A1

Considerem la funció $f(x)=|x+1|+|x-2|$.

a) Representeu-la gràficament.

b) Calculeu $\int_1^3 f(x)dx$.

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

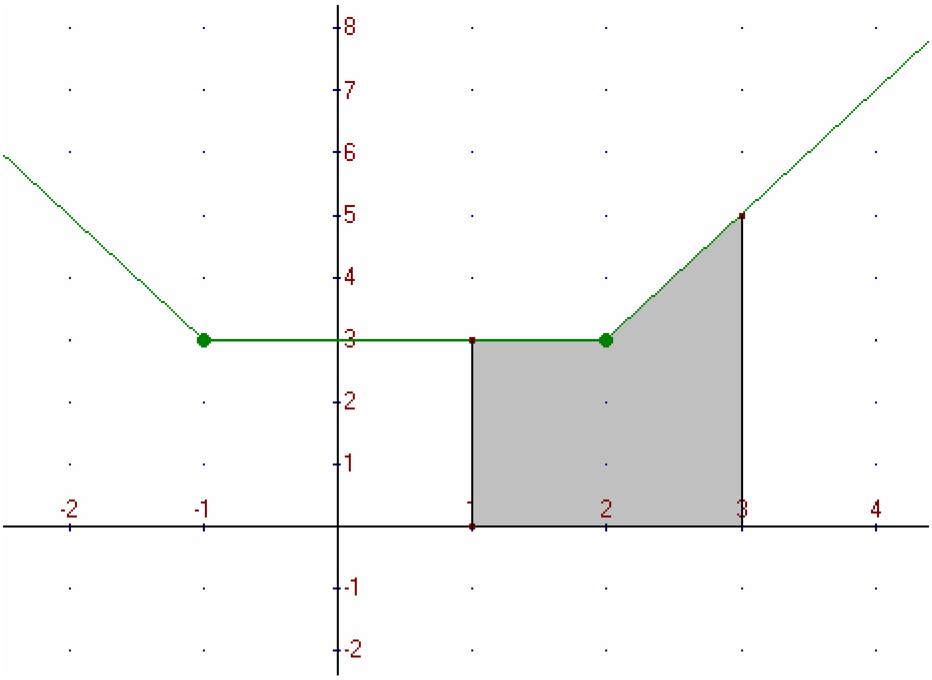
Definim la funció $f(x)$ com funció definida a trossos:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x\le -1\\ 3 & \text{si } -1<x<2\\ 2x-1 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

La funció és contínua en R

La funció és derivable en $R\sim\{-1,2\}$

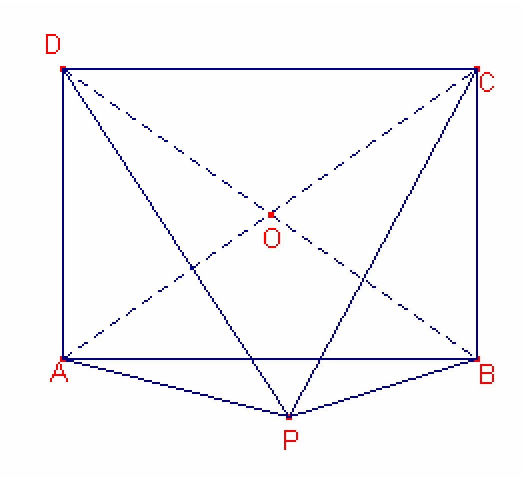
$$f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } -1<x<2\\ 2 & \text{si } x>2\end{cases}.$$



b)

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 3dx+\int_2^3(2x-1)dx=3x]_1^2+\left(x^2-x\right)]_2^3=7.$$

A2
Demostreu que el centre d'un rectangle és el punt on la suma de distàncies als vèrtexs del rectangle és mínima.
Oposicions Catalunya 1993.



Solució:
Considerem el rectangle ABCD.
Siga O el centre del rectangle, intersecció de les dues diagonals.
$\overline{AC} = \overline{BD} = 2 \cdot \overline{OA} = 2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot \overline{OC} = 2 \cdot \overline{OD}$.

