

Determineu les dimensions d'un cilindre de volum màxim inscrit en un cub d'aresta a tal que l'eix del cilindre siga una diagonal del cub.

Solució:

Siga el cub d'aresta $\overline{PR} = a$.

Siga la diagonal $\overline{PQ} = a\sqrt{3}$ eix del cilindre.

Siga KLM la secció del cub que conté una base del cilindre.

La circumferència de la base del cilindre és igual a la

circumferència inscrita al triangle equilàter $\triangle KLM$.

Siga O el centre de la circumferència.

Siga $x = \overline{KQ}$, $y = \overline{OQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLQ$:

$$\overline{KL} = x\sqrt{2}$$

Vegem la relació entre x , y . El volum del tetraedre KLMQ és:

$$V_{KLMQ} = \frac{1}{6} \overline{QK}^3 = \frac{1}{3} \frac{\overline{KL}^2 \sqrt{3}}{4} \overline{OQ}.$$

$$\frac{1}{6} x^2 = \frac{1}{2} \frac{(x\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} y. \text{ Aleshores: } y = \frac{\sqrt{3}}{3} x.$$

Calculem el radi del cilindre.

O és el baricentre del triangle equilàter $\triangle KLM$. Siga N el punt mig del costat $\overline{KL}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MNL$:

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{KL} = \frac{\sqrt{6}}{2} x. \text{ Aplicant la propietat del baricentre el radi del cilindre és:}$$

$$r = \overline{ON} = \frac{1}{3} \overline{MN} = \frac{\sqrt{6}}{6} x.$$

L'altura del cilindre és:

$$h = \overline{PQ} - 2\overline{OQ} = a\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} x.$$

El volum del cilindre és:

$$V(r, h) = \pi r^2 h. \quad V(x) = \pi \frac{1}{6} x^2 \left(a\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} x \right).$$

$$V(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \left(-\frac{2}{3} x^3 + ax^2 \right), \quad x \in \left] 0, \frac{3a}{2} \right]. \text{ Derivant la funció:}$$

$$V'(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} (-2x^2 + 2ax). \quad V'(x) = 0, \quad x = a$$

$$V''(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} (-4x + 2a), \quad V''(a) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{3} < 0. \text{ Aleshores } x = a \text{ és el màxim de la funció:}$$

Les dimensions del cilindre de volum màxim són $r = \frac{\sqrt{6}}{6} a$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ i el volum màxim

$$\text{és } V(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} a^3.$$

