

A2.- Calculeu la potència n-èsima de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Oposicions Catalunya 2000})$$

Solució:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que els elements de la diagonal principal són  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$

Els elements  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ .

Els elements  $a_{21} = a_{32} = n$

Els elements  $a_{33}$  formen la successió 1, 3, 6, 10, 15,....

Construïm la taula de diferències:

n	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	1	2	1	0
2	3	3	1	
3	6	4		
4	10			

$$P_2(n) = 1 + 2(n-1) + 1 \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Demostrem per inducció que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n^2+n}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$

Per a  $n = 1$  és certa.

Suposem la fórmula certa per a  $n = k$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$ .

Demostrem la fórmula per a  $n = k + 1$ .

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k^2+k}{2} + k+1 & k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{(k+1)^2+k+1}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores la fórmula és certa.

$x_{i+1} - x_i = h$ .  
 $x_i = x_0 + hi$ .  
 $P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{q}{1!} + \Delta^2 y_0 \frac{q(q-1)}{2!} + \Delta^3 y_0 \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} + \dots + \Delta^n y_0 \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}$   
 $q = \frac{x - x_0}{h}$ .

A3.- En un rombe de diagonals  $d$  i  $D$  es construeix sobre cada costat un triangle equilàter. S'uneixen els centres dels 4 triangles equilàters obtenint un rectangle. Obteniu la diagonal d'aquest rectangle. Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Equacions del gir:

Siga  $C(a,b)$  el centre del gir i  $\alpha$  l'angle.

Siga  $P'(x',y')$  les imatges de  $P(x,y)$  pel gir de centre  $C$  i angle  $\alpha$ .

Les equacions venen donades pel sistema:

$$\begin{cases} x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

Siga el rombe ABCD de centre O. De coordenades:

$$O(0,0), A\left(\frac{-d}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{-D}{2}\right), C\left(\frac{d}{2}, 0\right), D\left(0, \frac{D}{2}\right).$$

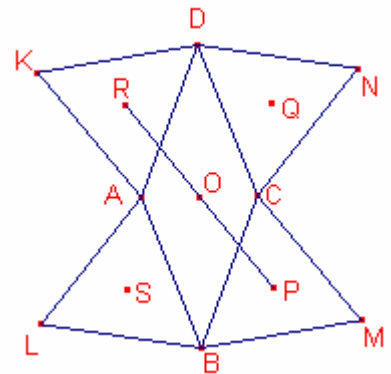
Siga el triangle equilàter construït sobre el costat  $\overline{BC}$   $\triangle BMC$ .

M és el transformat pel gir de centre B i angle  $-60^\circ$  del punt C.

Les coordenades de M són:

$$\begin{cases} x' = 0 + \left(\frac{d}{2} - 0\right) \cos(-60^\circ) - \left(0 - \frac{-D}{2}\right) \sin(-60^\circ) \\ y' = \frac{-D}{2} + \left(\frac{d}{2} - 0\right) \sin(-60^\circ) + \left(0 - \frac{-D}{2}\right) \cos(-60^\circ) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{d + D\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{-D - d\sqrt{3}}{4} \end{cases}, M\left(\frac{d + D\sqrt{3}}{4}, \frac{-D - d\sqrt{3}}{4}\right).$$



Siga P el baricentre del triangle  $\triangle BMC$  les seues coordenades són:

$$P\left(\frac{0 + \frac{d + D\sqrt{3}}{4} + \frac{d}{2}}{3}, \frac{\frac{-D}{2} + \frac{-D - d\sqrt{3}}{4} + 0}{3}\right).$$

$$P\left(\frac{3d + D\sqrt{3}}{12}, \frac{-3D - d\sqrt{3}}{12}\right).$$

Siga PQRS el rectangle que formen els baricentres dels 4 triangles equilàters.

El centre del rectangle és O el centre del rombe.

La diagonal és  $\overline{PR} = 2 \cdot \overline{OP}$ .

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{3d + D\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{-3D - d\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{12(d^2 + D^2 + \sqrt{3}dD)}{12^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{d^2 + D^2 + dD\sqrt{3}}$$

$$\overline{PR} = 2 \cdot \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{d^2 + D^2 + dD\sqrt{3}}.$$

A4.- Donada la corba d'equació  $y^2 = x^2 - x^4$ , es demana:

a) Dibuixeu-la.

b) Calculeu l'àrea limitada per la corba:

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga  $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ .

La funció és definida positiva i simètrica respecte l'eix d'ordenades.

El domini de la funció és  $[-1, 1]$

La funció és contínua en  $[-1, 1]$

La funció és derivable en  $[-1, 1] \sim \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La funció és creixent en  $\left] -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[ \cup \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$ .

La funció és decreixent en  $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right[ \cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right[$ .

La funció té un màxim en  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Els mínims de la funció són:  $x = -1, 0, 1$ .

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La funció és convexa en  $] -1, 0[ \cup ] 0, 1[$

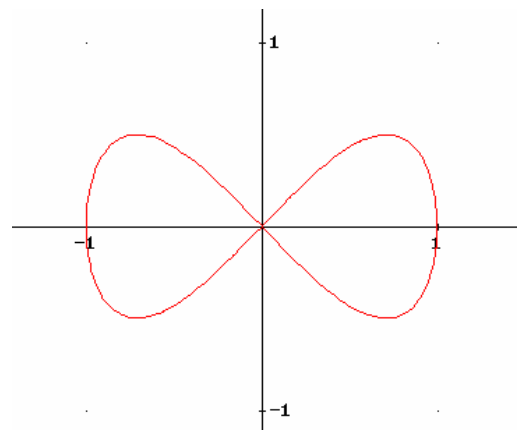
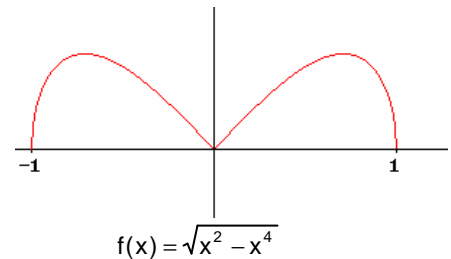
La corba de la funció ve donada per les funcions:  
 $y = f(x)$ ,  $y = -f(x)$ , aquesta darrera simètrica de la primera respecte de l'eix d'abscisses.

b)

L'àrea de la corba, per la simetria és:

$$4 \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4} dx = 4 \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = 4 \left( \frac{-1}{2} \right) \int_0^1 -2x \sqrt{1 - x^2} dx = -2 \left( \frac{2\sqrt{(1 - x^2)^3}}{3} \right) \Big|_0^1 = -2 \left( \frac{-2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Aquesta corba és la lemniscata de Geromo.



A5.- Considereu la funció  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida de la forma  $f(x) = \ln(x) - x + 3$ .

- a) Demostreu que  $f(x) = 0$  té exactament dues solucions  $a$  i  $b$  tals que  $a < 1 < b$ .  
 b) Donat un punt  $x_1 \in ]1, b[$ , definim la successió  $\{x_n\}$  de la forma  $x_{n+1} = 3 + \ln(x_n)$ ,  $n > 0$ . Demostreu que  $x_n \in ]1, b[$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  i que  $\{x_n\}$  és convergent. Calculeu el límit.  
 Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

a)

El domini de la funció és  $]0, +\infty[$ . És contínua i derivable en  $]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1. \quad f'(x) = 0 \text{ si i només si, } x = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad f''(1) = -1 < 0. \text{ Aleshores, } x = 1 \text{ és un màxim de la funció.}$$

$$f(1) = 0 - 1 + 3 = 2 > 0$$

$f'(x) > 0$  si  $x \in ]0, 1[$  aleshores en aquest interval és estrictament creixent.

$f'(x) < 0$  si  $x \in ]1, +\infty[$  aleshores en aquest interval és estrictament decreixent.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - x + 2 = -\infty - 0 + 3 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln(x)}{x} - 1 + \frac{3}{x} \right) = +\infty(0 - 1 + 0) = -\infty.$$

$f(x)$  és estrictament creixent quan  $x \in ]0, 1[$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,  $f(1) > 0$ .

Aleshores, existeix un únic  $a \in ]0, 1[$  tal que  $f(a) = 0$ .

$f(x)$  és estrictament decreixent quan  $x \in ]1, +\infty[$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $f(1) > 0$ .