Siga un P del plànol.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$:
$\overline{AC} \leq \overline{AP} + \overline{CP}$, donant-se la igualtat quan A, P, C estan alineats i P entre A i C.
Aleshores,
$\overline{OA} + \overline{OC} \leq \overline{AP} + \overline{CP}$ (1)

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{BDP}$:
$\overline{BD} \leq \overline{BP} + \overline{DP}$, donant-se la igualtat quan B, P, D estan alineats i P entre B i D.
Aleshores,
$\overline{OB} + \overline{OD} \leq \overline{BP} + \overline{DP}$ (2)

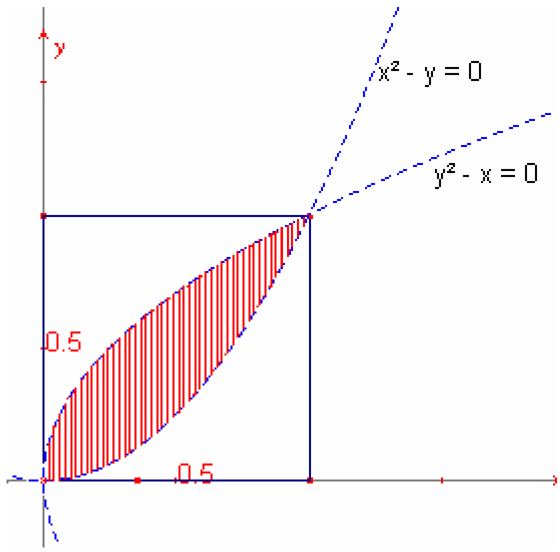
sumant les expressions (1) i (2).
$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$
La igualtat es dona quan P està alineat amb A i C i està alineat amb B, D, és a dir, quan P és el centre del rectangle.

A3

Escollim dos nombres a l'atzar entre 0 i 1. Quina és la probabilitat que el primer siga més gran o igual que el quadrat del segon i, al mateix temps, que el segon siga més gran o igual que el quadrat del primer?.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 1 tal que

$$\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \geq x^2 \end{cases}.$$



Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per les paràboles
$x = y^2$, $y = x^2$.
La intersecció de les dues paràboles són els punts (0,0), (1,1).

L'àrea afitada és:

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left. \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

La probabilitat del succés és:

$$p = \frac{\frac{1}{3}}{1^2} = \frac{1}{3}.$$

A4

Demostreu que n^4+4, amb $n\in N$, només és primer quan $n=1$.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

$$n^4+4=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2\right)-(2n)^2=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)=$$
$$=\left((n+1)^2+1\right)\left((n-1)^2+1\right)$$

$(n+1)^2+1>1\quad \forall n\in N$

$(n-1)^2+1>1\quad \forall n>1$

n^4+4, és un nombre compost $\forall n>1$.

Si $n=1$, $n^2+4=5$ que és un nombre primer.

A5

Siga $0 < x_1 < y_1$ i definim per recurrència, $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

a) Demostreu que $x_1 < x_2 < .... < x_n < y_n < .... < y_2 < y_1$.

b) Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú i calculeu-lo.

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

a) Ho provarem amb 4 passos:

a1) Demostrem per inducció que $x_n > 0$, $y_n > 0$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $0 < x_1 < y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k > 0$, $y_k > 0$.

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$x_{k+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} > 0, \quad y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} > 0.$$

a2) Demostrem per inducció que $x_n < y_n$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $x_1 < y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < y_k$.

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$y_{k+1} - x_{k+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} > \frac{x_n + x_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{y_n + y_n} = 0.$$ Aleshores, $x_{k+1} < y_{k+1}$.

a3) Demostrem per inducció que $x_n < x_{n+1}$.

