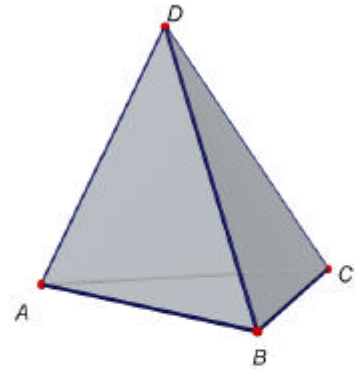


Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat a i dos triangles rectangles isòsceles. Calculeu l'àrea i el volum.



Solució:

Siga el tetraedre ABCD tal que les cares $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ són triangles equilàters de costat a . Siguen $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ les cares que són triangles rectangles isòsceles.
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = a$.
 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\triangle ABD$:

$$\overline{AD} = a\sqrt{2}.$$

L'àrea del tetraedre és:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} + 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a^2.$$

Siga P la projecció de C sobre la base $\triangle ABC$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

M pertany al segment $\overline{PB}$.

Siga $\overline{DP} = h$ altura del tetraedre. Siga $\overline{PM} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AMB$:

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PMD$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = x^2 + h^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle PBD$:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 + h^2 \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{3}{4} a^2 = x^2 + h^2 \\ 2a^2 = x^2 + \frac{3}{4} a^2 + \sqrt{3}ax + h^2 \end{cases} \quad \text{La solució és} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6} a \\ h = \frac{\sqrt{6}}{3} a \end{cases}.$$

El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