Aleshores, existeix un únic  $b \in ]1, +\infty[$  tal que  $f(b) = 0$ .

b)

vegem que la successió és monòtona creixent  $x_{n+1} > x_n$  per inducció:

Si  $n = 1$ ,

Per l'apartat a) si  $x_1 \in ]1, b[$ ,  $\ln(x_1) - x_1 + 3 > 0$ . Aleshores,  $x_2 = \ln(x_1) + 3 > x_1 > 1$ .

Suposem certa la relació per a  $n = k$ ,  $x_{k+1} > x_k$ .

Demostrem la relació per a  $n = k + 1$ :

$$x_{k+2} = 3 + \ln(x_{k+1}) \underset{HI}{>} 3 + \ln(x_k) = x_{k+1}.$$

Aleshores, la successió és monòtona.

Vegem que per inducció que  $x_n < b$ .

Si  $n = 1$ , Per hipòtesi  $x_1 < b$

Suposem certa la relació per a  $n = k$ ,  $x_k < b$

Demostrem la relació per a  $n = k + 1$ :

Per l'apartat a)  $3 + \ln(b) = b$

$$x_{k+1} = 3 + \ln(x_k) \underset{HI}{<} 3 + \ln(b) = b$$

La successió  $\{x_n\}$  és monòtona creixent i afitada superiorment, aleshores, és convergent.

Siga  $x$  el seu límit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \ln(x_n))$$

$$x = 3 + \ln(x)$$

Per l'apartat a) l'única solució és  $x = b$ .

B1.-Dos amics A i B competeixen en el mateix joc. A tira dos daus i guanya si la suma de punts és 4, en cas contrari B tira els daus i guanya si obté com a suma de punts 6. Si B no guanya A torna a tirar amb les mateixes condicions i així successivament fins que un dels dos guanye. Calculeu:

- a) la probabilitat que té A de guanyar.
- b) La probabilitat que té B de guanyar.

Oposicions de Catalunya 2000.

Solució:

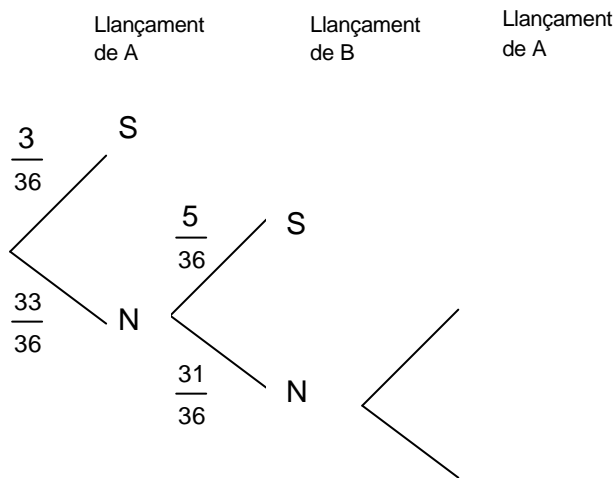
Els casos favorables de traure suma 4 al llançar 2 daus són 3

Els casos favorables de traure suma 6 al llançar 2 daus són 5

Els casos possibles són 36.

Siga  $T_A$  = guanya A. Siga  $T_B$  = guanya B.

Considerem el diagrama:



El procediment es repeteix fins l'infinit:

$$P(T_A) = \frac{1}{12} + \left(\frac{11}{12} \frac{31}{36}\right) \frac{1}{12} + \left(\frac{11}{12} \frac{31}{36}\right)^2 \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{12} \left( 1 + \left(\frac{11}{12} \frac{31}{36}\right) + \left(\frac{11}{12} \frac{31}{36}\right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{12} \frac{31}{36}\right)^n + \dots \right)$$

Aplicant la fórmula de la suma infinita d'una sèrie geomètrica de raó  $0 < \frac{11}{12} \frac{31}{36} < 1$  i

primer terme 1:

$$P(T_A) = \frac{1}{12} \frac{1}{1 - \frac{11}{12} \frac{31}{36}} = \frac{36}{91}$$

$$P(T_B) = 1 - P(T_A) = 1 - \frac{36}{91} = \frac{55}{91}$$

B2.- Resoleu l'equació  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$   
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = 1 - \cos^2 3x$$

$$\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x$$

$\cos^2 2x = \sin^2 3x - \cos^2 x$ , transformem en producte:

$$\cos^2 2x = (\sin 3x + \cos x)(\sin 3x - \cos x)$$

$$\cos^2 2x = \left( \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) \left( \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right) \text{ transformem en productes:}$$

$$\cos^2 2x = 2 \sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{2x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

