

Problema 11

Siga la recta r que passa pels punts $A(1,0,2)$ i $B(0,1,3)$.

Siga la recta s que passa pels punts $C(0,3,0)$ i $D(1,2,1)$.

Determineu la posició relativa de r i s .

Calculeu la distància entre les rectes r i s .

Solució:

El vector director de la recta r és $\vec{AB} = (-1, 1, 1)$.

El vector director de la recta s és $\vec{CD} = (1, -1, 1)$.

Els vectors $\{\vec{AB}, \vec{CD}\}$ són linealment independents ja que no són proporcionals.

Aleshores les dues rectes són secants o es creuen.

$\vec{AC} = (-1, 3, -2)$.

Calculem el determinant format pels tres vectors:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0. \text{ Aleshores } \{\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}\} \text{ són linealment independents.}$$

Per tant, les rectes r i s es creuen.

$$\text{La distància entre les dues rectes és: } d(r, s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}|}{\|\vec{AB} \times \vec{CD}\|}.$$

$$\vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 2, 0). \quad \|\vec{AB} \times \vec{CD}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}|}{\|\vec{AB} \times \vec{CD}\|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

