet/index.htm>
Pàgina de F. Calvet. Programa funcions a trossos.

<http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/>
Pàgina de Jesús Escudero sobre jocs entre altres coses. Molt interessant.

http://www.arrakis.es/~mci/pres_0.htm

Un boníssim portal de matemàtiques.

<http://www.redemat.com/>

Portal molt interessant sobre matemàtiques. D'entrada obligatòria.

<http://www.ciudadfutura.com/juegospensa/>

Pàgina de Jocs.

<http://perso.wanadoo.fr/chavaignes/aetius.html>

Geometria interactiva. En francès. Autor: Sylvain DESHAYES.

<http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/cabrijava/index.htm>

Pàgina xinesa molt completa de geometria CabriJava.

http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index_e.htm

Altra pàgina xinesa amb CabriJava.

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html>

Pàgina d'applets cabri creada per Genevieve Tulloue de la universitat de Nantes (França). Conté, entre d'altres coses: Còniques, Poliedres, Electricitat, Mecànica.... Una pàgina molt completa.

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/enseignement/tp/optique/index.html>

Pàgina d'applets cabri de la universitat de Nantes (França). Conté òptica.

<http://telemine.terra.es/personal/jariasca/>

Pàgina de José María Arias. Derive, Cabri, Excel, curiositats....

<http://www.ies.co.jp/math/java/index.html>

Pàgina japonesa amb applets de geometria interactiva (CabriJava i altres)

<http://www.geocities.com/trianguloscabri/>

Pàgina de Ricardo Barroso. Problemes quinzenals sobre triangles. Applets amb CabriJava.

<http://www.iesarroyo.com/index.htm>

Pàgina de matemàtiques de l'IES "Arroyo de Miel" Benalmádena. Málaga. Exercicis per a l'ESO.

<http://www.upv.es/derive/index.html>

Pàgina del Derive en espanyol. Associació d'usuaris.

http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/Net_Elenco_schede.html

Curs de Derive en italià.

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/>

Diccionari de matemàtiques en francès.

<http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/courbes2d/courbes2dsp.shtml>

Diccionari de corbes. En francès i espanyol.

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Diccionari visual de corbes. En anglés.

<http://www2.evansville.edu/ck6/>

1114 teoremes sobre triangles. ENCICLOPÈDIA DELS CENTRES D'UN TRIANGLE (ETC). Pàgina de Clark Kimberling.

<http://imozas.eresmas.com/>

Pàgina d'Idelfonso Mozas. Apunts de matemàtiques per a l'ESO i el batxillerat i també per a la facultat. Enllaços d'astronomia.

Índex

	pàgina
Coneixements preliminars.....	5
Angles de la circumferència.....	5
Teorema de Tales.....	6
Triangles semblants.....	7
Criteris de semblança.....	7
Quadrilàters cíclics.....	8
Propietat.....	8
Teorema de Ptolomeu.....	9
Potència d'un punt respecte d'una circumferència.....	11
Teorema de Pitàgores.....	12
Teorema de l'altura i del catet.....	14
Trigonometria.....	15
Raons trigonomètriques d'un angle agut.....	15
Relacions fonamentals.....	15
Raons trigonomètriques de la suma (resta) de dos angles.....	15
Raons trigonomètriques de l'angle doble.....	15
Raons trigonomètriques de l'angle meitat.....	16
Transformacions de sumes en productes.....	16
Transformacions de productes en sumes.....	16
Teorema dels sinus.....	17
Teorema del cosinus.....	18
Teorema de la tangent.....	19
TRIANGLES.....	20
Definició.....	20
Igualtats de triangles. Criteris d'igualtat.....	20
Classificació dels triangles.....	
Propietats:.....	20
La suma de dos costats és major que l'altre costat.....	21
La suma dels angles d'un triangle mesura 180°	22
Altres elements d'un triangle.....	22
Mitjanes i baricentre.....	22
Propietat: les tres mitjanes es creuen en un punt.....	22
Propietat del baricentre.....	23
Propietat: mesura d'una mitjana.....	23
Mediatris i circumcentre.....	24
Propietat: les tres mediatris es creuen en un punt.....	24
Propietat: càlcul del diàmetre del cercle circumscrit al triangle.....	24
Bisectrius i incentre.....	25
Propietat: les tres bisectrius es creuen en un punt.....	25
Propietat de la bisectriu.....	25
Les circumferències exinscrites.....	26
Altures i ortocentre.....	29
Propietat: les tres altures es creuen en un punt.....	29
Propietat: càlcul de l'altura d'un triangle en funció dels costats.....	30
Triangle òrtic.....	31

Àrea d'un triangle.....	32
Propietat	32
Fórmula d'Heró	32
Fórmules trigonomètriques	32
Fórmula amb el radi de la circumferència circumscrita.....	33
Fórmula amb el radi de la circumferència inscrita.....	33
Propietat de l'altura, bisectriu i mitjana d'un triangles.....	34
TEOREMES	35
Els teoremes de Napoleó	37
Teorema 1. Demostració trigonomètrica.....	37
Teorema 1. Demostració sintètica.....	39
Teorema 2.....	42
Teorema de les àrees dels triangles de Napoleó.....	44
Teorema 3.....	45
Generalització del teorema de Napoleó	46
Punts de Napoleó	47
Teoremes de Menelau i de Ceva	48
Teorema de Menelau. Demostració vectorial	48
Teorema de Menelau. Demostració sintètica.....	49
Teorema de Ceva. Demostració vectorial.....	50
Teorema de Ceva. Demostració sintètica.....	51
Teorema de Von Aubel.....	52
Teorema: recta d'Euler	53
Teorema de Morley.....	54
La circumferència d'Euler	56
La recta de Simson.....	58
Teorema de recta de Simson	58
Propietats de la recta de Simson.....	60
Teorema d'Steewart	61
Teorema de E. Catalan	62
Set teoremes sobre radis	63
Teorema d'Euler.....	67
Teorema de Carnot.....	68
Quatre teoremes sobre triangles equilàters.....	70
Teorema de Viviani	73
Tres teoremes sobre l'ortocentre i l'altura.....	76
Quatre teoremes sobre el baricentre i les mitjanes	77
Tres teoremes sobre triangles rectangles.....	79
Dos teoremes sobre un triangle i 3 quadrats sobre els costats	82
Teorema de Cross.....	84
Altes teoremes sobre triangles	85
Coordenades cartesianes del baricentre.....	85
Propietat vectorial del baricentre	86

PUNTS DEL TRIANGLE	87
Punt de Miquel	89
Punt de Gergonne.....	89
La circumferència d'Adams	90
Punt de Nagel	90
Punt de Lemoine	91
Punt de Grebe	91
Punt de Brocard	92
Punt pivot	92
Mittenpunkt.....	93
Punt d'Apoloni.....	93
Punt d'Exeter.....	94
Punt de Clawson.....	94
Punt de Schiffler.....	95
Punts de Malfatti.	95
PROBLEMES	97
Enunciats.....	99
Solucions.....	103
Bibliografia	141