Si $n = 1$, $x_2 = \frac{2x_1 y_2}{x_1 + y_1} > \frac{2x_1 y_1}{y_1 + y_1} = x_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < x_{k+1}$

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \underset{(a2)}{>} \frac{2x_n y_n}{y_n + y_n} > x_n.$$

a4) Demostrem per inducció que $y_n > y_{n+1}$.

Si $n = 1$, $y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{y_1 + y_1}{2} = y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $y_k > y_{k+1}$

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} \underset{(a2)}{<} \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

b)

La successió $\{x_n\}$ és monòtona creixent i afitada superiorment, aleshores és convergent. Siga $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $a > 0$.

La successió $\{y_n\}$ és monòtona decreixent i afitada inferiorment, aleshores és convergent. Siga $b = \lim_{n\to\infty} y_n$, $b > 0$.

$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{2}$, aleshores, $b = \frac{a+b}{2}$. (1)

Aleshores, $a = b$.

$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, aleshores, $a = \frac{2ab}{a+b}$ (2)

El sistema format per les expressions (1) (2) és compatible indeterminat.

La segona relació de l'enunciat és $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, aleshores, $x_n + y_n = 2y_{n+1}$.

Substituint en la 1ª relació de l'enunciat $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$:

$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{2y_{n+1}}$. Simplificant:

$x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n \quad \forall n \in N$.

Per tant, $x_{n+1} y_{n+1} = x_n y_n$.

$x_{n+1} y_{n+1} = x_1 y_1$.

Calculant límits:

$\lim\limits_{x \to \infty} x_{n+1} y_{n+1} = x_1 y_1$.

$a^2 = x_1 y_1$. Aleshores, $a = \sqrt{x_1 y_1}$.

B1

Discutiu en funció de k, el nombre de solucions de l'equació: $kx - e^x = 0$.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

Siga $f(x) = kx - e^x$

El seu domini és R. És contínua i derivable en R $f'(x) = k - e^x$.

Si $k = 0$

$f(x) = -e^x$ $f(x) = 0$ no té solució ja que $e^x > 0 \quad \forall x \in R$

Si $k < 0$

$f'(x) = k - e^x < 0$, aleshores, la funció és decreixent.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(kx - e^x) = +\infty - 0 = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(kx - e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{kx}{e^x} - 1\right) = +\infty(-1) = -\infty.$$

Aleshores, l'equació inicial té una única solució.

Si $k > 0$

$f'(x) = 0$, $k - e^x = 0$ l'equació té solució única, $x = \ln k$.

$f''(x) = -e^x$, $f''(\ln k) = -e^{\ln k} = -k < 0$.

Aleshores, $x = \ln k$ és el màxim de la funció.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(kx - e^x) = -\infty - 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(kx - e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{kx}{e^x} - 1\right) = +\infty(-1) = -\infty.$$

$f(\ln k) = k \cdot \ln k - e^{\ln k} = k \cdot \ln k - k$

Si $f(\ln k) > 0$ l'equació té dues solucions reals distintes.

$k \cdot \ln k - k > 0$.

$\ln k > 1$, és a dir si $k > e$.

Si $f(\ln k) < 0$ l'equació no té solució.

És a dir si $k < e$.

Si $f(\ln k) = 0$ l'equació té una solució.

És a dir si $k = e$.

B2
Tres esferes del mateix radi estan sobre una taula de tal manera que cadascuna està en contacte amb les altres dues. Determineu el radi de l'esfera més gran possible que es pot situar entre la taula i les altres esferes.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:
L'esfera que busquen serà la tangent a les tres esferes i tangent a la taula.
Siga R el radi de les tres esferes iguals i tangents entre elles

Siga r el radi de la 4 esfera situada entre les altres esferes.

