

51.- Resoleu l'equació $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 - \cos^2 3x$$

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x$$

$\cos^2 2x = \sin^2 3x - \cos^2 x$, transformem en producte:

$$\cos^2 2x = (\sin 3x + \cos x)(\sin 3x - \cos x)$$

$$\cos^2 2x = \left(\sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) \left(\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)$$
 transformem en productes:

$$\cos^2 2x = 2 \sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

Simplificant:

$$\cos^2 2x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Utilitzant l'angle doble:

$$\cos^2 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos^2 2x = \cos 2x \cdot (-\cos 4x)$$

$$\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 0$$

Aleshores,

$$\cos 2x = 0, \text{ per tant, } 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x = \cos(\pi - 4x)$$

Aleshores,

$$2x = \pi - 4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \pi - 4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solucions en la primera volta són:

$$45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ,$$

$$30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ,$$

$$90^\circ, 270^\circ$$

52.- Calculeu la potència n-èsima de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Oposicions Catalunya 2000})$$

Solució:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que els elements de la diagonal principal són $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$

Els elements $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Els elements $a_{21} = a_{32} = n$

Els elements a_{33} formen la successió 1, 3, 6, 10, 15,....

Construïm la taula de diferències:

n	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	1	2	1	0
2	3	3	1	
3	6	4		
4	10			

$$P_2(n) = 1 + 2(n-1) + 1 \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Demostrem per inducció que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2+n}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$

Per a $n = 1$ és certa.

Suposem la fórmula certa per a $n = k$, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$.

Demostrem la fórmula per a $n = k + 1$.

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} + k+1 & k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{(k+1)^2+k+1}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores la fórmula és certa.

$x_{i+1} - x_i = h$.
 $x_i = x_0 + hi$.
 $P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{q}{1!} + \Delta^2 y_0 \frac{q(q-1)}{2!} + \Delta^3 y_0 \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}$
 $q = \frac{x - x_0}{h}$.

53.- Demostreu que en l'equació $x^2 + y^2 = z^2$ x i y no poden ser imparells.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:

Suposem que x , y són enters imparells:

$$x = 2n + 1, \quad y = 2m + 1 \quad \text{on } n, m \in \mathbb{Z}.$$

$$x^2 + y^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2.$$

$$x^2 + y^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2$$

$$\text{Aleshores, } x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4} \quad (1)$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = 4(n^2 + m^2 + n + m) + 2$$

Aleshores, z^2 és un nombre parell, per tant, z és un nombre parell.

$$z = 2k \quad \text{on } k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, $z^2 = 4k^2$.

$$\text{Aleshores, } z^2 = x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad (2)$$

De les expressions (1) (2) tenim un absurd.

54.- Determineu els nombres reals a, b sabent que les solucions de l'equació $x^3 + bx^2 + cx = 0$ estan en progressió aritmètica.

Solució:

$$x(x^2 + bx + c) = 0$$

$x = 0$ és una solució de l'equació.

Siguen x_1, x_2 les altres solucions de l'equació:

Per tenir solucions reals el discriminant de l'equació ha de ser zero o positiu:

$$b^2 - 4c \geq 0.$$

$$\text{Les solucions són: } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad x_1 \leq x_2.$$

Poden passar 3 casos:

Si $x_1 \leq 0 \leq x_2$:

Com les solucions estan en progressió aritmètica:

$$0 - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - 0. \text{ Simplificant:}$$

$$b = 0. \text{ Com que } b^2 - 4c \geq 0.$$

Aleshores, $b = 0$ i $\forall c \leq 0$, l'equació $x^3 + cx = 0$ les seues solucions estan en progressió aritmètica.

Si $0 \leq x_1 \leq x_2$:

Com les solucions estan en progressió aritmètica:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - 0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \text{ Simplificant:}$$

$$-b = 3\sqrt{b^2 - 4c}. \text{ Per tant } b \leq 0. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$b^2 = 9(b^2 - 4c).$$

$$2b^2 = 9c.$$

$$\text{Aleshores, } b \leq 0 \text{ i } c = \frac{2}{9}b^2.$$

Aleshores, si $b \leq 0$ i $c = \frac{2}{9}b^2$, l'equació $x^3 + bx^2 + \frac{2}{9}b^2x = 0$ les seues solucions estan en progressió aritmètica.