Simplificant:

$$\cos^2 2x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Utilitzant l'angle doble:

$$\cos^2 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos^2 2x = \cos 2x \cdot (-\cos 4x)$$

$$\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 0$$

Aleshores,

$$\cos 2x = 0, \text{ per tant, } 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x = \cos(\pi - 4x)$$

Aleshores,

$$2x = \pi - 4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \pi - 4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Per tant, } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les solucions en la primera volta són:

$$45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ,$$

$$30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ,$$

$$90^\circ, 270^\circ$$

B3.- Donada l'el·lipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , quin és el triangle rectangle d'àrea mínima que té els catets sobre els eixos (positius) OX OY i la hipotenusa és tangent a l'el·lipse?.  
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga  $C\left(c, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}\right)$  un punt de l'el·lipse en el primer quadrant, ( $c > 0$ ).

Calculem la recta tangent a l'el·lipse en el punt C.

La part superior de l'el·lipse és la funció

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

La seua derivada és:

$$y' = \frac{-b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Calculem  $y'(c)$  el pendent de la recta tangent en el punt C:

$$y'(c) = \frac{-b}{a} \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}. \text{ La recta tangent és:}$$

$$r \equiv y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{-b}{a} \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}(x - c)$$

Calculem els punts de tall de la recta r amb els eixos coordenats que ens donaran els vèrtexs del triangle que cerquem:

$$\text{Si } y = 0, \text{ aleshores, } x = \frac{a^2}{c}. \text{ Per tant } A\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ aleshores, } y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - c^2}}. \text{ Per tant } B\left(0, \frac{ab}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right).$$

Calculem l'àrea del triangle  $O\hat{A}B$ :

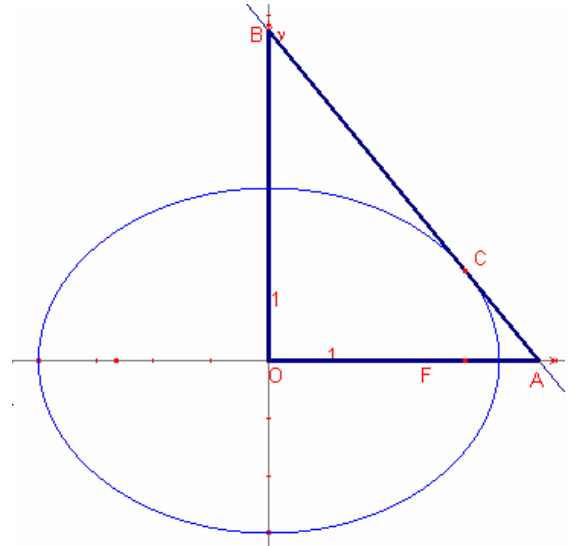
$$S_{OAB} = \frac{\frac{a^2}{c} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 - c^2}}}{2} = \frac{a^3b}{2} (a^2c^2 - c^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

Considerem la funció  $S(c) = \frac{a^3b}{2} (a^2c^2 - c^4)^{-\frac{1}{2}}$ .

$$S'(c) = \frac{a^3b}{2} \left(\frac{-1}{2}\right) (a^2c^2 - c^4)^{-\frac{3}{2}} (2a^2c - 4c^3)$$

$$S'(c) = 0 \text{ si } c = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Amb la segona derivada podem veure que  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} a$  és un mínim.



B4.- Siguen dos segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  d'igual longitud  $d$  i articulats pel punt B. El punt a està sobre l'origen de coordenades i el C varia sobre la part positiva de l'eix OX. Determineu l'equació del lloc geomètric d'un punt P situat sobre el segment  $\overline{BC}$  a una distància  $p$  del punt C. Dibuixeu el lloc geomètric.  
Oposicions Catalunya 2000

Solució:

Siga  $A(0,0)$ ,  $C(a,0)$ ,  $a \geq 0$

Aplicant el teorema de Pitàgores,  $B\left(\frac{a}{2}, +\sqrt{d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$  o  $B'\left(\frac{a}{2}, -\sqrt{d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$ .

