Taller: Problemes de geometria amb Cabri

Girona, juliol 2009

Ricard Peiró i Estruch

L'ensenyança de la geometria hauria de ser nucli central en el currículum escolar ja que ofereixen resultats interessants així com raonaments i metodologies formatives. La geometria es distingeix per la claredat i la senzillesa dels enunciats.

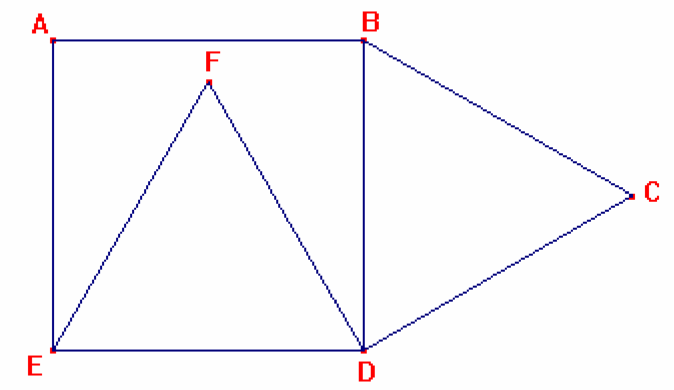
Resoldre problemes de geometria és una tasca que permet dibuixar el problema abans de començar la seua resolució i donar la intuïció del problema. L'ajut del programa de geometria dinàmica Cabri Géomètre ens permet provar la conjectura del problema. Aquests processos porten implícits procediments d'anàlisi, comprovació, experimentació, i investigació, procediments que motiven l'activitat constructiva de l'alumnat.

La introducció de materials informàtics en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

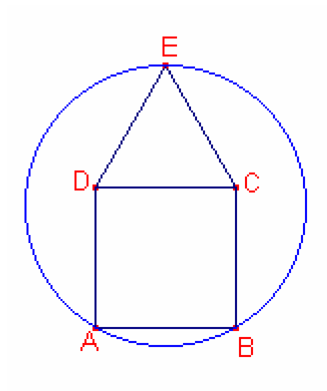
El taller consisteix en construir geomètricament i provar la conjectura del problema que es vol resoldre. Els problemes són de distinta complexitat i nivell.

Enunciats dels problemes

Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters
ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F et C són alineats.



Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.
Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.
Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.



Problema 3: Resolució de triangles.
a) Resoleu el triangle coneguts $a=6, h_A=9, h_B=4$.
b) Resoleu el triangle coneguts $a=10, b=15, h_A=8$.

Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=2$.

Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.

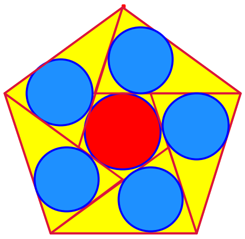
Problema 6: Heptàgon regular.

Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$.

Problema 7: Quadrilàter inscriptible
En una circumferència c donada, hi inscrivim un quadrilàter, les diagonals del qual són perpendiculars. Proveu que, siga quin siga el quadrilàter inscrit de diagonals perpendiculars, la suma dels quadrats de dos costats oposats és constant i igual al quadrat del diàmetre de la circumferència.

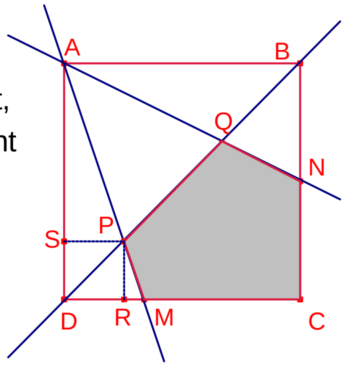
Problema 8: Problema Sangaku.

En la figura 3 el costat del pentàgon regular mesura 1cm. Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències. Proveu que és $\frac{r}{R} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.



Problema 9: Quadrat i pentàgon.

Determineu l'àrea del pentàgon MCNQP de la figura 4 , limitat per les rectes BC, CD, AN, AM, BD, tal que ABCD són els vèrtexs d'un quadrat, N és el punt mig de $\overline{BC}$ i M divideix el segment $\overline{CD}$ en raó 2:1 (calculant a partir del vèrtex C), si el costat del quadrat ABCD és a. Noteu que $S_{MCNQP} = \frac{3}{8}a^2$.

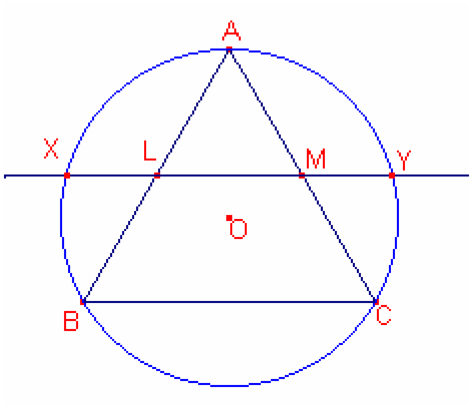


Problema 10: nombre d'or

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

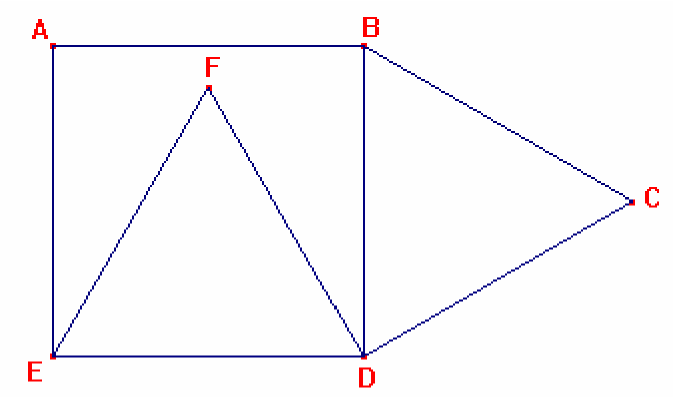
Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.



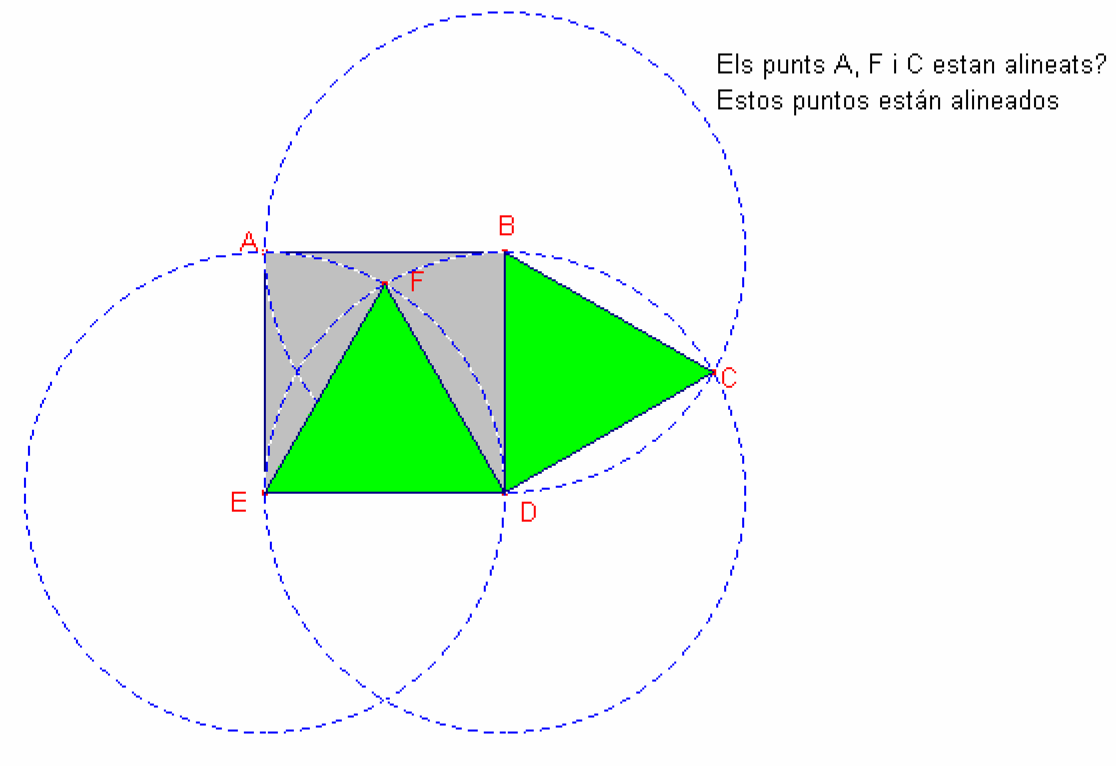
Construccions amb Cabri

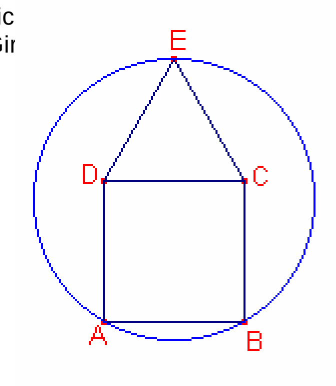
Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters
ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F et C són alineats.



a) Dibuixeu el quadrat ABDE (opció polígon regular).
b) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre E que passa per D.
c) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre D que passa per E.
d) Feu la intersecció de les circumferències C_1 i C_2. Anomeneu el punt F.
e) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.
f) Dibuixeu la circumferència C_3 de centre B que passa per D.
g) Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3. Anomeneu el punt C.
h) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{BDC}$.