Si $x_1 \leq x_2 \leq 0$:

Com les solucions estan en progressió aritmètica:

$$0 - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - 0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \text{ Simplificant:}$$

$$b = 3\sqrt{b^2 - 4c}. \text{ Per tant } b \geq 0. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$b^2 = 9(b^2 - 4c), \quad 2b^2 = 9c.$$

$$\text{Aleshores, } b \geq 0 \text{ i } c = \frac{2}{9}b^2.$$

Aleshores, si $b \geq 0$ i $c = \frac{2}{9}b^2$, l'equació $x^3 + bx^2 + \frac{2}{9}b^2x = 0$ les seues solucions estan en progressió aritmètica.

55.- Resoleu l'equació $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$ sabent que admet una arrel complexa (no real) de mòdul 5.
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

L'equació és de coeficients reals.

Si té una solució complexa també és solució la conjugada.

L'equació té 1 arrel real i 2 complexes conjugades.

Siga r l'arrel real i siguin m, n arrels reals complexes conjugades.

$$\|m\| = \|n\| = 5, \quad n = \bar{m}, \quad m \cdot \bar{m} = 5^2.$$

L'equació es pot factoritzar:

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 2(x-r)(x-m)(x-n) = 0:$$

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 2(x^3 - (r+m+n)x^2 + (rm+rn+mn)x - rmn).$$

Igualant els termes independents:

$$75 = -2rmn.$$

$$75 = -2r5^2.$$

$$r = \frac{-3}{2}.$$

El polinomi $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75$ és divisible per $\left(x + \frac{3}{2}\right)$. Aplicant la regla de Ruffini:

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = \left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x + 50).$$

Resolem l'equació $2x^2 - 2x + 50 = 0$

$$x = 3 + 4i, \quad x = 3 - 4i.$$

Aleshores les solucions de l'equació inicial són $x = \frac{-3}{2}, x = 3 + 4i, x = 3 - 4i$.

56.- Donat un nombre natural k , considerem la successió:

$$a_1 = \sqrt{k}, \quad a_2 = \sqrt{k + \sqrt{k}}, \quad a_3 = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}, \dots$$

Demostreu que a_n és convergent.

Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l(k)$, indiqueu quina condició compleixen els valors de k per als quals $l(k)$ és enter.

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

Podem definir la successió de forma recurrent: $a_n = \sqrt{k + a_{n-1}}$.

Vegem que la successió és monòtona creixent (demostració per inducció):

$$a_2 = \sqrt{k + \sqrt{k}} > \sqrt{k} = a_1.$$

Suposem que $a_n > a_{n-1}$

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} > \sqrt{k + a_{n-1}} = a_n$$

Vegem que la successió està afitada per $k+1$ (demostració per inducció).

$$a_1 = \sqrt{k} < k+1, \text{ ja que } k < (k+1)^2.$$

Suposem que $a_n < k+1$

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} < \sqrt{2k+1}.$$

$$\sqrt{2k+1} < k+1, \text{ ja que } 2k+1 < (k+1)^2 = k^2 + 2k+1.$$

Aleshores la successió té límit, per ser monòtona creixent i afitada superiorment.

Siga $l(k)$ el límit.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k + a_{n-1}}. \text{ Aleshores:}$$

$$l(k) = \sqrt{k + l(k)}, \text{ resolent l'equació, } l(k) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}.$$

Per a que $l(k)$ siga enter, $1 + 4k$ ha de ser imparell i quadrat perfecte, és ha dir:

$$1 + 4k = (2p + 1)^2, \quad p \in \mathbb{N}.$$

$$1 + 4k = 4p^2 + 4p + 1.$$

$$k = p^2 + p.$$

$$k = p(p + 1)$$

Aleshores k és producte dos nombres naturals consecutius per tant, és parell.

$$k = 2p', \quad p' \in \mathbb{N}.$$

És a dir, k ha de ser parell.

57.- Siguen dues successions de nombres enters $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tal que

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

a) Demostreu que $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són successions de nombres senars.

b) Demostreu que $\{b_n\}$ és la hipotenusa d'un triangle de catets $\frac{a_n + 1}{2}$, $\frac{a_n - 1}{2}$.

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

$$\text{Siga } Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

$Q(\sqrt{2})$ és un espai vectorial sobre \mathbb{Q} . $\{1, \sqrt{2}\}$ és la base d'aquest espai vectorial.

Vegem que $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són successions de nombres senars. Ho farem per inducció:

Per a $n = 1$:

$$(1 + \sqrt{2})^3 = a_1 + b_1 \sqrt{2}, \quad 7 + 5\sqrt{2} = a_1 + b_1 \sqrt{2}.$$

Com que les components d'un vector respecte una base són úniques:

$a_1 = 7$, $b_1 = 5$, per tant a_1, b_1 són nombres senars.

