1.- Siga M una matriu quadrada d'ordre 2 i coeficients reals, verificant la igualtat:
$M^2 - 2M - 3I = 0$ (1) on I és la matriu unitat d'ordre 2.
Siga $M_2(R)$ l'espai vectorial sobre el cos R format per totes les matrius quadrades d'ordre 2. Siga V el subespai engendrat per M i I.
a) Determineu totes les matrius que verifiquen la relació (1) i tals que la dimensió de V siga 1.
b) Determineu totes les solucions de l'equació (1) de la forma $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.
c) Es suposa que M verifica (1) i és distinta de les matrius de l'apartat a).
Determineu en V totes les matrius que verifiquen $P^2 = P$.
Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:
Siga $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M^2 - 2M - 3I = 0$. Aleshores:
$\begin{pmatrix} a^2 + bc - 2a - 3 & ab + bd - 2b \\ ac + cd - 2c & bc + d^2 - 2d - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Igualant els elements:
$$\begin{cases} a^2 + bc - 2a - 3 = 0 \\ b(a + d - 2) = 0 \\ c(a + d - 2) = 0 \\ bc + d^2 - 2d - 3 = 0 \end{cases}$$
Si $b = c = 0$
$a = -1, 3$, $d = -1, 3$
Aleshores:
$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Restant la primera i quarta equació del sistema:
$a^2 - 2a - d^2 + 2d = 0$.
$(a + d - 2)(a - d) = 0$

Si $a - d = 0$, $a = d$
Substituint en la 2ª i 3 ª equació:
$b(2a - 2) = 0$, $c(2a - 2) = 0$.
Aleshores, $a = 1$ o bé $b = c = 0$.
Si $a = 1$, aleshores, $d = 1$, $bc = 4$.
Per tant:
$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \frac{4}{b} & 1 \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Si $a + d - 2 = 0$, $d = 2 - a$.
Resolent la primera equació en la incògnita a:
$a = 1 \pm \sqrt{4 - bc}$, $4 - bc \geq 0$
Per tant:

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1-\sqrt{4-bc} \end{pmatrix},\ \ 4-bc > 0.$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1+\sqrt{4-bc} \end{pmatrix},\ \ 4-bc > 0.$$

a)

$< M_1, I > = < I >$, $\dim < M_1, I > = 1$, $< M_4, I > = < I >$, $\dim < M_4, I > = 1$,

$\{M_2, I\}$ són L.I. , $\dim < M_2, I > = 2$

$\{M_3, I\}$ són L.I. , $\dim < M_3, I > = 2$

$\{M_5, I\}$ són L.I. , $\dim < M_5, I > = 2$

$\{M_6, I\}$ són L.I. , $\dim < M_6, I > = 2$

$\{M_7, I\}$ són L.I. , $\dim < M_7, I > = 2$

b)

Siga $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, resolem $M^2 - 2M - 3I = 0$:

$\begin{pmatrix} p^2+q^2-2p-3 & 2pq-2q \\ 2pq-2q & p^2+q^2-2p-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Igualant els elements:

$\begin{cases} p^2+q^2-p-3=0 \\ 2q(p-1)=0 \end{cases}$ Resolent el sistema: $\begin{cases} p=-1 \\ q=0 \end{cases}$, $\begin{cases} p=3 \\ q=0 \end{cases}$, $\begin{cases} p=1 \\ q=2 \end{cases}$ $\begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$.

Les solucions són:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

Siga l'expai vectorial $< M, I >$ tal que $M^2 - 2M - 3I = 0$.

Siga $P \in < M, I >$, tal que $P^2 = P$

$P = a \cdot M + b \cdot I$, $a, b \in R$

$(a \cdot M + b \cdot I)^2 = a \cdot M + b \cdot I$

$a^2 \cdot M^2 + 2ab \cdot M + b^2 \cdot I = a \cdot M + b \cdot I$

Com que $M^2 = 2M + 3I$

$a^2(2M+3I) + 2ab \cdot M + b^2 \cdot I - a \cdot M - b \cdot I = 0$

$(2a^2 + 2ab - a)M + (3 + a^2 + b^2 - b)I = 0$

Per ser $\{M, I\}$ linealment independents:

$\begin{cases} 2a^2 + 2ab - a = 0 \\ 3a^2 + b^2 - b = 0 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{-1}{4} \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$

Siga

$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Siga $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Siga $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \frac{4}{b} & 1 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{b}{4} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-b}{4} \\ \frac{-1}{b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Siga $M_6 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1-\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc > 0$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$,

$P_8 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{-1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$