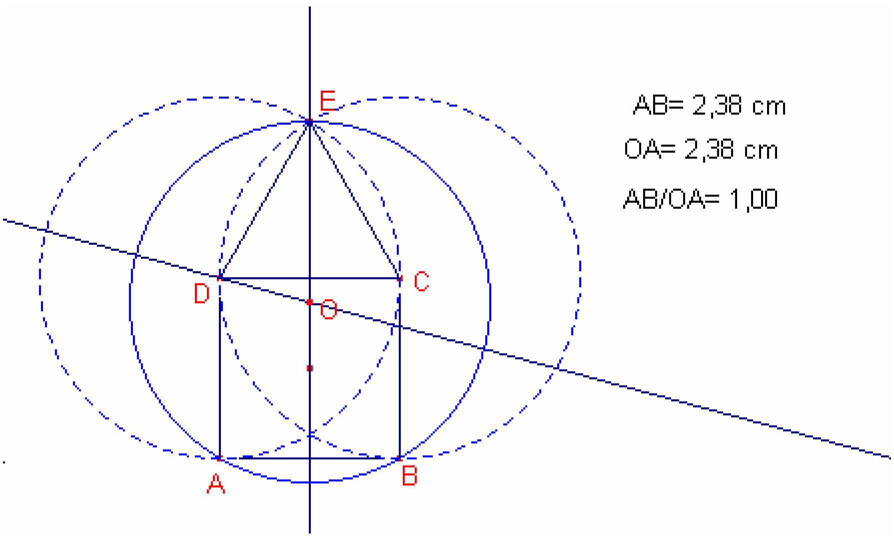
i) Comproveu que els punts A, F C estan alineat.





Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.
Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.
Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.

a) Dibuixeu el quadrat ABCD (opció polígon regular).
b) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre D que passa per C.
c) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C que passa per D.
d) Feu la intersecció de les circumferències C_1 i C_2. Anomeneu el punt E.
e) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{DCE}$.
e) Dibuixeu la mediatriu r del segment $\overline{AB}$.
f) Dibuixeu la mediatriu s del segment $\overline{AE}$.
g) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt O.
h) dibuixeu la circumferència C_3 de centre O que passa pel punt A.
i) Calculeu les mesures dels segments $\overline{AB}$, $\overline{OA}$.
j) Dividiu les mesures dels costats anteriors, i noteu que és 1.



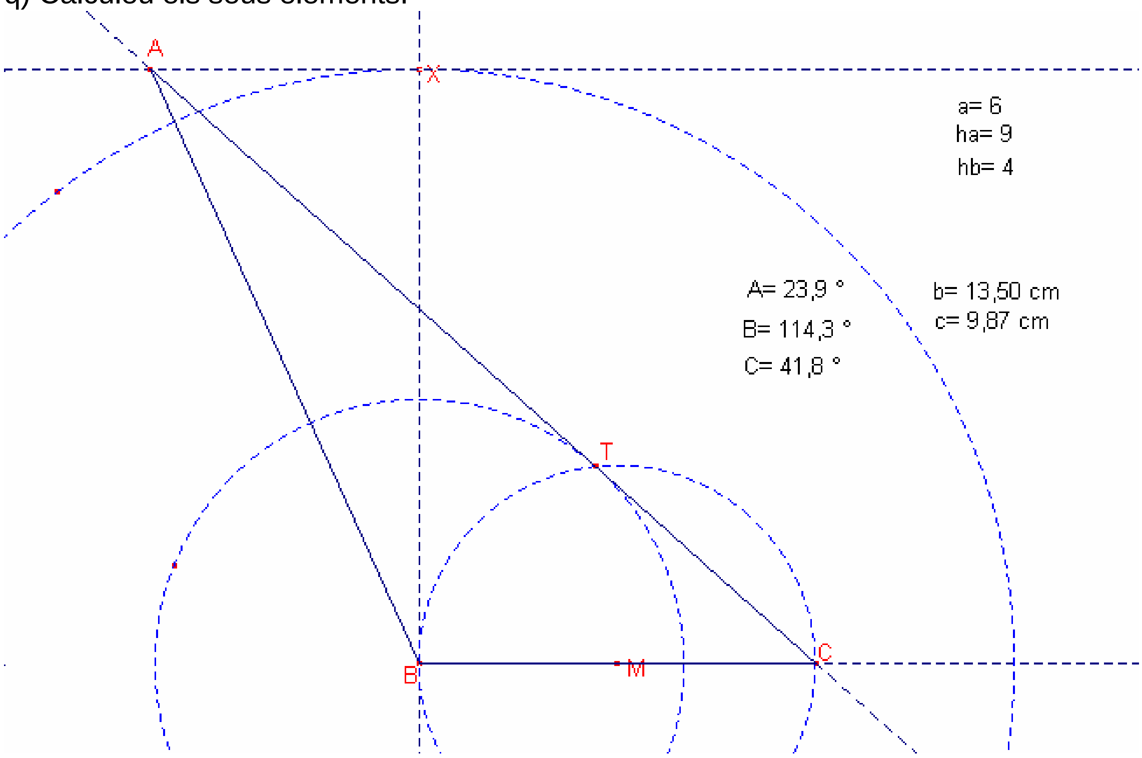
Problema 3: Resolució de triangles.

a) Resoleu el triangle coneguts $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$.

b) Resoleu el triangle coneguts $a = 10, b = 15, h_A = 8$.

Apartat a

a) Amb edició numèrica definiu $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$
b) Dibuixeu la semirecta d'origen B.
c) Transferiu a la semirecta el valor a. Anomeneu el punt C.
d) Transferiu el valor h_A al punt B.
e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A.
f) Dibuixeu la recta perpendicular r a la semirecta que passa pel punt B.
g) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i la recta r. Anomeneu el punt X.
h) Dibuixeu la recta s perpendicular a r que passa pel punt X.
i) Transferiu el valor h_B al punt B.
j) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi h_B.
k) Dibuixeu el punt mig M del segment $\overline{BC}$.
l) Dibuixeu la circumferència C_3 de centre M que passa pel punt B.
m) Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3. Anomeneu el punt T, peu de l'altura sobre el costat b.
n) Dibuixeu la recta t que passa pels punts C, T.
o) Feu la intersecció de les rectes s, t. Anomeneu el punt A.
p) Dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
q) Calculeu els seus elements.



Apartat b

a) Amb edició numèrica definiu $a = 10, b = 15, h_A = 8$

b) Dibuixeu la semirecta d'origen B.

c) Transferiu a la semirecta el valor a. Anomeneu el punt C.

d) Transferiu el valor h_A al punt B.

e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A.

f) Dibuixeu la recta perpendicular r a la semirecta que passa pel punt B.

g) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i la recta r. Anomeneu el punt X.

h) Dibuixeu la recta s perpendicular a r que passa pel punt X.

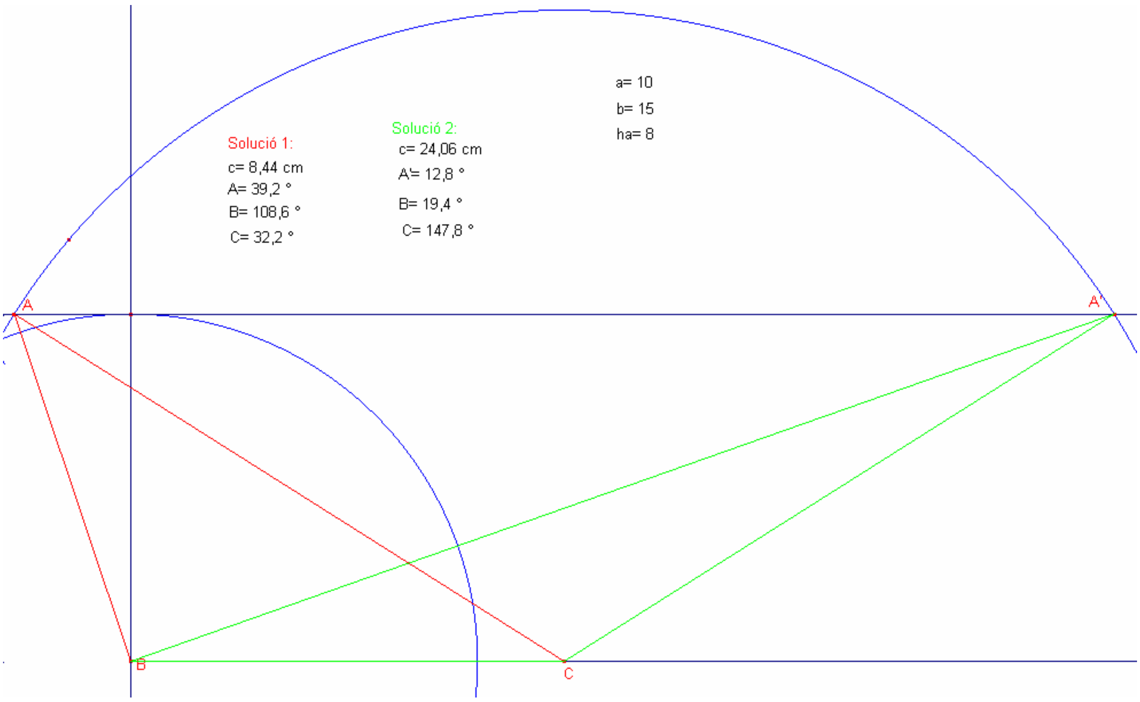
i) Transferiu el valor b al punt C.

j) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C i radi b.

k) Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2. Anomeneu els punts A, A'. El problema té dues solucions.

l) Dibuixeu els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B}C$.

