

En un tetraedre regular la suma dels quadrats de les arestes és quatre vegades la suma dels quadrats dels segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades.

Solució per a tetraedre regular:

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $\overline{AB} = a$

Siga $\overline{DH}$ altura del tetraedre.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$ oposada a l'aresta $\overline{AB}$.

H és el baricentre del triangle equilàter $\triangle ABC$

$$\overline{CM} = a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{CH} = \frac{2}{3} \overline{CM} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CHD$:

$$\overline{DH} = a \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Siga P la projecció de N sobre el triangle $\triangle ABC$.

Els triangles $\triangle CHD$, $\triangle CPN$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{DN} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\overline{MP} = \overline{MH} + \overline{HP} = \frac{2}{3} \overline{MC} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle MPN$:

$$\overline{MN}^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

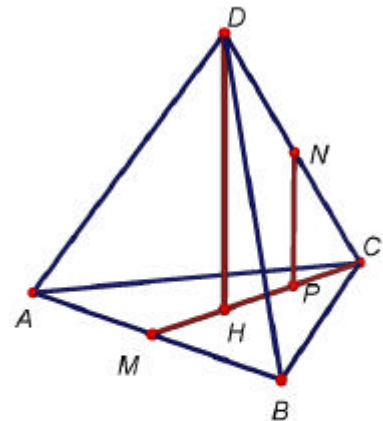
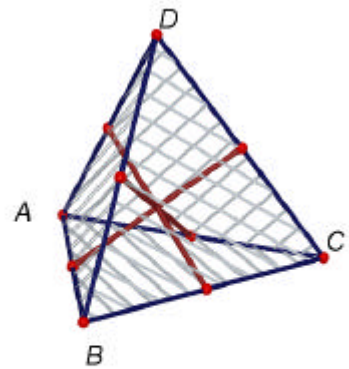
La suma dels quadrats de les arestes del tetraedre equilàter ABCD és:

$$6\overline{AB}^2 = 6a^2.$$

La suma dels quadrats dels tres segments que uneixen els punts migs les arestes del tetraedre regular ABCD és:

$$3\overline{MN}^2 = 3 \frac{1}{2} a^2 = \frac{3}{2} a^2.$$

Notem que $6 \cdot \overline{AB}^2 = 4 \cdot 3 \cdot \overline{MN}^2$.



Solució general

La propietat s'acompleix per a qualsevol tetraedre.

Solució :

Sense pèrdua de generalitat, siga el tetraedre ABCD amb les següents coordenades cartesianes.

$A(0, 0, 0)$, $B(b, 0, 0)$, $C(a, c, 0)$, $D(d, e, f)$.

$\vec{AB} = (b, 0, 0)$, $\vec{AC} = (a, c, 0)$, $\vec{BC} = (a-b, c, 0)$,

$\vec{BD} = (d-b, e, f)$, $\vec{AD} = (d, e, f)$, $\vec{CD} = (d-a, e-c, f)$.

$$\overline{AB}^2 = b^2 .$$

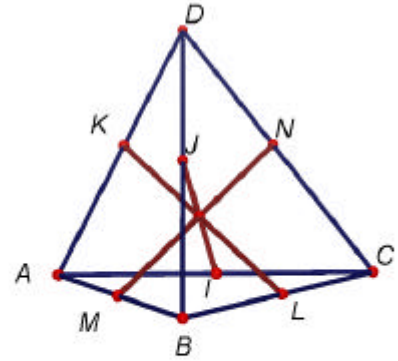
$$\overline{AC}^2 = a^2 + c^2 .$$

$$\overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab .$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2bd .$$

$$\overline{AD}^2 = d^2 + e^2 + f^2 .$$

$$\overline{CD}^2 = a^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2ad - 2ce .$$



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce)$$

Siguen I i J els punts mig de les arestes oposades $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, respectivament.

Les seues coordenades són:

$$I\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}, 0\right), J\left(\frac{b+d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right), \vec{IJ} = \left(\frac{b+d-a}{2}, \frac{e-c}{2}, \frac{f}{2}\right).$$

$$\vec{IJ}^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(bd - ce - ab - ad)).$$

Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

Les seues coordenades són:

$$K\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}\right), L\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}, 0\right), \vec{KL} = \left(\frac{a+b-d}{2}, \frac{c-e}{2}, -\frac{f}{2}\right).$$

$$\vec{KL}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ab - ad - bd - ce)).$$

Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

Les seues coordenades són:

$$M\left(\frac{b}{2}, 0, 0\right), N\left(\frac{a+d}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right), \vec{MN} = \left(\frac{a+d-b}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{f}{2}\right).$$

$$\vec{MN}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2(ad - ab - bd + ce)).$$

$$\vec{IJ}^2 + \vec{KL}^2 + \vec{MN}^2 = \frac{1}{4}(3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce)).$$

$$4(\vec{IJ}^2 + \vec{KL}^2 + \vec{MN}^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) - 2(ab + bd + ad + ce) .$$