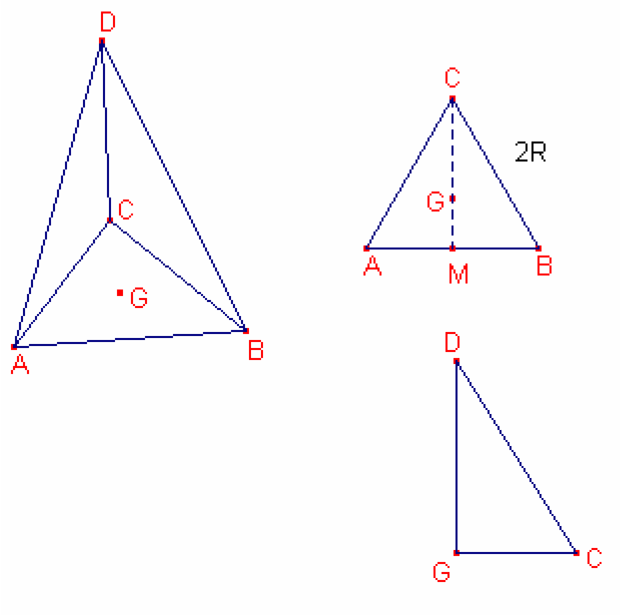
Els centres de les 3 esferes tangents formen un triangle equilàter de costat 2R.
Els centres de les 4 esferes formen un tetràedre recte de base un triangle equilàter de costat 2R i d'arestes laterals $R+r$.
L'altura del tetràedre és $R-r$.
Aquesta altura té per base el baricentre del triangle.

La mitjana del triangle equilàter que forma la base és aplicant el teorema de Pitàgores:
$$\overline{CM}=\sqrt{(2R)^2-R^2}=R\sqrt{3}$$
Per la propietat del baricentre:
$$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CGD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{CD}=R+r$, $\overline{DG}=R-r$:

$$(R+r)^2=(R-r)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2.$$

$$4rR=\frac{4}{3}R^2.$$

Aleshores, $r=\frac{1}{3}R$



B3

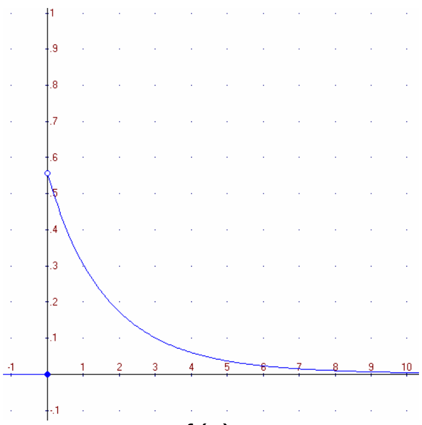
La durada en minuts d'una trucada telefònica de llarga distància, s'assimila a una variable aleatòria X amb una funció de distribució:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{quan } x\le 0\\ 1-\frac{2}{3}e^{\frac{-2x}{3}}-\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}} & \text{quan } x>0\end{cases}$$. Es demana:

a) L'esperança matemàtica o durada mitjana.
b) La probabilitat que la durada d'una trucada estiga compresa entre 3 i 6 minuts.
c) Una trucada ja porta 3 minuts. Probabilitat que no passe dels 6 minuts.

Solució:
Calculem la funció de densitat de probabilitat $f(x)$.

$F'_X(x)=f(x)$, aleshores: $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{quan } x\le 0\\ \frac{4}{9}e^{\frac{-2x}{3}}+\frac{1}{9}e^{\frac{-x}{3}} & \text{quan } x>0\end{cases}$$


$f(x)$

a) L'esperança matemàtica és:

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{4}{9}\int_0^{+\infty}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}dx+\frac{1}{9}\int_0^{+\infty}x\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx.$$

$$\int x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}+\frac{3}{2}\int e^{\frac{-2x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}-\frac{9}{4}e^{\frac{-2x}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}u=x & dx=dx\\ dv=e^{\frac{-2x}{3}}dx & v=\frac{-3}{2}e^{\frac{-2x}{3}}\end{array}}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx=-3x\cdot e^{\frac{-x}{3}}+3\int e^{\frac{-x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-x}{3}}-9e^{\frac{-x}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}u=x & dx=dx\\ dv=e^{\frac{-x}{3}}dx & v=-3e^{\frac{-x}{3}}\end{array}}$$