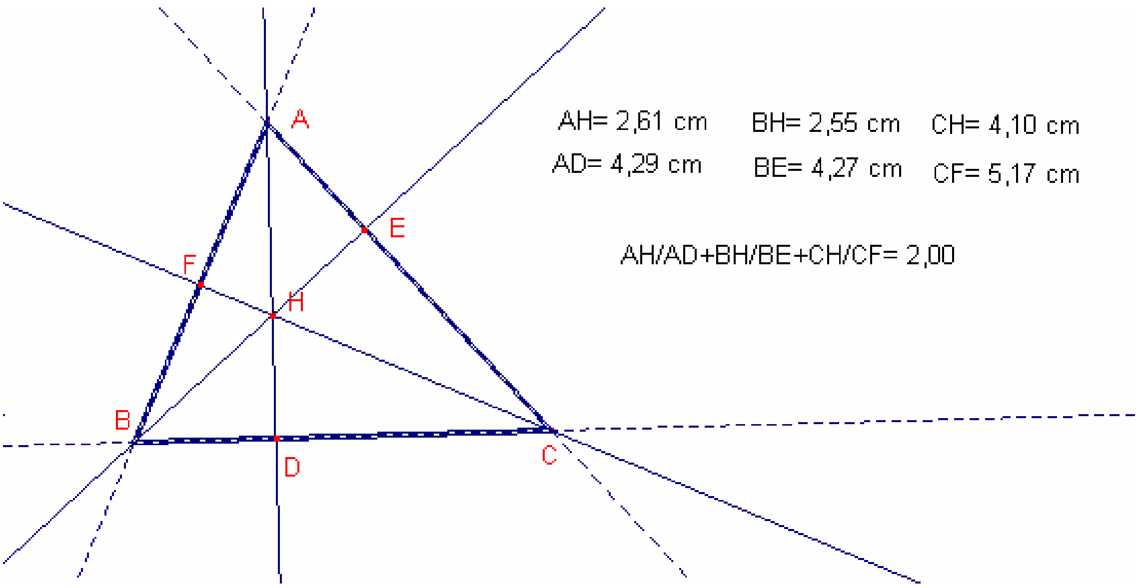
m) Calculeu els seus elements.



Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=2$.

a) Dibuixeu el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
b) Dibuixeu les rectes BC, AC, AB.
c) Dibuixeu la recta altura h_a perpendicular a la recta BC que passa per A.
d) Feu la intersecció de les rectes BC, h_a. Anomeneu el punt D.
e) Anàlogament dibuixeu les rectes altura h_b, h_c.
f) Feu la intersecció de les rectes AC, h_b. Anomeneu el punt E.
g) Feu la intersecció de les rectes AB, h_c. Anomeneu el punt F.
h) Feu la intersecció de les rectes h_a, h_b. Anomeneu el punt H, ortocentre del triangle.
i) Mesureu els segments: $\overline{AH}$, $\overline{AD}$, $\overline{BH}$, $\overline{BE}$, $\overline{CH}$, $\overline{CF}$.
j) Amb ajut de la calculadora, calculeu $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CF}}$.
k) Noteu que el teorema només s'acompleix quan el triangle és acutangle.

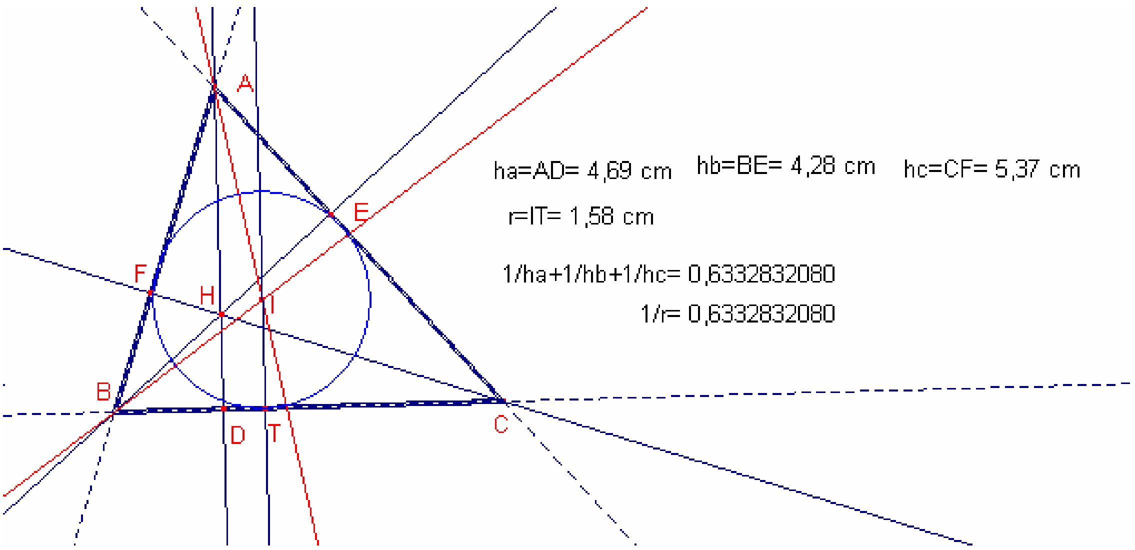


Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.

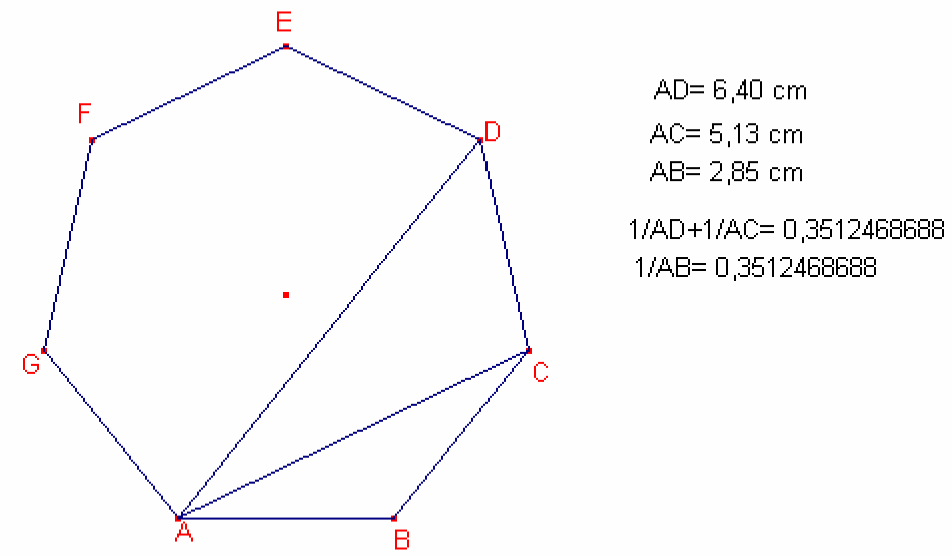
a) Dibuixeu el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
b) Dibuixeu les rectes BC, AC, AB.
c) Dibuixeu la recta altura h_a perpendicular a la recta BC que passa per A.
d) Feu la intersecció de les rectes BC, h_a. Anomeneu el punt D.
e) Anàlogament dibuixeu les rectes altura h_b, h_c.
f) Feu la intersecció de les rectes AC, h_b. Anomeneu el punt E.
g) Feu la intersecció de les rectes AB, h_c. Anomeneu el punt F.
h) Mesureu els segments altura: $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.
i) Dibuixeu la recta r bisectriu a l'angle A.
j) Dibuixeu la recta s bisectriu a l'angle B.
k) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt I (incentre).
l) Dibuixeu la recta t perpendicular al costat a que passa pel punt I.
m) Feu la intersecció de la recta t i el costat a. Anomeneu el punt T.
n) Dibuixeu la circumferència de centre I que passa pel punt T (circumferència inscrita al triangle).
o) Mesureu el segment $r=\overline{IT}$ (radi de la circumferència inscrita).
p) Amb ajut de la calculadora calculeu $\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BE}}+\frac{1}{\overline{CF}}$.
q) Amb ajut de la calculadora calculeu $\frac{1}{\overline{IT}}$.
r) Noteu que $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.



Problema 6: Heptàgon regular.

Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

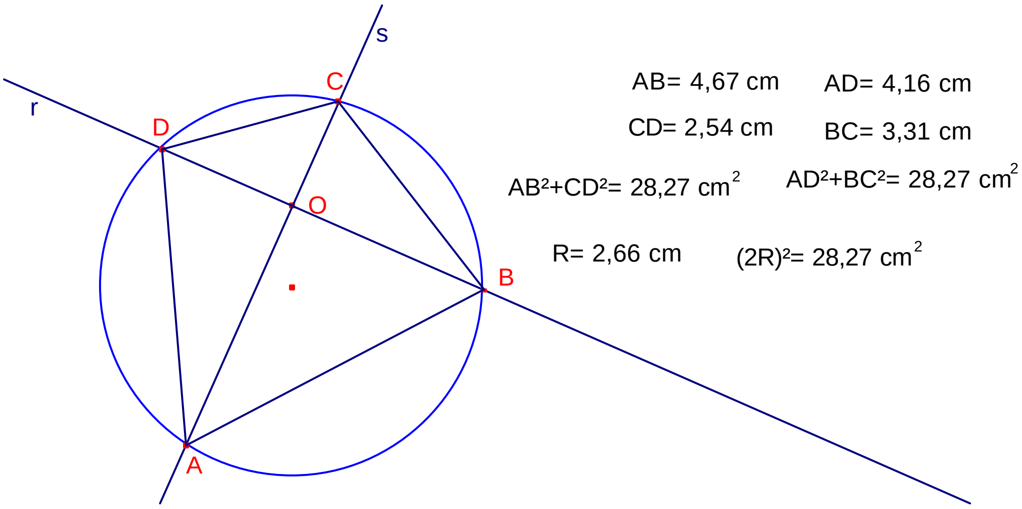
a) Dibuixeu el heptàgon regular ABCDEFG.
b) Dibuixeu els segments $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.
c) Mesureu els segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.
d) Amb ajut de la calculadora, calculeu $\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ i $\frac{1}{\overline{AB}}$.
e) Noteu que els resultats són iguals.



Problema 7: Cuadrilátero inscribible

En una circunferencia C dada, inscribimos un cuadrilátero que tiene las diagonales perpendiculares. Probar que, sea quien sea el cuadrilátero inscrito de diagonales perpendiculares, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es constante y igual al cuadrado del diámetro de la circunferencia.

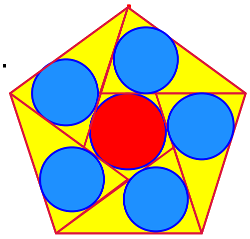
a) Dibujar la circunferencia
b) Dibujar el punto O interior a la circunferencia.
c) Dibujar dos rectas r, s perpendiculares que pasan por O.
d) Dibujar el cuadrilátero ABCD
e) Calcular las medidas de los lados del cuadrilátero.
f) Calcular $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$ y notar que son iguales.
g) Medir el radio R de la circunferencia.
h) Calcular $(2R)^2$ y notar que es igual a los valores del apartado f).



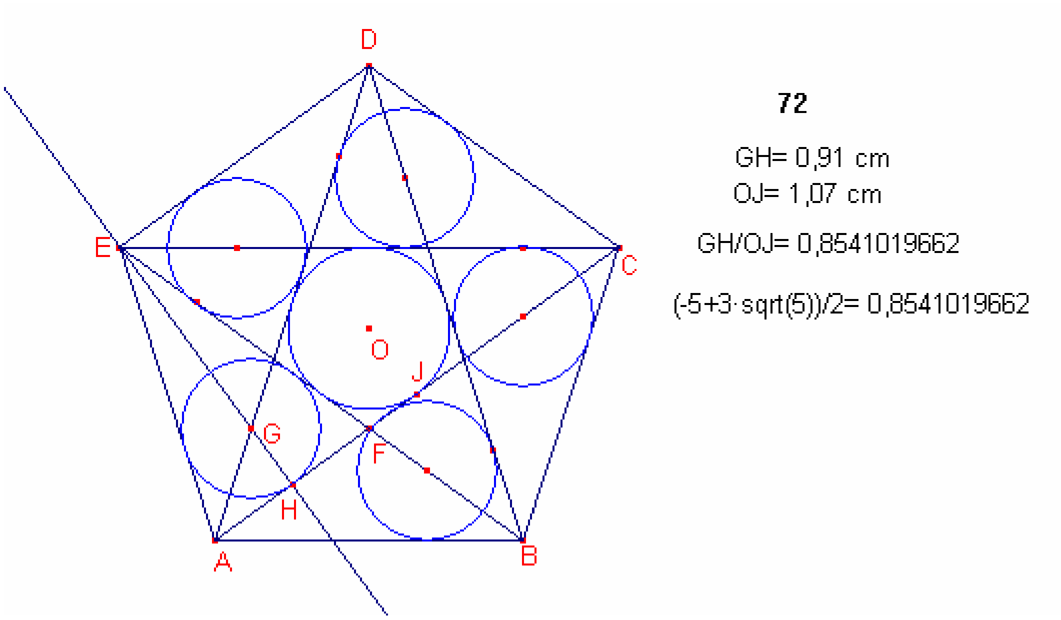
Problema 8: Problema Sangaku.

En la següent figura el costat del pentàgon regular mesura 1cm.
Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.

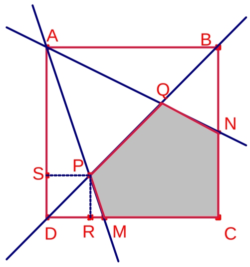
Proveu que és $\frac{r}{R}=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.



a) Dibuixeu el pentàgon regular ABCDE de centre O.
b) Dibuixar les diagonals AC, BE, AD.
c) Feu la intersecció de les diagonals AC, BE. Anomeneu el punt F.
d) Dibuixeu la recta r mediatriu al segment AF.
e) Feu la intersecció de la diagonal AD i la recta r. anomeneu el punt G
f) Feu la intersecció de la recta r i la diagonal AC. Anomeneu el punt H.
g) Dibuixeu la circumferència de centre G que passa per H.
h) Definiu el valor 72 (edició numèrica)
i) Amb rotacions de centre O i angle 72, dibuixeu les altres circumferències menudes.
j) Dibuixeu el punt mig de la diagonal AC. Anomeneu el punt J.
k) Dibuixeu la circumferència de centre O que passa per J.
l) Calculeu les mesures del segments GH i OJ (radis dels dos tipus de circumferència).
k) Amb ajut de la calculadora calculeu la proporció dels dos radis.
l) Amb ajut de la calculadora calculeu $\frac{r}{R}=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$ i noteu que és igual al resultat de l'apartat k).



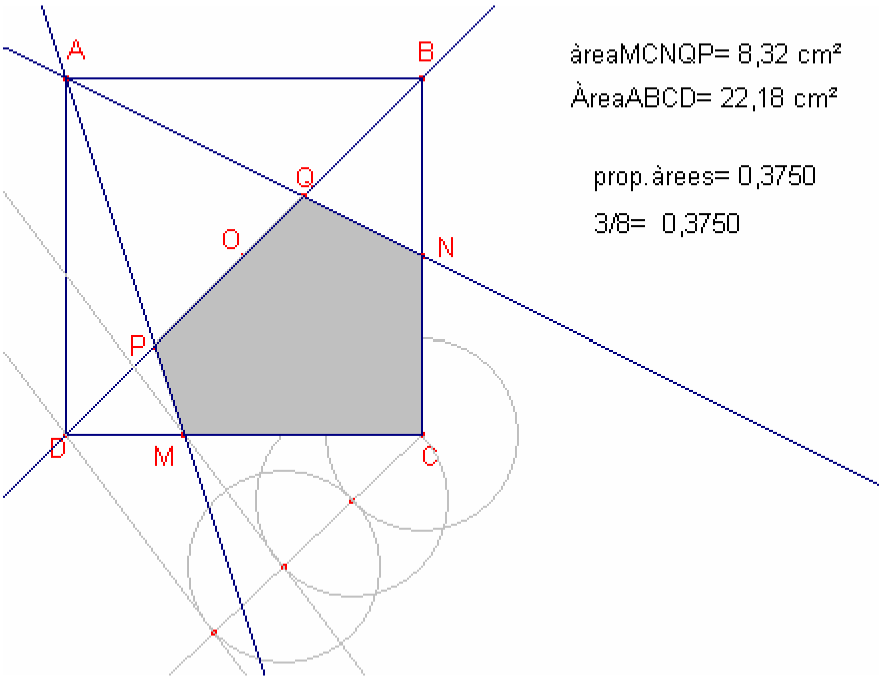
Problema 9: Quadrat i pentàgon



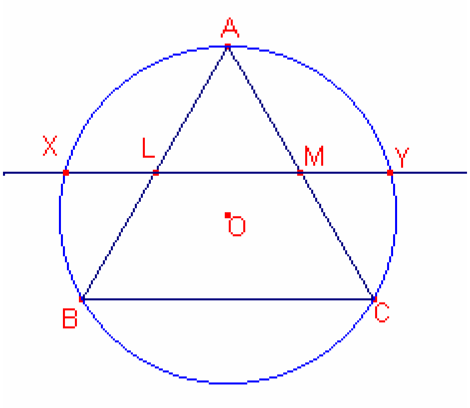
Determineu l'àrea del pentàgon MCNQP de la figura, limitat per les rectes BC, CD, AN, AM, BD,
tal que ABCD són els vèrtexs d'un quadrat, N és el punt mig de $\overline{BC}$ i M divideix el segment $\overline{CD}$ en
raó 2:1 (calculant a partir del vèrtex C), si el costat del quadrat ABCD és a.

