Oposicions Castella la Manxa 2006

1.- Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S.

2.- Proveu que $\left(27^{4}\right)^{9}-\left(25^{3}\right)^{6}$ és múltiple de 37.

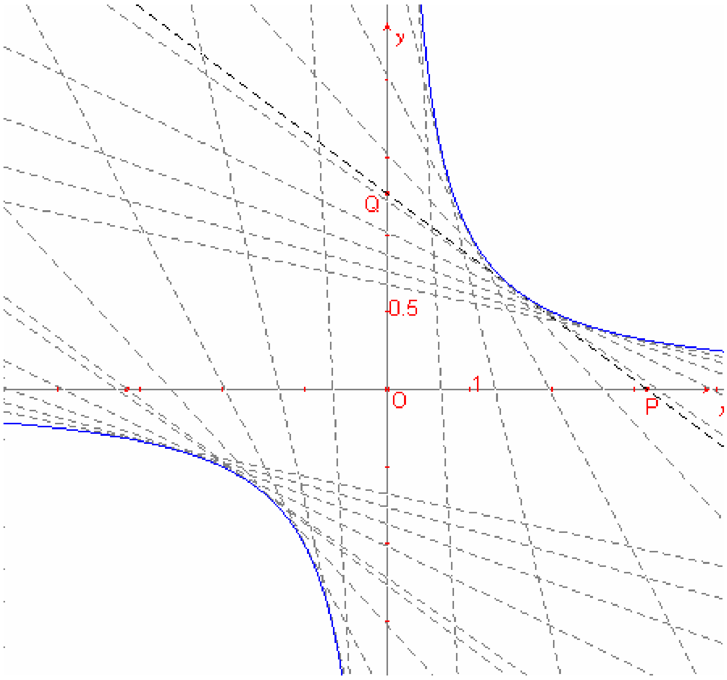
3.- Determineu la condició necessària i suficient que ha de complir la base a d'un sistema de logaritmes a fi que en aquest sistema existesca, almenys un nombre igual al seu logaritme.

4.- Un calaix conté mitjons solts blanc i negres. Si s'extrau dos mitjons a l'atzar, la probabilitat que ambdós siguen blancs és $\frac{1}{2}$. Calculeu:

a) El nombre mínim de mitjons que conté el calaix.

b) El nombre mínim de mitjons que conté la caixa si el nombre de mitjons negres és parell.

1.- Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S.
Oposicions de Castella la Manxa 2006.



Siga la recta que passa pels punts $P(a,0)$, $Q(0,b)$ una recta de l'envolupant.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és S.
Aleshores: $ab = 2S$.

Aquesta recta té equació $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y=1$$

Siga $f(x,y,a)=\frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y-1$
La corba envolupant acompleix:

$$\begin{cases} f(x,y,a)=0 \\ \frac{d}{da}f(x,y,a)=0 \end{cases}. \qquad \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{a}{2S}y-1=0 \\ -\frac{x}{a^2}+\frac{y}{2S}=0 \end{cases}$$

Aïllant a de la segona equació: $a=\sqrt{2S\frac{x}{y}}$.

Substituint en la primera equació: $\frac{x}{\sqrt{2S\frac{x}{y}}}+\frac{y\sqrt{2S\frac{x}{y}}}{2S}-1=0$

$$2\sqrt{\frac{xy}{2S}}=1.$$

Elevant al quadrat:

$$xy=\frac{S}{2}.$$

2.- Proveu que $\left(27^4\right)^9 - \left(25^3\right)^6$ és múltiple de 37.
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:
Aplicarem el teorema de Fermat: (si p és primer, $a^{p-1} \equiv 1(\text{mòd } p)$):
37 és un nombre primer:
$\left(27^4\right)^9 = 27^{36} \equiv 1(\text{mòd}37)$.
$\left(25^3\right)^6 = 5^{36} \equiv 1(\text{mòd}37)$.
$\left(27^4\right)^9 - \left(25^3\right)^6 \equiv 1 - 1(\text{mòd}37) \equiv 0(\text{mòd}37)$.
Aleshores, $\left(27^4\right)^9 - \left(25^3\right)^6$ és múltiple de 37.