Siga  $P(x,y)$  sobre el segment  $\overline{BC}$  tal que  $p = \overline{CP}$ .

Aleshores,  $d \cdot \vec{CP} = p \cdot \vec{CB}$

$$d(x - a, y - 0) = p\left(\frac{-a}{2}, -\sqrt{d^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right).$$

Igualant les coordenades dels vectors:

$$\begin{cases} dx - da = -p\frac{a}{2} \\ dy = -p\sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} \end{cases}$$

Aïllant  $a$  de la primera equació:

$$\begin{cases} a = \frac{2dx}{2d - p} \\ dy = -p\sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4}} \end{cases}$$

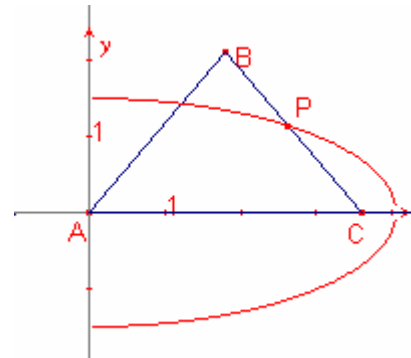
Substituint el valor de  $a$  en la segona equació i elevant al quadrat:

$$d^2 y^2 = p^2 \left( d^2 - \frac{4d^2 x^2}{4(2d - p)^2} \right)$$

Simplificant:

$$\frac{x^2}{(2d - p)^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1.$$

És mitja el·lipse (ja que  $a$  només recorre l'eix positiu d'abscisses) de semieixos  $2d - p$ ,  $p$ .



B5.- Calculeu:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2(2n-2)} + \dots + \sqrt{k(2n-k)} + \dots + \sqrt{n(2n-n)})$$

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Transformaren la suma per una integral:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ .

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{\frac{2}{n} \left(2 - \frac{2}{n}\right)} + \dots + \sqrt{\frac{k}{n} \left(2 - \frac{k}{n}\right)} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n} \left(2 - \frac{n}{n}\right)} \right) = \\ &= \int_0^1 \sqrt{x(2-x)} dx \end{aligned}$$

$$\text{Calculem } \int \sqrt{x(2-x)} dx = \int \sqrt{1 - (x-1)^2} dx$$

Efectuem el canvi  $x-1 = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ .

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x(2-x)} dx &= \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x-1)) + C. \end{aligned}$$

Aleshores:

$$L = \int_0^1 \sqrt{x(2-x)} dx = \left. \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin(x-1)) \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

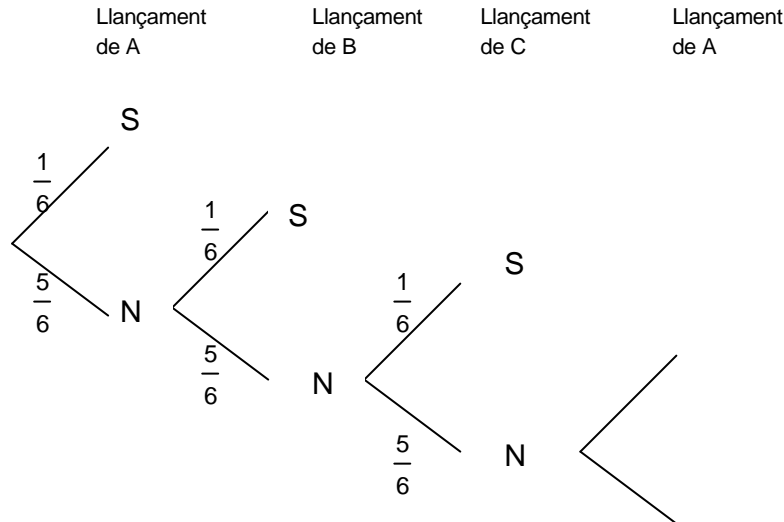
C1.- Tres persones A, B, C tiren successivament i en aquest ordre un dau. La primera persona que obté un 6 guanya la partida. Quines són respectives probabilitats de guanyar.  
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga S = traure 6. N = no traure 6.