Noteu que $S_{MCNQP}=\frac{3}{8}a^2$.

a) Dibuixeu el quadrat ABCD de centre O
b) Dibuixeu la diagonal BD.
c) Dibuixeu el punt mig N del segment BC.
d) Dividiu el segment CD en tres parts iguals. Anomeneu M a la segona part, comptant des de C.
e) Dibuixeu les rectes AM, AN.
f) Feu la intersecció de la recta AM i la recta BD. Anomeneu el punt P.
g) Feu la intersecció de la recta AN i la recta BD. Anomeneu el punt Q.
h) Dibuixeu el polígon MCNQP.
i) Calculeu les àrees del pentàgon MCNQP i el quadrat ABCD.
j) Amb ajut de la calculadora calculeu la proporció entre les àrees. Noteu que és 3/8.



Problema 10: nombre d'or

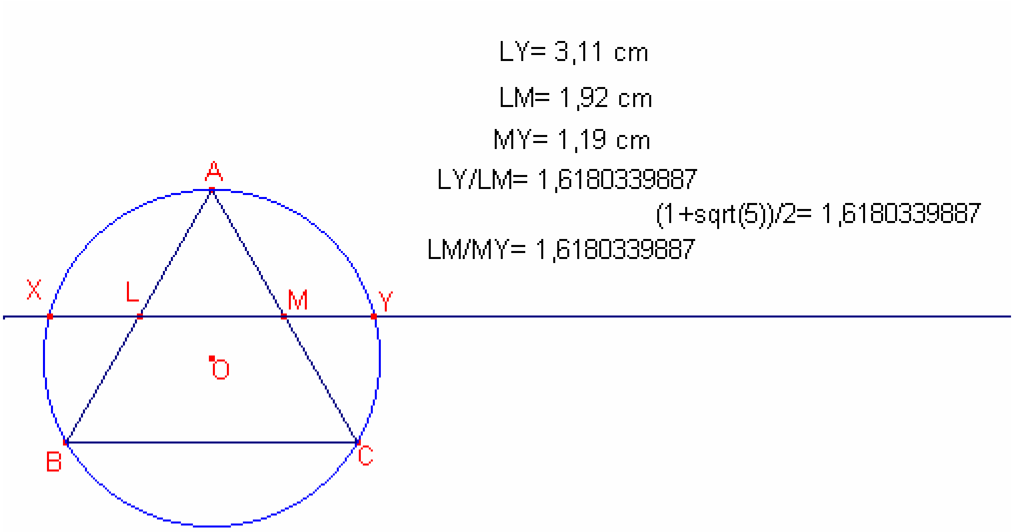


Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

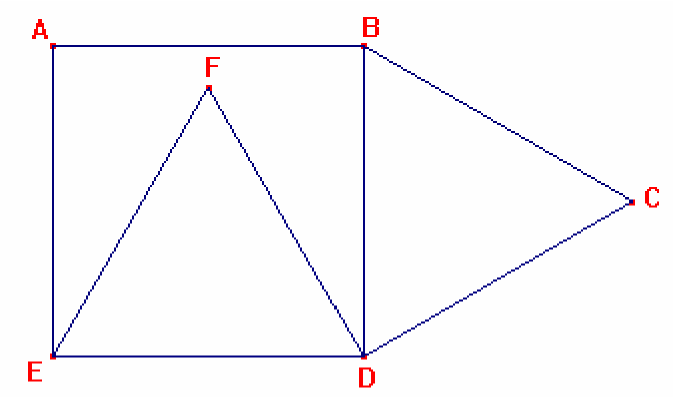
Proveu que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.

a) Dibuixeu el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O (opció polígon regular).
b) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.
c) Dibuixeu els punts migs L, M dels segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament.
d) Dibuixeu la recta r que passa pels punts L, M.
e) Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1. Anomeneu els punts X, Y.
f) Mesureu els segments $\overline{LY}$, $\overline{LM}$, $\overline{MY}$.
g) Amb ajut de la calculadora, calculeu $\dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}}$, $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
h) Noteu que els tres quocients són iguals.



Solucions analítiques

Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters
ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F et C són alineats.



Solució 1:
A, F, C són alineats si l'angle $\angle AFC$ és pla.

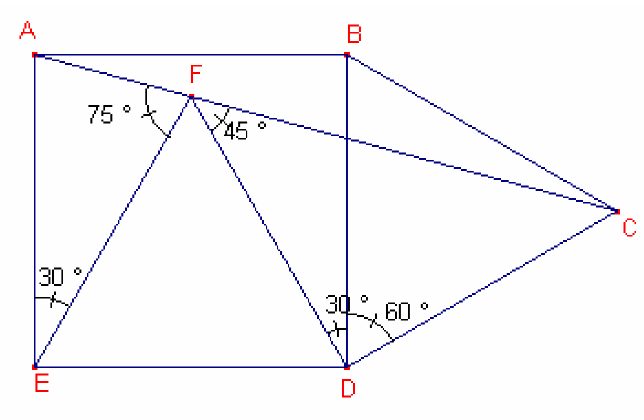
El triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ és isòsceles.
$\angle AEF = 30^o$, per tant, $\angle EAF = \angle EFA = 75^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{DCF}$ és isòsceles.
$\angle FDC = 90^o$, per tant, $\angle DFC = \angle DCF = 45^o$

L'angle $\angle EFD = 60^o$

$\angle EFA + \angle EFD + \angle DFC = 75^o + 60^o + 45^o = 180^o$

Per tant, $\angle AFC = 180^o$



Solució 2:
Considerem el sistema de referència cartesià: $\{E, \vec{ED}, \vec{EA}\}$

Els punts A, F, C són alineats si els vectors $\vec{AF}, \vec{AC}$ són proporcionals.
Les coordenades dels punts E, D, B, A són $E(0,0)$, $D(1,0)$, $B(1,1)$, $A(0,1)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt F són $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt C són $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les coordenades dels vectors $\vec{AF}, \vec{AC}$

$$\vec{AF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \qquad \vec{AC} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Dividim les coordenades dels dos vectors:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-\frac{1}{2}} = -\left(\sqrt{3}-2\right) = 2-\sqrt{3}$$

Per tant els dos vectors són proporcionals.

Solució 3:

Considerem el sistema de referència cartesià: $\left\{E,\vec{ED},\vec{EA}\right\}$

Determinem la recta r que passa pels punts A, C. Els punts A, F, C estan alineats si el punt F pertany a la recta r.

Les coordenades dels punts E, D, B, A són $E(0,0)$, $D(1,0)$, $B(1,1)$, $A(0,1)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt F són $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt C són $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

La recta que passa pels punts $A(0,1)$ $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ té per equació:

$r \equiv y-1=-\left(2-\sqrt{3}\right)x$

Vegem si el punt $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertany a la recta:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}-2}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

Per tant F pertany a la recta r i els 3 punts són alineats.

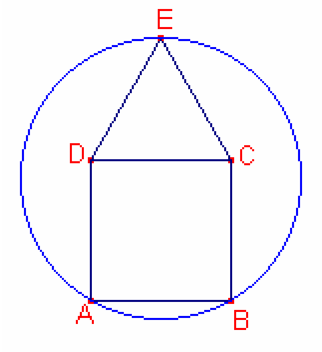
Solució 4:

Els punts A, F, C són alineats si les imatges per una rotació de centre D i angle 60º són alineats.

La imatge de C és B.
La imatge de F és E
La imatge de A és un punt equidistant de A i de D per tant està en la recta mediatriu de la recta AD que és la recta BE.

Per tant els tres punts A, F, C estan alineats.

Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.



Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.
Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.

Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és isòsceles, $\overline{AD} = \overline{DE} = 1$.
$\angle ADE = 90º+60º = 150º$.
$\angle DEA = \dfrac{180º-150º}{2} = 15º$.
$\angle CEB = 15º$.

$\angle AEB = 60º-2\cdot\angle DEA = 60º-2\cdot 15º = 30º$.

L'angle $\angle AEB$ és un angle inscrit en la circumferència que mesura 30º aleshores l'arc és de 60º.

Aleshores l'arc mesura la sisena part de la circumferència.
Aleshores la corda $\overline{AB}$ mesura el mateix que el radi.

Per tant el radi de la circumferència és igual $\overline{AB} = 1$.

