

Problema 5:

Determineu el punt projecció de $P(-1, 1, -2)$ sobre el plànel que passa pels punts

$A(1, -1, 1)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(4, -5, -2)$.

Calculeu la distància entre el punt P i el plànel anterior.

Solució:

Calculem les components dels vectors $\vec{AB}, \vec{AC}$:

$$\vec{AB} = (-3, 2, 2), \quad \vec{AC} = (3, -4, -3).$$

$\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ són linealment independents.

L'equació del plànel que pel punt A i té direcció $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificant:

$$\Pi \equiv 2x - 3y + 6z - 11 = 0.$$

El vector característic és:

$$\mathbf{n} = (2, -3, 6).$$

La recta perpendicular al plànel Π que passa per P té equació:

$$r \equiv (x, y, z) = (-1, 1, -2) + \alpha(2, -3, 6).$$

El punt P_0 projecció de P sobre el plànel Π és la intersecció del plànel Π i la recta r :

$$\begin{cases} (x, y, z) = (-1 + 2\alpha, 1 - 3\alpha, -2 + 6\alpha) \\ 2x - 3y + 6z = 11 \end{cases}$$

$$2(-1 + 2\alpha) - 3(1 - 3\alpha) + 6(-2 + 6\alpha) = 11. \quad \alpha = \frac{4}{7}.$$

$$\text{La solució del sistema és } \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = \frac{10}{7} \end{cases}, \text{ el punt projecció és } P_0\left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right).$$

La distància del punt P al plànel Π és:

$$d(P, \Pi) = d(P, P_0) = \|\overrightarrow{PP_0}\| = \left\| \left(\frac{8}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{24}{7} \right) \right\| = 4.$$

Altra forma:

$$d(P, \Pi) = \left| \frac{2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) - 11}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} \right| = 4.$$