Aleshores, $\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot f(x)dx=2$.

b)
Siga A = la durada d'una trucada estiga compresa entre 3 i 6 minuts.

$$P(A)=F_X(6)-F_X(3)=\left(1-\frac{2}{3}e^{-4}-\frac{1}{3}e^{-2}\right)-\left(1-\frac{2}{3}e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-1}\right)=\frac{e^3-2}{3e^4}\approx 0'1104.$$

c)
Siga B = la durada de la trucada siga major de 3 minuts.
Siga C = la durada de la trucada siga menor de 6 minuts.

$$P(B)=1-F_X(3)=1-\left(1-\frac{2}{3}e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-1}\right)=\frac{2}{3}e^{-2}+\frac{1}{3}e^{-1}.$$

$$P(C)=F_X(6)=1-\frac{2}{3}e^{-4}-\frac{1}{3}e^{-2}.$$

$$P(C\,|\,B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{e^{3}-2}{3e^{4}}}{\frac{3+e}{3e^{2}}}=\frac{e^{3}-2}{e^{2}(e+3)}\approx 0'4280\,.$$

B4
Demostreu que un nombre natural és un quadrat perfecte si i només si té un nombre imparell de divisors.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:
Siga n un nombre natural, aleshores, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ....\cdot p_r^{\alpha_r}$ on p_i són nombres primers i $\alpha_i \in N$.
El nombre de divisors de n és $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot ....\cdot(\alpha_r + 1)$.

n és un quadrat perfecte si i només si α_i és parell $\forall i = 1,2,...., r$.
Si i només si $\alpha_1 + 1$ és imparell $\forall i = 1,2,...., r$.
Si i només si $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdot ....\cdot(\alpha_r + 1)$ és imparell.

B5

Donat un nombre natural k, considerem la successió:

$a_1 = \sqrt{k}$, $a_2 = \sqrt{k+\sqrt{k}}$, $a_3 = \sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k}}}$,.........

Demostreu que a_n és convergent.

Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l(k)$, indiqueu quina condició compleixen els valors de k per als quals l(k) és enter.

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

Podem definir la successió de forma recurrent: $a_n = \sqrt{k+a_{n-1}}$.

Vegem que la successió és monòtona creixent (demostració per inducció):

$a_2 = \sqrt{k+\sqrt{k}} > \sqrt{k} = a_1$.

Suposem que $a_n > a_{n-1}$

$a_{n+1} = \sqrt{k+a_n} > \sqrt{k+a_{n-1}} = a_n$

Vegem que la successió està afitada per $k+1$ (demostració per inducció).

$a_1 = \sqrt{k} < k+1$, ja que $k < (k+1)^2$.

Suposem que $a_n < k+1$

$a_{n+1} = \sqrt{k+a_n} < \sqrt{2k+1}$.

$\sqrt{2k+1} < k+1$, ja que $2k+1 < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$.

Aleshores la successió té límit, per ser monòtona creixent i afitada superiorment.

Siga l(k) el límit.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{k+a_{n-1}}$. Aleshores:

$l(k) = \sqrt{k+l(k)}$, resolent l'equació, $l(k) = \dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$.

Per a que l(k) siga enter, $1+4k$ ha de ser imparell i quadrat perfecte, és ha dir:

$1+4k = (2p+1)^2$, $p \in N$.

$1+4k = 4p^2 + 4p + 1$.

$k = p^2 + p$.

$k = p(p+1)$

Aleshores k és producte dos nombres naturals consecutius.