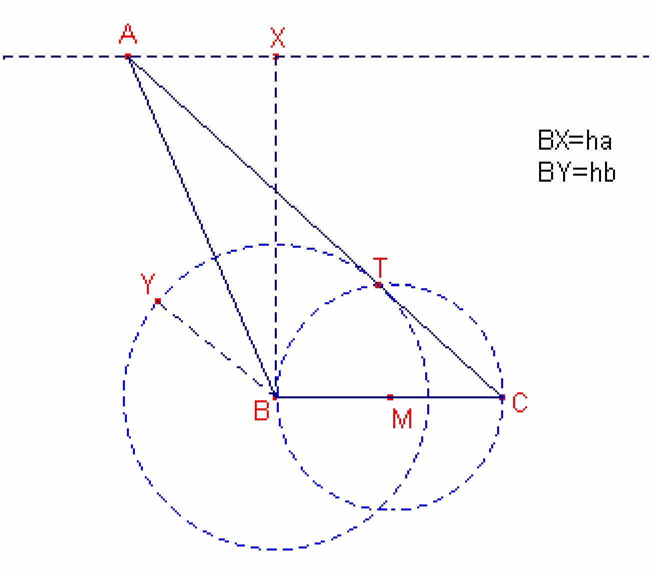
Problema 3: Resolució de triangles.

a) Resoleu el triangle coneguts $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$

b) Resoleu el triangle coneguts $a = 10, b = 15, h_A = 8$

Solució:

a)



$$\text{l' Àrea } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$$

$$\text{l' Àrea } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{b \cdot h_B}{2}, \text{ aleshores, } \frac{b \cdot 4}{2} = 27, \quad b = 13'5$$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTC}, \quad T = 90º$

$$\sin C = \frac{4}{6}, \text{ per tant, } C = \arcsin\left(\frac{4}{6}\right) \cong 41º48'37''$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$c^2 = 6^2 + 13'5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 13'5 \cdot \cos(41º48'37'')$$

$$c^2 \cong 97'5023$$

$$c \cong 9'8743$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

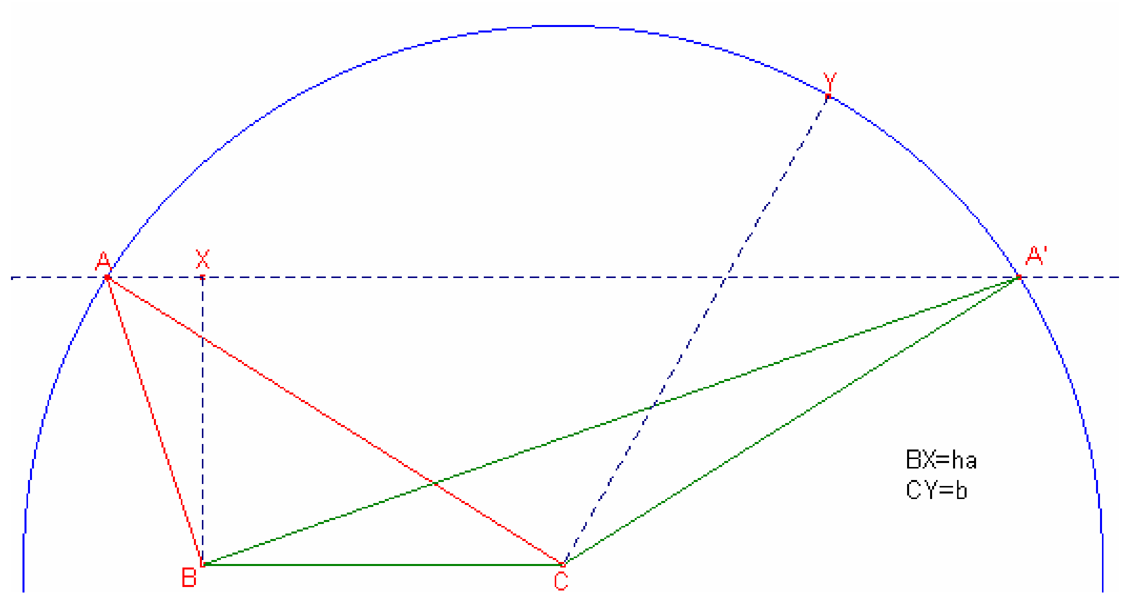
$$\cos A = \frac{6^2 - 13'5^2 - 97'5023}{-2 \cdot 13'5 \cdot 9'8743} \cong 0'9143$$

$$A = \arccos(0'9143) \cong 23º53'47''$$

L'angle $B = 180º - (A + C)$

$$B = 180º - (41º48'37'' + 23º53'47'') = 114º17'36''$$

b)



$$\text{l' Àrea } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$$

$$\sin C = \frac{h_A}{a} = \frac{8}{15}\text{, per tant,} \quad C = \arcsin\frac{8}{15} = \begin{cases} 32^{o}13'51'' \\ 147^{o}46'9'' \end{cases}$$

Cas 1: $C = 32^{o}13'51''$	Cas 2: $C = 147^{o}46'9''$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$	Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
$c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(32^{o}13'51'')$	$c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(147^{o}46'9'')$
$c^2 \cong 71'2281$	$c^2 \cong 578'7719$
$c \cong 8'4397$	$c \cong 24'0577$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$	Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
$\cos A = \frac{10^2 - 15^2 - 71'2281}{-2 \cdot 15 \cdot 8'4397} \cong 0'7750$	$\cos A = \frac{10^2 - 15^2 - 578'7719}{-2 \cdot 15 \cdot 24'0577} \cong 0'9751$
$A = \arccos(0'7750) \cong 39^{o}11'35''$	$A = \arccos(0'9751) \cong 12^{o}48'30''$
L'angle $B = 180^{o} - (A + C)$	L'angle $B = 180^{o} - (A + C)$
$B = 180^{o} - (39^{o}11'35'' + 32^{o}13'51'') = 108^{o}34'34''$	$B = 180^{o} - (12^{o}48'30'' + 147^{o}46'9'') = 19^{o}25'21''$

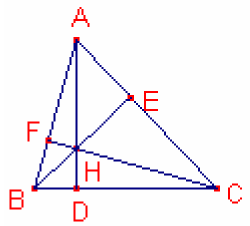
Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=2$.

Solució:
Denotem $[XYZ]=$ àrea del triangle XYZ.
Si el triangle és acutangle H pertany a l'interior del triangle.

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{AD}-\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BE}-\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CF}-\overline{HF}}{\overline{CF}}=3-\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)\qquad(1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{HBC}$ tenen la mateixa base $\overline{BC}$, aleshores, les àrees són proporcionals a les altures:



$\dfrac{\overline{HD}}{\overline{AD}}=\dfrac{[HBC]}{[ABC]}$. Anàlogament, $\dfrac{\overline{HE}}{\overline{BE}}=\dfrac{[HCA]}{[ABC]}$, $\dfrac{\overline{HF}}{\overline{CF}}=\dfrac{[HAB]}{[ABC]}$.

Substituint en l'expressió (1):

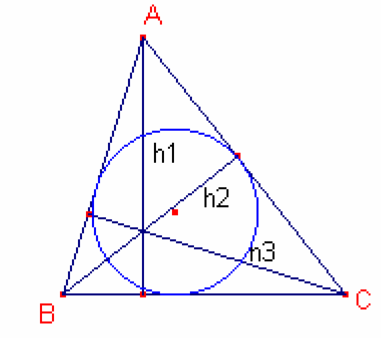
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=3-\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)=3-\left(\frac{[HBC]}{[ABC]}+\frac{[HCA]}{[ABC]}+\frac{[HAB]}{[ABC]}\right)=$$

$$=3-\frac{[HBC]+[HCA]+[HAB]}{[ABC]}=3-\frac{[ABC]}{[ABC]}=2.$$

Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.



Solució:
Siguen h_1, h_2, h_3 les altures referides als costats, a, b, c, respectivament.

Calculem l'àrea, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S=\frac{a\cdot h_1}{2},\quad S=\frac{b\cdot h_2}{2},\quad S=\frac{c\cdot h_3}{2}$$

$S=r\cdot p$, on r és el radi de la circumferència inscrita i p el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Igualant les àrees tenim que:

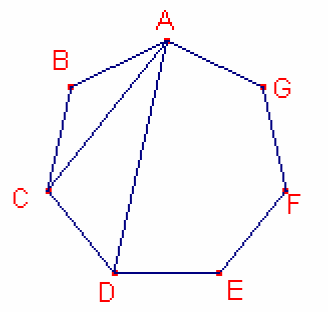
$$h_1=\frac{2r\cdot p}{a},\quad h_2=\frac{2r\cdot p}{b},\quad h_3=\frac{2r\cdot p}{c}.$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{a}{2r\cdot p}+\frac{b}{2r\cdot p}+\frac{c}{2r\cdot p}=\frac{a+b+c}{2r\cdot p}=\frac{2p}{2r\cdot p}=\frac{1}{r}.$$

Problema 6: Heptàgon regular.

Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$.

Solució 1:



Siga $a=\overline{AB}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{AD}$.

Siga $\alpha=\angle BDA$. $7\alpha=180^o$.

Aleshores, $\angle BAD=2\alpha$, $\angle ABD=4\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}$, aleshores, $b=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}a$

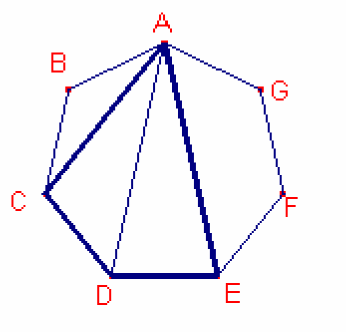
$\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{c}{\sin 4\alpha}$, aleshores, $c=b\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}a$.