Siga $M_7 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1+\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc > 0$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$,

$P_{10} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{-1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$

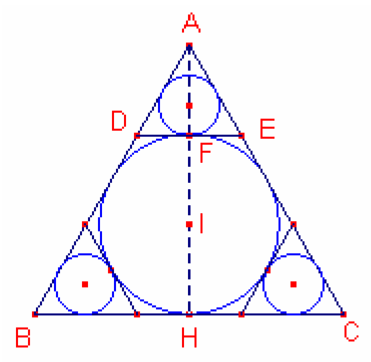
2.- En un triangle equilàter s'inscriu un cercle. A continuació s'inscriuen tres cercles tangents exteriors al primer i tangents a dos costats del triangle. A continuació s'inscriuen altres tres cercles als tres cercles anteriors i a dos costats del triangle i així successivament i indefinida.
Determineu la part o proporció de l'àrea del triangle ocupada pels cercles inscrits.
Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del triangle equilàter és: $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga I l'incentre del triangle. L'incentre del triangle equilàter coincideix amb el baricentre i divideix la mitjana en dues parts que estan en proporció 2:1. Aleshores:



$\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{IH} = \frac{1}{3}\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants, aleshores les seues altures són proporcionals. Calculem la raó de proporcionalitat:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH} - 2\cdot\overline{IH}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}.$$

Aleshores els radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són proporcionals i la raó és 3:1.

Siga $r_0 = \overline{IH} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea del cercle inscrit al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Aleshores:

El radi de la circumferència inscrita a $\overset{\Delta}{ADE}$ és: $r_1 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right) = \frac{1}{9}\pi\frac{1}{4}a^2$.

El radi de la segona iteració és: $r_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^2\pi\frac{1}{4}a^2$.

El radi de la n-èsima iteració és: $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{\sqrt{3}}{6}a$

L'àrea de les tres circumferències és $3\cdot\left(\pi\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^n\pi\frac{1}{4}a^2$.

La suma de les àrees de les circumferències de n iteracions és:

$$S_n=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{1}{9}\frac{\pi}{4}a^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2\frac{\pi}{4}a^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3\frac{\pi}{4}a^2+....+\left(\frac{1}{9}\right)^n\frac{\pi}{4}a^2\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3+....+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)\frac{\pi}{4}a^2=$$

$$=\frac{1}{12}\pi a^2+\left(\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}-1}\right)\frac{\pi}{4}a^2.$$

La suma de les infinites àrees és:

$$S=\frac{1}{12}\pi a^2+\frac{1}{8}\frac{\pi}{4}a^2=\frac{11}{96}\pi a^2.$$

La proporció de l'àrea del triangle ocupada pels cercles inscrits és:

$$\frac{\frac{11}{96}\pi a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{11\sqrt{3}\pi}{72}.$$

3.-

a) Estudieu i representeu la funció, $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

b) Calculeu la longitud d'arc de la corba anterior entre $x=2$ y $x=4$.

Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:

a)

Domini:

$$\text{Dom } f(x)=\left\{x\in R/\frac{e^x-1}{e^x+1}>0\right\}=\{x\in R/e^x>1\}=]0,+\infty[.$$

La funció es contínua i derivable en $]0,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{2e^x}{e^{2x}-1},\quad f''(x)=\frac{-2e^{3x}-2e^x}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{-2e^x(e^{2x}-1)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}.$$

Punts de tall amb l'eix d'abscisses:

$f(x)=0$ si $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1$, esta equació no té solució. Aleshores la funció no té punts de tall amb els eixos coordenats.

Monotonia i extrems locals:

Notem que $f'(x)>0$, $\forall x\in\ ]0,+\infty[$. Per tant la funció és creixent en el seu domini.

Concavitat, convexitat, punts d'inflexió:

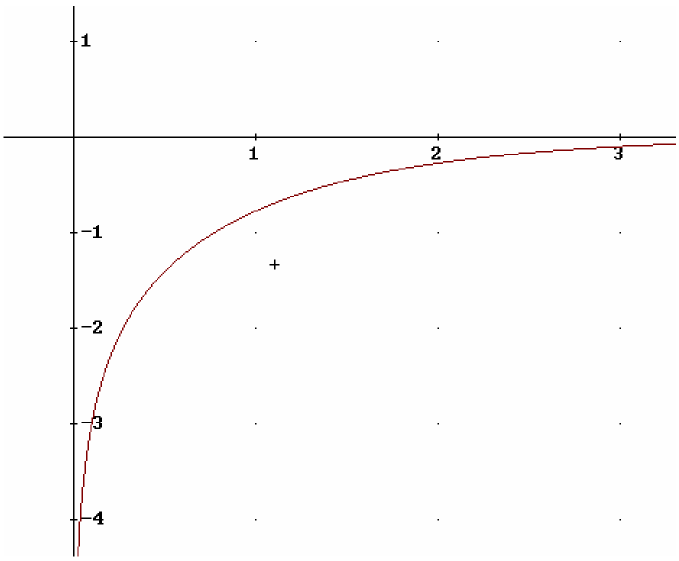
$f''(x)<0$, $\forall x\in\ ]0,+\infty[$. Per tant la funció és convexa en el seu domini.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\underset{\text{Hôpital}}{=}\ln(1)=0$$