C1

Calculeu la integral $\int_0^{1993}\left(\frac{E(x)}{2}-E\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$, on $E(x)$ és la funció part entera:

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

$$\int_0^{1993}\left(\frac{E(x)}{2}-E\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{1993}E(x)dx-\int_0^{1993}E\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$E(x)=k \quad k\le x<k+1 \quad$ on $k=0,1,2,....$

En la gràfica hi ha 1993 rectangles de base 1 i altures: 0, 1, 2,....., 1992.

$$\int_0^{1993}E(x)dx=1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2+........+1\cdot 1992=0+1+2+....+1992=\frac{0+1992}{2}1993=996\cdot 1993$$

$E\left(\frac{x}{2}\right)=k \quad 2k\le x<2k+2 \quad$ on $k=0,1,2,....$

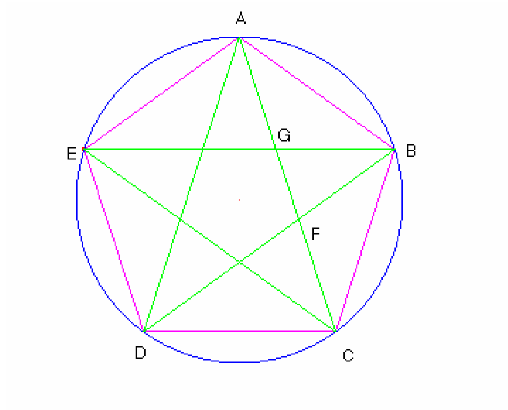
En la gràfica hi ha 996 rectangles de base 2 i altures: 0, 1, 2,....,995 i un rectangle de base 1 i altura 996.

$$\int_0^{1993}E\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 2+.....+2\cdot 995+1\cdot 996=2\frac{0+995}{2}996+996=995\cdot 996+996=996^2$$

$$\int_0^{1993}\left(\frac{E(x)}{2}-E\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{1993}E(x)dx-\int_0^{1993}E\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}996\cdot 1993-996^2=498\,.$$

El nombre d'or en el pentàgon.

Demostreu que la proporció entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és el nombre d'or $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



Demostració 1:

Siga el pentàgon regular de costat $\overline{AB}=a$

Siga la diagonal del pentàgon $\overline{AC}=d$

Per ser inscrits en la circumferència, els angles

$\angle BAC=\frac{\frac{360^o}{5}}{2}=36^o$ $\qquad \angle ABC=\frac{3\frac{360^o}{5}}{2}=108^o$

L'angle $\angle ACB=36^o$

Els angles $\angle ABF=72^o$, $\angle AFB=180^o-(36^o+72^o)=72^o$,

El triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és isòsceles, per tant, $\overline{AF}=\overline{AB}=a$

Per ser inscrit en la circumferència, l'angle $\angle CBF=\frac{\frac{360^o}{5}}{2}=36^o$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BFC}$ són semblants:

Pel teorema de Tales:

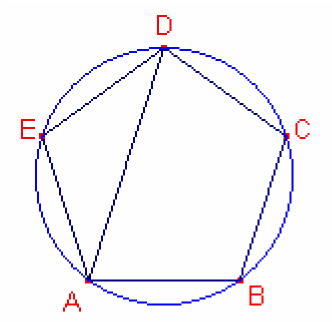
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{a}=\frac{a}{d-a} \quad\Rightarrow\quad a^2=d(d-a) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad d^2-ad-a^2=0 \quad\Rightarrow\quad d=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant, $\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nota: el valor negatiu de la solució no és vàlid perquè la diagonal és positiva.

Demostració 2:



Tot polígon regular està inscrit en una circumferència.

Considerem el pentàgon regular ABCDE

Siga $a=\overline{AB}$, $d=\overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Ptolomeu al quadrilàter inscriptible ABCD:

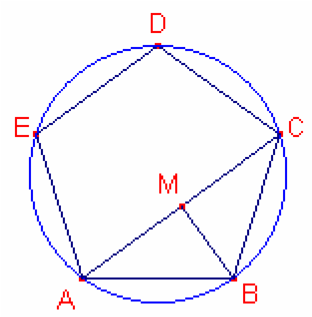
$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}$.

$d^2=a^2+ad$

Dividint per a^2: $\left(\frac{d}{a}\right)^2-\frac{d}{a}-1=0$

Resolent l'equació en la incògnita $\frac{d}{a}$: $\frac{d}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$.