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sin\alpha}{a\cdot\sin 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{a\sin 4\alpha}=\frac{1}{a}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}\right)=\frac{1}{a}\frac{\sin\alpha(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}=$$

Notem que $4\alpha=180^o-4\alpha$, aleshores, $\sin 3\alpha=\sin 4\alpha$:

$$=\frac{1}{a}\frac{\sin\alpha\cdot 2\cdot\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin 3\alpha}=\frac{1}{a}$$

Solució 2:



Siga $a=\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DE}$, $b=\overline{AC}=\overline{CE}$, $c=\overline{AD}=\overline{AE}$.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$ac+ab=bc$.

Dividint la igualtat per abc:

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$.

Problema 7: Quadrilàter inscriptible

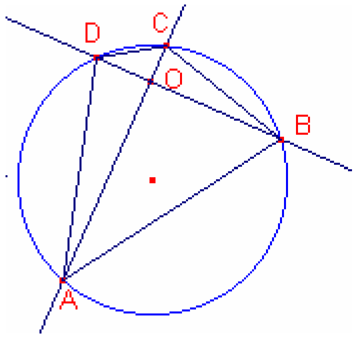
En una circumferència C donada, hi inscrivim un quadrilàter, les diagonals del qual són perpendiculars.

Proveu que, siga quin siga el quadrilàter inscrit de diagonals perpendiculars, la suma dels quadrats de dos
costats oposats és constant i igual al quadrat del diàmetre de la circumferència.

Solució:

Siga la circumferència c de radi R.

Siga el quadrilàter ABCD inscrit en la circumferència tal que $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ són
perpendiculars les quals es tallen en el punt O.



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{CDO}$:

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$.

$\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$.

Sumant les dues expressions:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADO}$, $\overset{\Delta}{BCO}$:

$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2$.

$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2$.

Sumant les dues expressions:

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 \qquad (2)$$

Aleshores:

$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = k$.

Vegem quan val la constant.

Siga $\alpha = \angle BAC$, $\angle ABD = 90º - \alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = 2R$. Aleshores, $\overline{BC}^2 = (2R)^2 \sin^2\alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\dfrac{\overline{ADC}}{\sin(90-\alpha)} = 2R$. Aleshores, $\overline{AD}^2 = (2R)^2\cos^2\alpha$

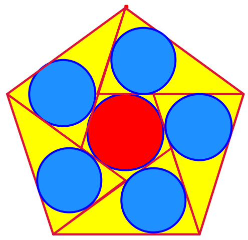
$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = (2R)^2\sin^2\alpha + (2R)^2\cos^2\alpha = (2R)^2.$$

Aleshores, $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = (2R)^2$.

Aleshores la suma dels quadrats de dos costats oposats és un valor constant i és igual a l'àrea d'un quadrat de costat 2R, és a dir, l'àrea del quadrat circumscrit a la circumferència.

Problema 8: Problema Sangaku.

En la següent figura el costat del pentàgon regular mesura 1cm.
Calculeu la proporció entre els radis dels dos tipus de circumferències.



Proveu que és $\frac{r}{R} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.

Solució:

Siga $\overline{AB} = 1$, costat del pentàgon regular gran.

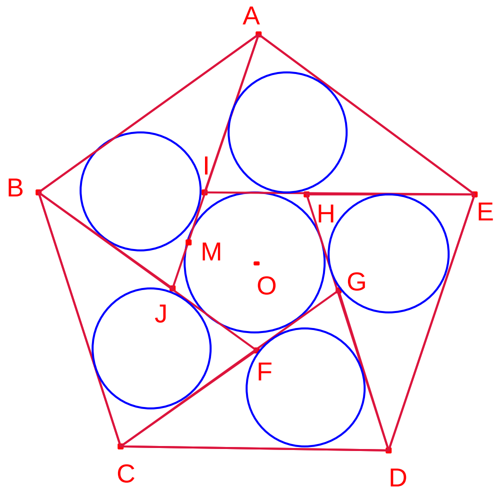
El triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$ és auri, aleshores:

$\overline{BJ} = \frac{1}{\Phi}$, $\overline{IJ} = \frac{1}{\Phi^2}$.

Siga $R = \overline{OM}$ el radi de la circumferència inscrita al pentàgon FGHIJ.

$\overline{MI} = \frac{1}{2\Phi^2}$, $\angle IOM = 36^o$, $\cos 36^o = \frac{\Phi}{2}$, $\sin 36^o = \frac{1}{2}\sqrt{3-\Phi}$. $tg 36^o = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

$\frac{\overline{IM}}{R} = tg(36^o)$, aleshores, $R = \frac{1}{2\Phi^2 tg 36^o} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.



Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle auri $\overset{\Delta}{ABJ}$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABJ}$:

$$S_{ABJ} = \frac{\overline{AB}+\overline{BJ}+\overline{AJ}}{2} r = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AJ}\cdot\sin 36^o}{2}.$$

$$\frac{2+\frac{1}{\Phi}}{2} r = \frac{\sin 36^o}{2}.$$ Resolent l'equació:

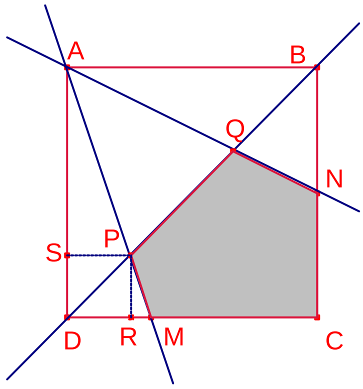
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}.$$

La raó entre els radis és:

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}.$$

Problema 9: Quadrat i pentàgon

Determineu l'àrea del pentàgon limitat per les rectes BC, CD, AN, AM, BD, tal que ABCD són els vèrtexs d'un quadrat, N és el punt mig de $\overline{BC}$ i M divideix el segment $\overline{CD}$ en raó 2:1 (calculant a partir del vèrtex C), si el costat del quadrat ABCD és a.



Solució.

Siga PQNCM el pentàgon format.

$$S_{ADM} = \frac{1}{6} S_{ABCD}$$

Siga R la projecció de P sobre la recta CD, S la projecció de P sobre la recta AD.

$\overline{PS} = \overline{PR}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

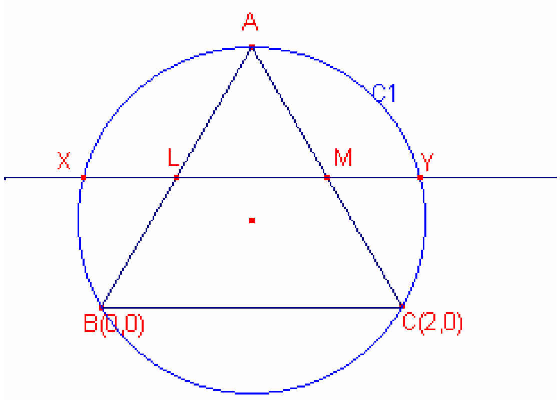
$\frac{S_{DMP}}{S_{APD}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}$. Aleshores, $\frac{S_{DMP}}{S_{ADM}} = \frac{1}{4}$.

Per tant, $\frac{S_{DMP}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Anàlogament, $\frac{S_{DNQ}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{12}$.

$$S_{PQNCM} = S_{BCD} - (S_{DMP} + S_{BNQ}) = \frac{1}{2} S_{ABCD} - \left(\frac{1}{24} S_{ABCD} + \frac{1}{12} S_{ABCD} \right) = \frac{3}{8} S_{ABCD} = \frac{3}{8} a^2 .$$

Problema 10: nombre d'or



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$

Solució 1: (Amb coordenades cartesianes).

Considerem El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, tal que B(0,0), C(2,0).

Per ser el triangle equilàter $A(1,\sqrt{3})$

Les coordenades dels punts L, M són: $L\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O i radi R

El centre O té coordenades $O\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscrita C1 és: $R=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

L'equació de la circumferència C1 és: $C1 \equiv (x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$

L'equació de la recta r que passa pels punts L, M és: $r \equiv y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les interseccions de la circumferència C1 i la recta r són:

$X\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Y\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

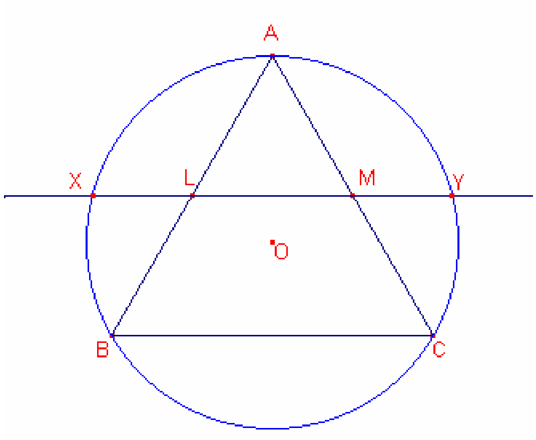
$\overline{LM}=1$. $\overline{LY}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\overline{MY}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Aleshores: $\dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$. $\dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$

Demostració 2 trigonomètrica:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $AB = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ALC}$. $CL = \sqrt{3}$
Aleshores $LM = 1$.