Siga  $T_A$  = guanya A. Siga  $T_B$  = guanya B. Siga  $T_C$  = guanya C.

Considerem el diagrama:



El procediment es repeteix fins l'infinit:

$$P(T_A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2 \cdot 3} \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \left( 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^{2 \cdot 3} + \left(\frac{5}{6}\right)^{3 \cdot 3} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} + \dots \right)$$

Aplicant la fórmula de la suma infinita d'una sèrie geomètrica de raó  $\left(\frac{5}{6}\right)^3$  i primer

terme 1:

$$P(T_A) = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{1}{6} \frac{6^3}{6^3 - 5^3} = \frac{36}{91}.$$

$$P(T_B) = \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2 \cdot 3} \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \dots = \frac{5}{36} \left( 1 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^{2 \cdot 3} + \left(\frac{5}{6}\right)^{3 \cdot 3} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} + \dots \right) =$$

$$= \frac{5}{36} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{5}{36} \frac{6^3}{6^3 - 5^3} = \frac{30}{91}.$$

$$P(T_C) = 1 - P(T_A \cup T_B) = 1 - (P(T_A) + P(T_B)) = 1 - \left( \frac{36}{91} + \frac{30}{91} \right) = \frac{25}{91}.$$

C2.- Resoleu l'equació  $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$  sabent que admet una arrel complexa (no real) de mòdul 5.  
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

L'equació és de coeficients reals.

Si té una solució complexa també és solució la conjugada.

L'equació té 1 arrel real i 2 complexes conjugades.

Siga  $r$  l'arrel real i siguin  $m, n$  arrels reals complexes conjugades.

$$\|m\| = \|n\| = 5, \quad n = \bar{m}, \quad m \cdot \bar{m} = 5^2.$$

L'equació es pot factoritzar:

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 2(x-r)(x-m)(x-n) = 0:$$

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 2(x^3 - (r+m+n)x^2 + (rm+rn+mn)x - rmn).$$

Igualant els termes independents:

$$75 = -2rmn.$$

$$75 = -2r5^2.$$

$$r = \frac{-3}{2}.$$

El polinomi  $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75$  és divisible per  $\left(x + \frac{3}{2}\right)$ . Aplicant la regla de Ruffini:

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = \left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x + 50).$$

Resolem l'equació  $2x^2 - 2x + 50 = 0$

$$x = 3 + 4i, \quad x = 3 - 4i.$$

Aleshores les solucions de l'equació inicial són  $x = \frac{-3}{2}, x = 3 + 4i, x = 3 - 4i$ .

C3.- Considerem un ortoedre de base un quadrat de costat  $a$ . Siguen  $A, B, C, D$  els vèrtexs del quadrat d'una de les bases i  $A', B', C', D'$  els corresponents a l'altra base. Considerem  $M$  el punt mig del segment  $\overline{AB}$  i  $N$  el punt mig del  $\overline{B'C'}$ . Construïm un triangle de vèrtexs els punts  $M, C$  i  $P$  essent  $P$  un punt variable del segment  $\overline{ND'}$ .

a) Calculeu la posició del punt  $P$  de manera que l'àrea del triangle  $\triangle MCP$  siga mínima.

b) Calculeu la posició del punt  $P$  de manera que l'àrea del triangle  $\triangle MCP$  siga màxima.  
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga  $b = AA'$  l'altura de l'ortoedre.

Considerem l'ortoedre en les següents coordenades cartesianes.

$A(0,0,0), B(0,a,0), C(-a,a,0), D(-a,0,0)$ .  $A'(0,0,b), B'(0,a,b), C'(-a,a,b), D'(-a,0,b)$ .

El punt mig  $M$  del segment  $\overline{AB}$  té coordenades:  $M\left(0, \frac{a}{2}, 0\right)$ .

$N$  el punt mig del  $\overline{B'C'}$  té coordenades:  $N\left(\frac{-a}{2}, a, b\right)$ .

$\overline{D'N} = \left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$

L'equació de la recta que passa pels punts  $D'$  i  $N$  té per equació:

$r \equiv (x, y, z) = (-a, 0, b) + \alpha(1, 2, 0)$

Un punt  $P$  en el segment  $\overline{ND'}$  té coordenades:  $P(-a + \alpha, 2\alpha, b)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \frac{a}{4}$ .