Suposem que per a $n = k$, a_k, b_k són nombres senars, $a_k = 2p + 1$, $b_k = 2q + 1$,

$p, q \in \mathbb{Z}$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

$$(1 + \sqrt{2})^{2(k+1)+1} = a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^{2(k+1)+1} &= (1 + \sqrt{2})^{2k+1} (1 + \sqrt{2})^2 = (a_k + b_k \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = ((2p + 1) + (2q + 1)\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = \\ &= 6p + 3 + (4p + 2)\sqrt{2} + (6q + 3)\sqrt{2} + 8q + 4 = \\ &= (6p + 8q + 7) + (4p + 6q + 5)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Aleshores: } a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2} = (2(3p + 4q + 3) + 1) + (2(2p + 3q + 2) + 1).$$

Com que les components d'un vector respecte una base són úniques:

$a_{k+1} = 2(3p + 4q + 3) + 1$, $b_{k+1} = 2(2p + 3q + 2) + 1$. Aleshores, a_{k+1}, b_{k+1} són nombres senars.

b) Ho farem per inducció:

Per a $n = 1$, de l'apartat a) $a_1 = 7$, $b_1 = 5$.

$$b_1^2 = \left(\frac{a_1 + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1 - 1}{2}\right)^2 \text{ ja que } 5^2 = 4^2 + 3^2.$$

$$\text{Suposem que per a } n = k, \quad b_k^2 = \left(\frac{a_k + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2$$

De l'apartat a) $a_k = 2p + 1$, $b_k = 2q + 1$, aleshores, $p^2 + p = 2q^2 + 2q$

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

De l'apartat a) $a_{k+1} = 2(3p + 4q + 3) + 1$, $b_{k+1} = 2(2p + 3q + 2) + 1$

$$\left(\frac{a_k + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2 = (3p + 4q + 3)^2 + (3p + 4q + 4)^2 = 18p^2 + 32q^2 + 48pq + 42p + 56q + 25$$

$$(b_{k+1})^2 = (2(2p + 3q + 2) + 1)^2 = 16p^2 + 36q^2 + 48pq + 40p + 60q + 25 =$$

$$= 16p^2 + 36q^2 + 48pq + 40p + 60q + 25 = 16p^2 + 32q^2 + 48pq + 40p + 56q + 25 + (4q^2 + 4q) =$$

$$= 18p^2 + 32q^2 + 48pq + 42p + 56q + 25.$$

$$\text{Aleshores, } b_{k+1}^2 = \left(\frac{a_{k+1} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{k+1} - 1}{2}\right)^2.$$

58.- Considerem la successió de Fibonacci $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $n \geq 2$.

Demostreu que es compleixen les següents relacions:

a) $a_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

b) $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

c) $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

a) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$, $1 + a_1 = 1 + 1 = 2$. Aleshores, $a_3 = 1 + a_1$.

Suposem certa la relació per $a_n = k$, $a_{k+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$.

Demostrem la relació per $a_n = k + 1$:

$$a_{k+1+2} = a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} \stackrel{\text{HI}}{=} (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}.$$

b) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, $a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1$, $a_1^2 = 1^2 = 1$. Aleshores, $a_1 \cdot a_2 = a_1^2$.

Suposem certa la relació per $a_n = k$, $a_k \cdot a_{k+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$.

Demostrem la relació per $a_n = k + 1$:

$$a_{k+1} \cdot a_{k+2} = a_{k+1}(a_{k+1} + a_k) = a_{k+1}^2 + a_k \cdot a_{k+1} \stackrel{\text{HI}}{=} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + a_{k+1}^2.$$

c) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, $a_2^2 = 1^2 = 1$, $a_1 \cdot a_3 + (-1)^1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$. Aleshores, $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 + (-1)^1$.

Suposem certa la relació per $a_n = k$, $a_{k+1}^2 = a_k \cdot a_{k+2} + (-1)^k$.

Demostrem la relació per $a_n = k + 1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} \cdot a_{k+3} &= a_{k+1}(a_{k+1} + a_{k+2}) = a_{k+1}^2 + a_{k+1} \cdot a_{k+2} \stackrel{\text{HI}}{=} a_k \cdot a_{k+2} + (-1)^k + a_{k+1} \cdot a_{k+2} = \\ &= (a_k + a_{k+1})a_{k+2} + (-1)^k = a_{k+2} \cdot a_{k+2} + (-1)^k = a_{k+2}^2 + (-1)^k. \end{aligned}$$

Aleshores, $a_{k+2}^2 = a_{k+1} \cdot a_{k+3} - (-1)^k = a_{k+1} \cdot a_{k+3} + (-1)^{k+1}$.