Demostració 3:



Considerem el pentàgon regular ABCDE.

Siga $a=\overline{AB}$, $d=\overline{AC}$.

$\angle CAB=\angle ACB=36^o$ (per ser angles inscrits en una circumferència i abraçar un arc de $\frac{360^o}{5}=72^o$).

$\angle ABC=108^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles. Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és rectangle. Aplicant raons trigonomètriques:

$$\cos 36^o = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{d}{2a} \quad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin 108^o}{\sin 36^o} = \frac{\sin(72^o+36^o)}{\sin 36} = \frac{\sin 72^o \cos 36^o + \sin 36^o \cos 72^o}{\sin 36^o} =$$

$$= \frac{2\sin 36^o \cos 36^o + \sin 36^o(\cos^2 36^o - \sin^2 36^o)}{\sin 36^o} =$$

$$= 4\cos^2 36^o - 1.$$

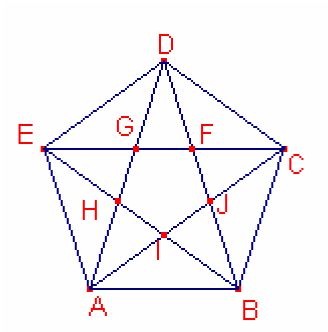
Substituint l'expressió (1): $\frac{d}{a} = 4\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1$

Simplificant: $\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} - 1 = 0$

Resolent l'equació en la incògnita $\frac{d}{a}$: $\quad \frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

C2

Considerem un pentàgon regular. En traçar les diagonals es forma en el seu interior un nou pentàgon regular. Quina és la relació entre les àrees dels dos pentàgons.
Oposicions Catalunya 1993.



Solució:

Siga el pentàgon regular ABCDE, $a = \overline{AB}$.
La proporció entre la diagonal i el costat del pentàgon és el nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CFD}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AE}}, \quad \frac{a}{a\Phi} = \frac{\overline{DF}}{a}, \quad \overline{DF} = \frac{a}{\Phi}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{GFD}$, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{DF}}, \quad \overline{GF} = \frac{a}{\Phi^2}.$$

Els pentàgons ABCDE, FGHIJ són semblants, aleshores, les àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats:

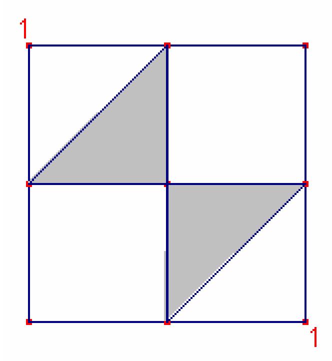
$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{FGHIJ}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{GF}}\right)^2 = \left(\frac{a}{\frac{a}{\Phi^2}}\right)^2 = \Phi^4.$$

C3
Un bastó de longitud h es trenca en tres trossos a l'atzar.
Calculeu la probabilitat que amb els tres trossos es puga construir un triangle.

Solució:
Podem suposar sense llevar generalitat que el bastó és de longitud 1.
Donar dos punts P, Q del segment de longitud 1 equival a donar un punt $M(x,y)$ en el quadrat de costat 1 en què x, y tenen distribucions uniformes en $]0,1[$ independents.

Suposem $x < y$
A fi que és puga construir un triangle s'ha d'acomplir la desigualtat triangular:

$$\begin{cases} x + (y - x) > 1 - y \\ x + (1 - y) > y - x \\ (y - x) + (1 - y) > x \end{cases}$$ que és equivalent a: $$\begin{cases} y > \dfrac{1}{2} \\ x - y > \dfrac{-1}{2} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$



Anàlogament si $x > y$ s'ha d'acomplir:

$$\begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ y - x > \dfrac{-1}{2} \\ y < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'àrea de les dues regions té àrea $\frac{1}{4}$.

Aleshores, la probabilitat és $p = \frac{1}{4}$.