$\overline{MC} = \left(-a, \frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $\overline{MP} = \left(-a + \alpha, 2\alpha - \frac{a}{2}, b\right)$ .

Calculem l'àrea del triangle  $\triangle MCP$ ,

$$S_{MCP} = \frac{1}{2} \|\overline{MC} \times \overline{MP}\|, \quad \overline{MC} \times \overline{MP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a & \frac{a}{2} & 0 \\ -a + \alpha & 2\alpha - \frac{a}{2} & b \end{vmatrix} = \left(\frac{ab}{2}, ab, -\frac{5a}{2}\alpha + a^2\right).$$

$$S_{MCP} = \frac{1}{2} \|\overline{MC} \times \overline{MP}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{ab}{2}\right)^2 + (ab)^2 + \left(-\frac{5a}{2}\alpha + a^2\right)^2}.$$

L'àrea del triangle al quadrat és una paràbola en  $0 \leq \alpha \leq \frac{a}{4}$ .

El mínim està en el vèrtex i el màxim en un dels extrems de  $\alpha$ .

El mínim s'assoleix quan  $\alpha = \frac{2a}{5}$  el punt  $P$  té coordenades  $P\left(\frac{-3a}{5}, \frac{4a}{5}, b\right)$ , l'àrea

$$\text{mínima és } S_{\text{mín}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5a^2b^2}{4}}$$

$$\text{Si } \alpha = 0, S(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5a^2b^2}{4} + a^4}. \quad \text{Si } \alpha = \frac{a}{4}, S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5a^2b^2}{4} + \frac{8}{64}a^4}$$

$S(0) > S\left(\frac{a}{4}\right)$ . Aleshores el màxim s'assoleix quan  $\alpha = 0$ .

Les coordenades del màxim són:  $P(-a, 0, b)$ .

C4.- Siga un trapezi isòsceles amb bases  $a$  i  $c$  i altura  $h$ .

a) Sobre l'eix de simetria d'aquest trapezi, determineu els punts  $P$  des dels quals es veuen els costats iguals del trapezi sota un angle recte, calculant la distància de  $P$  a cada base.

b) Determineu en quines condicions existeix  $P$  (discutiu els diversos casos que es poden donar).

Oposicions Catalunya 2000

Solució:

Considerem el trapezi isòsceles  $ABCD$  amb les següents coordenades:

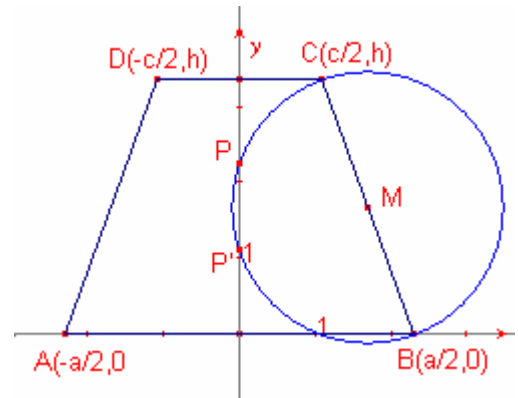
$$A\left(\frac{-a}{2}, 0\right) B\left(\frac{a}{2}, 0\right) C\left(\frac{c}{2}, h\right) D\left(\frac{-c}{2}, h\right)$$

L'eix de simetria del trapezi és l'eix d'ordenades,  $x = 0$

Siga  $M$  el punt mig del costat  $\overline{BC}$ . Les coordenades de  $M$  són:

$$M\left(\frac{a+c}{4}, \frac{h}{2}\right).$$

El problema tindrà solució si la circumferència de centre  $M$  i diàmetre  $\overline{BC}$  talla l'eix de simetria.



Determinem l'equació de centre  $M$  i diàmetre  $\overline{BC}$ .

El radi  $r$  aconpleix, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$r^2 = \frac{h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}{4} = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16}.$$

L'equació de la circumferència és:

$$\left(x - \frac{a+c}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16}.$$

Determinem la intersecció de l'eix de simetria i la circumferència:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \left(x - \frac{a+c}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16} \end{cases}$$

$$\frac{(a+c)^2}{16} + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{(a-c)^2}{16}.$$

$$\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2 - ac}{4}. \text{ Aleshores, } y = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{h^2 - ac}}{2}.$$

El problema té 2 solucions si  $h^2 - ac > 0$ . Els punts solució són  $P\left(0, \frac{h + \sqrt{h^2 - ac}}{2}\right)$  i

$$P'\left(0, \frac{h - \sqrt{h^2 - ac}}{2}\right)$$

El problema té 1 solució si  $h^2 - ac = 0$ . El punt solució és,  $P\left(0, \frac{h}{2}\right)$ .