59.- Siga $0 < x_1 < y_1$ i definim per recurrència, $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

a) Demostreu que $x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < \dots < y_2 < y_1$.

b) Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú i calculeu-lo.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

a) Ho provarem amb 4 passos:

a1) Demostrem per inducció que $x_n > 0$, $y_n > 0$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $0 < x_1 < y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k > 0$, $y_k > 0$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = \frac{2x_k y_k}{x_k + y_k} > 0, \quad y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} > 0.$$

a2) Demostrem per inducció que $x_n < y_n$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $x_1 < y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < y_k$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} - \frac{2x_k y_k}{x_k + y_k} > \frac{x_k + x_k}{2} - \frac{2x_k y_k}{y_k + y_k} = 0. \text{ Aleshores, } x_{k+1} < y_{k+1}.$$

a3) Demostrem per inducció que $x_n < x_{n+1}$.

$$\text{Si } n = 1, \quad x_2 = \frac{2x_1 y_2}{x_1 + y_1} > \frac{2x_1 y_1}{y_1 + y_1} = x_1.$$

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < x_{k+1}$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} > \frac{2x_n y_n}{(a2) y_n + y_n} > x_n.$$

a4) Demostrem per inducció que $y_n > y_{n+1}$.

$$\text{Si } n = 1, \quad y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{y_1 + y_1}{2} = y_1.$$

Suposem certa la relació per a $n = k$, $y_k > y_{k+1}$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

b)

La successió $\{x_n\}$ és monòtona creixent i afitada superiorment, aleshores és convergent. Siga $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $a > 0$.

La successió $\{y_n\}$ és monòtona decreixent i afitada inferiorment, aleshores és convergent. Siga $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, $b > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n}{2}, \text{ aleshores, } b = \frac{a+b}{2}. \quad (1)$$

Aleshores, $a = b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \text{ aleshores, } a = \frac{2ab}{a+b} \quad (2)$$

El sistema format per les expressions (1) (2) és compatible indeterminat.

La segona relació de l'enunciat és $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, aleshores, $x_n + y_n = 2y_{n+1}$.

Substituint en la 1ª relació de l'enunciat $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{2y_{n+1}}. \text{ Simplificant:}$$

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, $x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n$.

$$x_{n+1} y_{n+1} = x_1 y_1.$$

Calculant límits:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} y_{n+1} = x_1 y_1.$$

$$a^2 = x_1 y_1. \text{ Aleshores, } a = \sqrt{x_1 y_1}.$$

60.- Resoleu el següent sistema d'equacions segons els valors de a:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Solució:

Suposem que $a \neq 0$

Multipliquem la segona equació per z:
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xyz + yz^2 + xz^2 = a^2z \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Aïllem $x + y$ de la 1^a equació.

Substituïm el valor de la 3^a equació en la 2^a i simplifiquem:

$$\begin{cases} x + y = a - z \\ a^3 + z^2(x + y) = a^2z \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la 1^a equació en la segona:

$$\begin{cases} x + y = a - z \\ a^3 + z^2(a - z) = a^2z \\ xyz = a^3 \end{cases} \text{ Simplifiquem: } \begin{cases} x + y = a - z \\ xyz = a^3 \\ -z^3 + az^2 - a^2z + a^3 = 0 \end{cases}$$

Factoritzem la 3^a equació amb la regla de Ruffini:
$$\begin{cases} x + y = a - z \\ xyz = a^3 \\ -(z - a)(z^2 + a^2) = 0 \end{cases}$$

L'única solució real de la tercera és $z = a$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = a^2 \\ z = a \end{cases} \text{ que no té solució real, les solucions complexes són } \begin{cases} x = ai \\ y = -ai \\ z = a \end{cases}, \begin{cases} x = -ai \\ y = ai \\ z = a \end{cases}$$

Si $a = 0$ el sistema inicial és:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + xz = 0 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

Aïllem $x + y$ de la 1^a equació.
$$\begin{cases} x + y = -z \\ xy + z(x + y) = 0 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la 1^a equació en la 2^a equació:

$$\begin{cases} x + y = -z \\ xy = z^2 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

Substituïm el valor de la 2^a equació en la 3^a equació:

$$\begin{cases} x + y = -z \\ xy = z^2 \\ z^3 = 0 \end{cases} \text{ L'única solució real del sistema és: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$