Problema 9

Donats els punts $A(2,0,3)$, $P(1,-3,2)$ i el vector $v=(2,1,3)$. Determineu:

a) L'equació general de la recta r que passa pel punt P i té direcció v.
b) L'equació general del plànol que passa pel punt P i conté la recta r.
c) La distància del punt A a la recta r.

Solució:

a)

L'equació vectorial de la recta r és:

$r\equiv(x,y,z)=(1,-3,2)+\alpha(2,1,3)$. L'equació contínua és:

$r\equiv\dfrac{x-1}{2}=y+3=\dfrac{z-2}{3}$. L'equació general és:

$r\equiv\begin{cases}x-2y-7=0\\3y-z+11=0\end{cases}$.

b)

Les components del vector $\vec{AP}$ són:

$\vec{AP}=(-1,-3,-1)$

El plànol que cerquem és el que passa pel punt A i té direcció $\{\vec{AP},v\}$. La seua equació és:

$\Pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z-3\\ -1 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=0$. Simplificant:

$\Pi\equiv-8x+y+5z+1=0$.

c)

Mètode 1:

Determinem el punt projecció A_0 de A sobre la recta r.

$A_0(1+2\alpha,-3+\alpha,2+3\alpha)$.

Les coordenades del vector $\vec{AA_0}$ són:

$\vec{AA_0}=(-1+2\alpha,-3+\alpha,-1+3\alpha)$.

Els vectors $\vec{AA_0}$, v són ortogonals.

$\vec{AA_0}\cdot v=0$.

$(-1+2\alpha,-3+\alpha,-1+3\alpha)(2,1,3)=0$.

$-2+4\alpha-3+\alpha-3+9\alpha=0$. Resolent l'equació:

$\alpha=\dfrac{4}{7}$. El punt projecció té coordenades:

$A_0=\left(\dfrac{15}{7},\dfrac{-1}{7},\dfrac{26}{7}\right)$. La distància de A la recta r és igual a la distància entre A i A_0.

$d(A,r)=\left\|\overrightarrow{AA_0}\right\|=\left\|\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{-17}{7},\dfrac{5}{7}\right)\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{7}\right)^2+\left(\dfrac{-17}{7}\right)^2+\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{35}}{7}\approx 2.54u$.

Mètode 2:

$d(A,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\times v\right\|}{\|v\|}$.

$$\overrightarrow{AP} \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-8, 1, 5).$$

$$\left\| \overrightarrow{AP} \times v \right\| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 5^2} = 3\sqrt{10}.$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

$$d(A, r) = \frac{\left\| \overrightarrow{AP} \times v \right\|}{\|v\|} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{35}}{7} \approx 2.54u.$$