C4

a) Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.

b) Demostreu que no existeix cap enter positiu tal que $2^n + 1$ és divisible per 7.

Solució:

a)

n pot ser de les formes $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+1$

i) Suposem $n = 3k$.

$$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = \left(2^3\right)^k - 1 = (2^3 - 1)\left(\left(2^3\right)^{k-1} + \left(2^3\right)^{k-2} + ... + 2^3 + 1\right) =$$

$$= 7\left(\left(2^3\right)^{k-1} + \left(2^3\right)^{k-2} + ... + 2^3 + 1\right).$$

Aleshores, si $n = 3k$, $2^n - 1$ és divisible per 7.

ii) Suposem $n = 3k+1$.

$2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2^{3k} + 2^{3k} - 1$.

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

2^{3k} no és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k+1$, $2^n - 1$ no és divisible per 7.

iii) Suposem $n = 3k+2$.

$2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{3k} - 1 = 3 \cdot 2^{3k} + 2^{3k} - 1$.

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

$3 \cdot 2^{3k}$ no és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k+2$, $2^n - 1$ no és divisible per 7.

b)

Anàlogament n pot ser de les formes $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+1$

iv) Suposem $n = 3k$.

$2^n + 1 = 2^{3k} - 1 + 2$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

v) Suposem $n = 3k+1$.

$2^n + 1 = 2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{3k} + 1 = 2^{3k} + 2^{3k} + 1 = 2^{3k} - 1 + 2^{3k} - 1 + 3$.

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k+1$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

vi) Suposem $n = 3k+2$.

$2^n + 1 = 2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 2^{3k} + 1 = 4(2^{3k} - 1) + 5$.

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k+2$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

C5

Considerem la successió de Fibonacci $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $n \geq 2$.

Demostreu que es compleixen les següents relacions:

a) $a_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_n$.

b) $a_n \cdot a_{n+1} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots\dots\dots\dots + {a_n}^2$

c) $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$

Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

a) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$, $1 + a_1 = 1 + 1 = 2$. Aleshores, $a_3 = 1 + a_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $a_{k+2} = 1 + a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_k$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$a_{k+1+2} = a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} \underset{HI}{=} \left(1 + a_1 + a_2 + \dots\dots + a_k\right) + a_{k+1}.$$

b) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, $a_1 \cdot a_2 = 1 \cdot 1 = 1$, ${a_1}^2 = 1^2 = 1$. Aleshores, $a_1 \cdot a_2 = {a_1}^2$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $a_k \cdot a_{k+1} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots\dots\dots\dots + {a_k}^2$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$a_{k+1} \cdot a_{k+2} = a_{k+1}(a_{k+1} + a_k) = {a_{k+1}}^2 + a_k \cdot a_{k+1} \underset{HI}{=} \left({a_1}^2 + {a_2}^2 + \dots\dots\dots\dots + {a_n}^2\right) + {a_{k+1}}^2.$$

c) Ho demostrarem per inducció:

Si $n = 1$, ${a_2}^2 = 1^2 = 1$, $a_1 \cdot a_3 + (-1)^1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$. Aleshores, ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3 + (-1)^1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $a_{k+1}^2 = a_k \cdot a_{k+2} + (-1)^k$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$a_{k+1} \cdot a_{k+3} = a_{k+1}\left(a_{k+1} + a_{k+2}\right) = {a_{k+1}}^2 + a_{k+1} \cdot a_{k+2} \underset{HI}{=} a_k \cdot a_{k+2} + (-1)^k + a_{k+1} \cdot a_{k+2} =$$

$$= \left(a_k + a_{k+1}\right)a_{k+2} + (-1)^k = a_{k+2} \cdot a_{k+2} + (-1)^k = {a_{k+2}}^2 + (-1)^k.$$

Aleshores, $a_{k+2}^2 = a_{k+1} \cdot a_{k+3} - (-1)^k = a_{k+1} \cdot a_{k+3} + (-1)^{k+1}$.