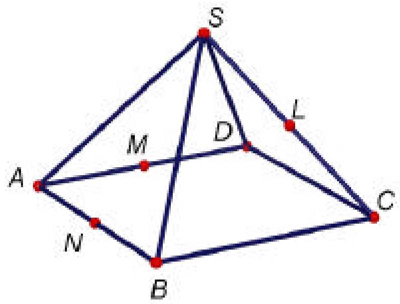
Les arestes de la piràmide quadrangular ABCDS regular són totes iguals a a.

Siguem L, M, N els punts migs de les arestes $\overline{SC}$, $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$, respectivament.

Calculeu l'àrea del la secció de la piràmide determinada pel plànol que passa pels punts M, N, L.

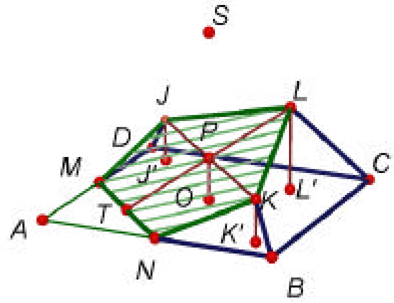


Solució:

Siga O el centre del quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Aleshores, $\angle ASC = \angle BSC = 90^{\circ}$.

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Siga T el punt mig del segment $\overline{MN}$.

L'altura $\overline{OS}$ s'intersecta amb el segment $\overline{TL}$ en el punt P.

Pel punt P tracem una paral·lela al segment $\overline{MN}$ que talla les arestes $\overline{DS}$ i $\overline{BS}$ en els punts J, K, respectivament.

La secció que determina el plànol format pels punts L, M, N, és el pentàgon MNKLJ.

Siga L' la projecció de L sobre la base ABCD.

$\overline{LL'} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{LL'} = \frac{\sqrt{2}}{8}a$.

L' és el punt mig de $\overline{OC}$. T és el punt mig de $\overline{OA}$.

$\overline{TL'} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle $\overset{\Delta}{TL'L}$: $\overline{TL} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

$\overline{TP} = \overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{TL} = \frac{\sqrt{10}}{8}a$.

Siguen J', K' les projeccions de J, K sobre la base ABCD, respectivament.

$\overline{JJ'} = \overline{KK'} = \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{8}a$.

$\overline{BK'} = \frac{1}{8}\overline{BD}$. Aleshores: $\overline{J'K'} = \overline{JK} = \frac{3}{4}\overline{BD} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$

L'àrea del pentàgon MNKLJ és igual a la suma de les àrees del trapezi MNKJ i del triangle $\overset{\Delta}{JKL}$.

$$S_{MNKLJ} = S_{MNKJ} + S_{JKL} = \frac{\overline{MN} + \overline{JK}}{2}\overline{TP} + \frac{\overline{JK}\cdot\overline{PL}}{2} .$$

$$S_{MNKLJ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{3\sqrt{2}}{4}a}{2}\frac{\sqrt{10}}{8}a + \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{10}}{8}a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^{2} .$$