Problema 8

Donats els punts $A(3,-4,7)$, $B(-1,3,2)$, $C(1,2,-3)$, determineu:

a) El vèrtex D el paral·lelogram ABCD.
b) La mesura dels costats del paral·lelogram ABCD.
c) L'àrea del paral·lelogram ABCD.
d) Els angles del paral·lelogram ABCD.

Solució:

$\vec{AB}=(-4,7,-5)$, $\vec{BC}=(2,-1,-5)$.

a)
Siga $D(x,y,z)$.

ABCD és un paral·lelogram si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
$(x-3,y+4,z-7)=(2,-1,-5)$. Igualant les components dels vectors:

$\begin{cases} x-3=2 \\ y+4=-1 \\ z-7=-5 \end{cases}$. Resolent el sistema: $D(5,-5,2)$.

b)
Les mesures dels costats del paral·lelogram són:

$\overline{AB}=\overline{CD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-4)^2+7^2+(-5)^2}=3\sqrt{10}\approx 9.49u$.

$\overline{AD}=\overline{DC}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{30}\approx 5.48u$.

c)
L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$.

$$\vec{AB}\times\vec{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=(-40,-30,-10)$$

$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{(-40)^2+(-30)^2+(-10)^2}=10\sqrt{26}\approx 50.99u^2$.

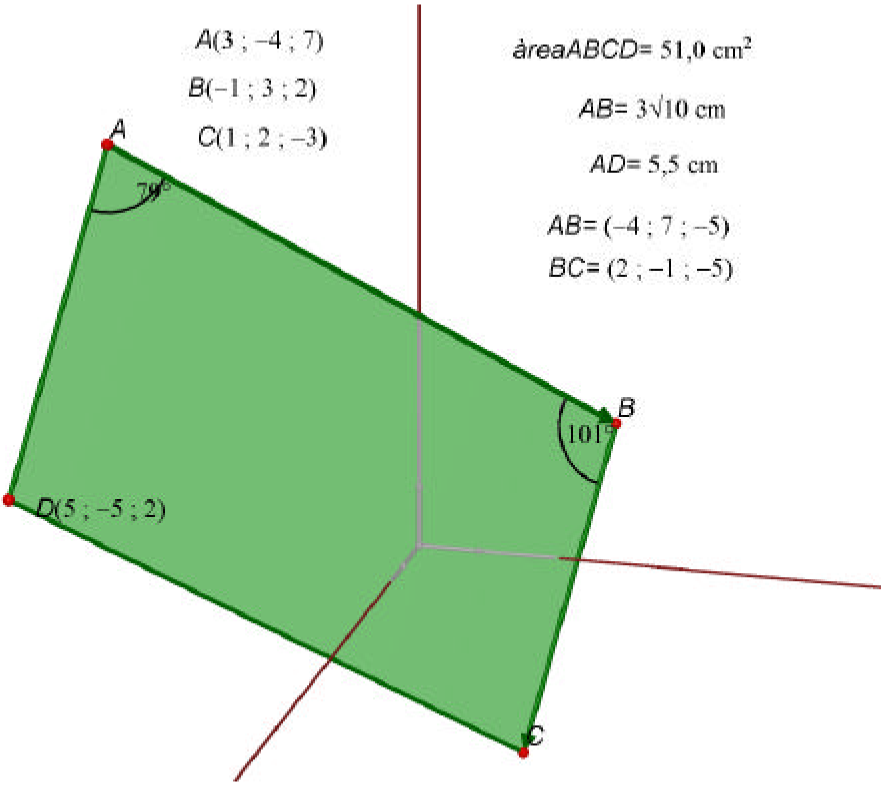
d)
Per calcular els angles utilitzarem el producte escalar:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos A$.

$(-4,7,-5)(2,-1,-5)=\sqrt{(-4)^2+7^2+(-5)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}\cos A$.

$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, $A=C=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}\approx 78^{o}54'15''$.

$B=D=180^{o}-A=101^{o}5'45''$.



A(3 ; −4 ; 7)
B(−1 ; 3 ; 2)
C(1 ; 2 ; −3)
àreaABCD= 51,0 cm²
AB= 3√10 cm
AD= 5,5 cm
AB= (−4 ; 7 ; −5)
BC= (2 ; −1 ; −5)
A
B
C
D(5 ; −5 ; 2)
79°
101°