3.- Determineu la condició necessària i suficient que ha de complir la base a d'un sistema de logaritmes a fi que en aquest sistema existesca, almenys un nombre igual al seu logaritme.
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:
Per a ser una base de logaritmes $a > 0$, $a \neq 1$.
Considerem la funció:

$$f(x) = \log_a(x) - x = \frac{\ln x}{\ln a} - x.$$

El domini d'aquest funció $f(x)$ és $]0,+\infty[$. És contínua i derivable en el seu domini:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} - 1. \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2 \cdot \ln a}.$$

Suposem $0 < a < 1$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty. \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Notem que en el seu domini $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} - 1 < 0$. La funció és decreixent.

Aleshores existeix un únic punt x tal que $f(x) = 0$, és a dir:

$$\log_a(x) = x.$$

Suposem $a > 1$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty. \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x \cdot \ln a} = 1, \quad x = \frac{1}{\ln a} \in \left]0,+\infty\right[. \quad f''\left(\frac{1}{\ln a}\right) = -\ln a < 0$$

Aleshores, $x = \dfrac{1}{\ln a}$ és el màxim de la funció.

La funció és creixent en $\left]0, \dfrac{1}{\ln a}\right[$, i és decreixent en $\left]\dfrac{1}{\ln a}, +\infty\right[$.

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{-\ln(\ln a) - 1}{\ln a}.$$

$\ln(\ln a) = -1$ si i només si $a = e^{e^{-1}}$

Si $a = e^{e^{-1}}$ la funció $f(x)$ té un únic punt $x = e$ tal que $f(x) = 0$.

Si $a > e^{e^{-1}}$, aleshores $f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) = \dfrac{-\ln(\ln a) - 1}{\ln a} < 0$. Aleshores la funció $f(x)$ és definida negativa, aleshores no té punts de tall.

Si $1 < a < e^{e^{-1}}$, aleshores $f\left(\dfrac{1}{\ln a}\right) = \dfrac{-\ln(\ln a) - 1}{\ln a} > 0$. Aleshores la funció $f(x)$ té 2 punts de tall. Aleshores tindria dues solucions.

4.- Un calaix conté mitjons solts blanc i negres. Si s'extrau dos mitjons a l'atzar, la probabilitat que ambdós siguen blancs és $\frac{1}{2}$. Calculeu:

a) El nombre mínim de mitjons que conté el calaix.
b) El nombre mínim de mitjons que conté la caixa si el nombre de mitjons negres és parell.
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:
Siga n el nombre de mitjons blancs.
Siga m el nombre de mitjons negres.
Siga S el succés treure dos mitjons blancs.
a)

$$P(S)=\frac{1}{2}.$$

$$P(S)=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+m}{2}}=\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+m)!}{2!(n+m-2)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}.$$

$$\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}=\frac{1}{2}.$$

$$n^2-(2m+1)n+m-m^2=0.$$

Resolent l'equació en la incògnita n:

$$n=\frac{2m+1\pm\sqrt{8m^2+1}}{2}$$

Si $m=1$, $n=3$
Aleshores, $n+m=4$ el nombre mínim de mitjons és 4, 1 de negre i 3 de blancs.

b)
Suposem $m=2k$.
Anàlogament:

$$n=\frac{4k+1\pm\sqrt{32k^2+1}}{2}$$

Per a ser n natural $32k^2+1$ ha de ser un quadrat perfecte imparell.
Per tant, $32k^2+1=(2s+1)^2$

$$8k^2=s(s+1)$$

Aleshores, $k^2=9$ o $k^2=7$ (aquesta darrera equació no té solució entera)
Per tant, $k=3$.

$$m=2\cdot 3=6.$$

$$n=\frac{13+\sqrt{289}}{2}=15.$$

Aleshores, $n+m=21$ el nombre mínim de mitjons és 21, 6 de negre i 15 de blancs.