El problema no té solució si  $h^2 - ac < 0$ .

C5.- Siguen dues successions de nombres enters  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  tal que

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

a) Demostreu que  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  són successions de nombres senars.

b) Demostreu que  $\{b_n\}$  és la hipotenusa d'un triangle de catets  $\frac{a_n + 1}{2}$ ,  $\frac{a_n - 1}{2}$ .

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

$$\text{Siga } Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

$Q(\sqrt{2})$  és un espai vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ .  $\{1, \sqrt{2}\}$  és la base d'aquest espai vectorial.

Vegem que  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  són successions de nombres senars. Ho farem per inducció:

Per a  $n = 1$ :

$$(1 + \sqrt{2})^3 = a_1 + b_1 \sqrt{2}, \quad 7 + 5\sqrt{2} = a_1 + b_1 \sqrt{2}.$$

Com que les components d'un vector respecte una base són úniques:

$a_1 = 7$ ,  $b_1 = 5$ , per tant  $a_1, b_1$  són nombres senars.

Suposem que per a  $n = k$ ,  $a_k, b_k$  són nombres senars,  $a_k = 2p + 1$ ,  $b_k = 2q + 1$ ,

$p, q \in \mathbb{Z}$ .

Demostrem la propietat per a  $n = k + 1$ :

$$(1 + \sqrt{2})^{2(k+1)+1} = a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^{2(k+1)+1} &= (1 + \sqrt{2})^{2k+1} (1 + \sqrt{2})^2 = (a_k + b_k \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = ((2p + 1) + (2q + 1)\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = \\ &= 6p + 3 + (4p + 2)\sqrt{2} + (6q + 3)\sqrt{2} + 8q + 4 = \\ &= (6p + 8q + 7) + (4p + 6q + 5)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Aleshores:  $a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2} = (2(3p + 4q + 3) + 1) + (2(2p + 3q + 2) + 1)$ .

Com que les components d'un vector respecte una base són úniques:

$a_{k+1} = 2(3p + 4q + 3) + 1$ ,  $b_{k+1} = 2(2p + 3q + 2) + 1$ . Aleshores,  $a_{k+1}, b_{k+1}$  són nombres senars.

b) Ho farem per inducció:

Per a  $n = 1$ , de l'apartat a)  $a_1 = 7$ ,  $b_1 = 5$ .

$$b_1^2 = \left(\frac{a_1 + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1 - 1}{2}\right)^2 \text{ ja que } 5^2 = 4^2 + 3^2.$$

$$\text{Suposem que per a } n = k, \quad b_k^2 = \left(\frac{a_k + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2$$

De l'apartat a)  $a_k = 2p + 1$ ,  $b_k = 2q + 1$ , aleshores,  $p^2 + p = 2q^2 + 2q$

Demostrem la propietat per a  $n = k + 1$ :

De l'apartat a)  $a_{k+1} = 2(3p + 4q + 3) + 1$ ,  $b_{k+1} = 2(2p + 3q + 2) + 1$

$$\left(\frac{a_k + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2 = (3p + 4q + 3)^2 + (3p + 4q + 4)^2 = 18p^2 + 32q^2 + 48pq + 42p + 56q + 25$$

$$(b_{k+1})^2 = (2(2p + 3q + 2) + 1)^2 = 16p^2 + 36q^2 + 48pq + 40p + 60q + 25 =$$

$$= 16p^2 + 36q^2 + 48pq + 40p + 60q + 25 = 16p^2 + 32q^2 + 48pq + 40p + 56q + 25 + (4q^2 + 4q) =$$

$$= 18p^2 + 32q^2 + 48pq + 42p + 56q + 25.$$

$$\text{Aleshores, } b_{k+1}^2 = \left(\frac{a_{k+1} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{k+1} - 1}{2}\right)^2.$$