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{OLM}$

Per la propietat del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$OL = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $OC = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

L'angle $\angle MLO = 30^{o}$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{LOY}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LOY}$.

$\overline{OY}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{LY}^2 - 2 \cdot \overline{OY} \cdot \overline{LY} \cdot \cos 30^{o}$.

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3} + \overline{LY}^2 - \overline{LY}$. Simplificant:

$\overline{LY}^2 - \overline{LY} - 1 = 0$. Aleshores, $\overline{LY} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bibliografia.

PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 1. Fundamentos*. Nuevas gráficas S.A. 8ª ed., Madrid, 1965

PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 2. Complementos.* Nuevas gráficas S.A., 7ª ed., Madrid, 1961.

ROANES MACIAS, E., *Introducción a la geometria.* Anaya, Madrid, 1980.

GELTNER, P.B. PETERSON, D.J. *Geometría.* Ed. Thomson editores. Mèxic. 1998.

VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría.* Ed. Limusa. Mèxic. 1983.

LEVI S. SHIVELY, PH.D. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañia editorial continental. Mèxic. 1972.

COXETER, H.S.M. *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. 1994.

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría.* Ed. Limusa. Mèxic. 1971.

GONZÁLEZ, M. i PALENCIA,J. *Trazado geométrico.* Editorial: els autors. Sevilla.

REDÓN GÓMEZ, A. *Geometría paso a paso.* Ed. Tébar. 2000.

ALSINA, C. i altres, *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 12, Madrid, 1992.

MARTÍNEZ RECIO, A. i altres, *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría.* Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 16, Madrid, 1989.

GUSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou, 1989.

SHARIGUIN, I., *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou, 1986.

LIDSKI V. i altres. Problemas de matemáticas elementales. Ed Mir. Coscou, 1983.

GREMILLION, D. i altres, *Cabri géomètre II. Manual para Macintosh y MS-DOS.*

LYÚBICH, Yu.I. i SHOR, L.A. *Método cinemático en problemas geométricos.* Editorial Mir Moscou 1978. Col·lecció: Lecciones populares de matemáticas.

NATASON, I.P. *Problemas elementales de máximo y mínimo.* Ed. Mir. Moscou 1977. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.

SMOGORZHEVSKI, A.S. *La regla en construcciones geométricas.* Ed. Mir. Moscou 1988. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.

KOSTOVSKI, A.N. *Construcciones geométricas mediante compás.* Ed. Mir. Moscou. 1984. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.

JAIME, A. GUTIÉRREZ, A. *El grupo de la isometrias del plano.* Ed. Síntesis. Col. Educación matemática en secundaria, 13. Madrid. 1996.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid. 1996.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid. 1996.

AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

GREITZER, S.L. *Olimpiadas MatemáticasI.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 2. Madrid. 1994.

KLAMKIN, M.S *Olimpiadas Matemáticas II.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 12. Madrid. 1998.

AA.VV. *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid. 1998.

SÁNCHEZ-RUBIO. RIPOLLÉS AMELA. *Manual de mátemáticas para preparación olímpica.*E. Universitat Castelló. Castelló de la Plana. 2000.

PÉREZ FUENTES, R. *Olimpiada Matemética.* Ed autor. Utiel. 1998.

PÉREZ FUENTES, R. *El triángulo y sus cosas.* Ed. Arpe. Utiel-Requena. 1988.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. “Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos”. Ed Sdad. Andaluza de Educación Matemática. Thales. 1996.

BRUÑO. *Geometría. Curso superior.* Ed. Bruño. Valencia. 1957 7ª Edició.

ESTEBAN PIÑEIRO i altres. *Trigonometría. Ed. Síntesis.* Colección: Educación Matemática en secundaria, 20. Madrid. 1998.

DE OLABARRIETA, L. *Apuntes de geometría y trigonometría.* Ed. El Mensajero del Corazón de Jesús. Bilbao 1942.

GARCÍA ARDURA, M. *Problemas gráficos y numéricos de geometria*. Ed Hernando. Madrid 1963.

GARCÍA ARDURA, M. *Ejercicios y problemas de trigonometria*. Ed Hernando. Madrid 1964.

ROUCHÉ,E., COMBEROUSSE, CH. *Tratado de geometría elemental*. Ed.suc. Hernando. Madrid. 1915.

CATALAN, E. *Géométrie élémentaire*. Ed. Victor Dalmont. Paris. 1858.

PEDOE, DAN. *La geometría en el arte.* Ed. Gustavo Gili. Barcelona 1979.

DOMÍNGUEZ, M.J. *El número de oro.* Ed. Proyecto Sur. Granada.

DE CIURANA, J.A. *El nombre auri i l’obra de l’arquitecte Rafael Masó.* CIRIT. 1995.

FERNÉNDEZ, i., REYES, M.E. *Geometría con el hexágono y el octógono.* Ed. Proyecto Sur. Granada. 2003.

ZHÚKOV, A.V. El omnipresente número pi. Ed Urss, Moscou. 2005.

Col·lecció de problemes de l’Olimpíada Argentina de Cabri.

REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 1. Fundamentos, álgebra y geometría.* Alianza atlas, 3, Alianza, 1984.

REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 2. Análisis y matemática aplicada.* Alianza atlas, 12, Alianza, 1996.

COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas I* Siglo XXI, Madrid, 1985.

COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas II.* Siglo XXI, Madrid, 1985

Adreces.

http://www.cabri.com/
Pàgina dels autors del Cabri

http://www.oma.org.ar/
Olimpíada matemàtica d'Argentina. Bona col·lecció de problemes. Curs de Cabri.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Pàgina de Ricardo Barroso. Problemes quinzenals sobre triangles. Applets amb CabriJava.

http://roble.pntic.mec.es/jarran2/
Pàgina de Juan Manuel Arranz. Applets amb CabriJava.

http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttwcat/portada.html
Tot triangles web. Pàgina de Quim Castellsaguer sobre triangles. Macros de Cabri 2. Excel·lent.

http://jmora7.com/
Pàgina de José Antonio Mora. Coordenades i mecanismes amb Cabri (CabriJava). Omnipolíedre (CabriJava). La meitat del quadrat (mosaics)

http://www.xtec.cat/~jjareno/
Pàgina de Joan Jareño, Lloc dedicat als problemes i entreteniments matemàtics, pensant en el seu ús en educació. Presenta problemes, activitats, llibres i enllaços del mes.

http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm
Pàgina de matemàtiques de l'IES "Marqués de Santillana" Colmenar Viejo, Madrid. Geometria interactiva (CabriJava, Descartes).

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html
Pàgina d'applets cabri creada per Genevieve Tulloue de la universitat de Nantes (França). Conté, entre d'altres coses: Còniques, Políedres, Electricitat, Mecànica.... Una pàgina molt completa.

http://teleline.terra.es/personal/jariasca/
Pàgina de José María Arias. Derive, Cabri, Excel, curiositats....

http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/CURSO_CABRI/INICIO.HTM
Curs de Cabri del proyecto Medusa.

http://platea.cnice.mecd.es/~Emcarrier/
Pàgina de Carmen Arriero Villacorta i Isabel García García.
Mosaics i llocs geomètrics.

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29012064/matematicas/matematicas.htm
Pàgina de matemàtiques de l'IES "Arroyo de Miel" Benalmádena. Málaga. Exercicis per a l'ESO.

http://www.chronomath.com/
Diccionari de matemàtiques en francés.

http://faculty.evansville.edu/ck6/
1114 teoremes sobre triangles. ENCICLOPÈDIA DELS CENTRES D'UN TRIANGLE (ETC). Pàgina de Clark Kimberling.

http://www.xtec.cat/~voliu/mates/inici.htm
Departament de Matemàtiques de la Bisbal. Activitats amb Cabri.

http://www.xtec.cat/~mquerol/index.htm
Pàgina de Manel Querol. CabriJava. Descartes. Calculadora Wiris.

http://www.xtec.cat/~aaubanel/
Pàgina d'Anton Aubanell Pou. Recursos materials i activitats experimentals.

http://www.pnte.cfnavarra.es/~iesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index.html
Pàgina de Manuel Sada. Recursos de Matemátiques. Cabri, GeoGebra, presentacions...

http://problemate.blogspot.com/
Blog de Roberto Selva. Problemes de preparació per a l'Estalmat. Freqüència setmana.

http://www.dmae.upct.es/~pepemar/
Pàgina de José Martínez Hernández. Geometria dinàmica amb GeoGebra, gran quantitat d'applets i problemes.

http://www.journals.cms.math.ca/CRUX/
Crux Mathematicorum. Revista canadenca de problemes.

http://www.xtec.cat/recursos/mates/index.htm
Matemàtiques de la xarxa telemàtica educativa de Catalunya.

http://www.ricardpeiro.es
La meua pàgina web.