Aleshores $y=0$ és una asímptota horitzontal quan x tendeix a $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\underset{\text{Hôpital}}{=}\ln(0)=-\infty.$$

Aleshores $x=0$ és una asímptota vertical quan x s'aproxima a 0 per la dreta.



b) La longitud d'arc és igual a:

$$\int_2^4\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_2^4\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)(e^x-1)}dx=$$

Efectuant el canvi $t=e^x$ i resolent una integral racional amb arrels reals simples:

$$\int_2^4\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\ln(e^4+1)-2.$$

4.- Determineu la probabilitat que l'equació de segon grau $x^2 + 2bx + c = 0$ amb $b, c \in [-\lambda, \lambda]$, $\lambda \in R$ tinga solucions complexes.
Calcula la probabilitat si $b, c \in R$.
Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:
L'equació té solució complexa si el discriminant és negatiu: $4b^2 - 4c < 0$.

L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(c, b) en el quadrat ABCD de costat 2λ, $A(\lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, \lambda)$, $C(-\lambda, -\lambda)$, $D(\lambda, -\lambda)$ tal que verifiquen

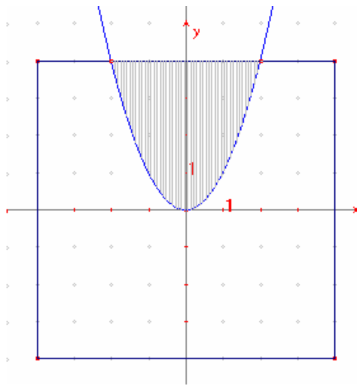
$b^2 - c < 0$

Calculem la intersecció de la paràbola $c = b^2$. I la recta $c = \lambda$

$\begin{cases} c = b^2 \\ c = \lambda \end{cases}$, Les solucions són $\begin{cases} x = -\sqrt{\lambda} \\ y = \lambda \end{cases}$, $\begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \\ y = \lambda \end{cases}$

Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 2λ.

Suposem $\lambda \geq 1$.
Els casos favorables corresponen a l'àrea del rectangle de costat λ, $2\sqrt{\lambda}$ menys l'àrea de la paràbola entre $\left[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\right]$,



L'àrea de la paràbola entre $\left[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\right]$ és:

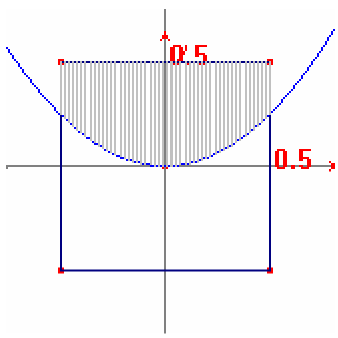
$$2\int_0^{\sqrt{\lambda}} b^2 db = 2\left(\frac{b^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}.$$

L'àrea de dos rectangle de costat, λ, $2\sqrt{\lambda}$ és $2\lambda\sqrt{\lambda}$
Els casos favorables són:

$$2\lambda\sqrt{\lambda} - \frac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}.$$

Aleshores la probabilitat és: $p = \dfrac{\frac{4}{3}\lambda\sqrt{\lambda}}{4\lambda^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$.

Suposem $\lambda < 1$.
Els casos favorables corresponen a l'àrea de la meitat del quadrat de costat 2λ, menys l'àrea de la paràbola entre $[-\lambda, \lambda]$



L'àrea de mig quadrat de costat 2λ és: $2\lambda^2$.

L'àrea de la paràbola entre $[-\lambda, \lambda]$ és: $2\int_0^{\lambda} b^2 db = 2\left(\frac{b^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\lambda} = \frac{2}{3}\lambda^3$.

Els casos favorables són: $2\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3$.

Aleshores la probabilitat és: $p = \dfrac{2\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3}{4\lambda^2} = \dfrac{3 - \lambda}{6}$.

Si $b, c \in R$ la probabilitat és: $p = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = 0$.