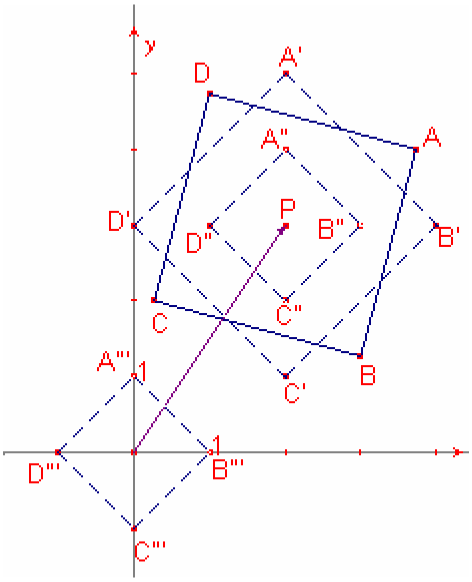
1.- Determineu els vèrtexs d’un quadrat sabent que:
a) El seu centre està en (2, 3)
b) Si es trasllada el centre a l’origen, es gira un angle de 60º en sentit positiu i es redueixen els costats a la meitat, els vèrtexs del nou quadrat són els afixos de les arrels d’un polinomi de grau quatre amb coeficients reals, essent una de les arrels $x=1$.
Oposicions Extremadura 2006.



Solució:
Si un quadrat A’’’B’’’C’’’D’’’ de centre (0, 0) té un vèrtex en B’’’(1,0), els altres vèrtexs són:
$A'''(0,1),\ D'''(-1,0),\ C'''(0,-1)$.

El quadrat A”B”C”D” traslladat de l’anterior en la direcció $v=(2,3)$ els seus vèrtexs són:
$A''(2,4),\ B''(3,3),\ C''(2,2),\ D''(1,3)$.

El quadrat A’B’C’D’ de centre P(2,3) augmentant els costats de l’anterior el doble (homotècia de centre (2,3) i raó 2) té vèrtexs:
$A'(2,5),\ B'(4,3),\ C'(2,1),\ D'(0,3)$.

Determinem les coordenades del quadrat ABCD girat de l’anterior $-60º$ amb centre P.

Siga z_1 l’afix del punt A, siga z l’afix del punt P.
$\overline{PA'}=2$.
$z_1-z=2_{30º}$
Aleshores, $A\left(2+\sqrt{3},4\right)$.

Siga z_2 l’afix del punt B, siga z l’afix del punt P.
$z_2-z=2_{30º-90º}$
Aleshores, $B\left(3,3-\sqrt{3}\right)$.

Siga z_3 l’afix del punt C, siga z l’afix del punt P.
$z_3-z=2_{30º-180º}$
Aleshores, $A\left(2-\sqrt{3},2\right)$.

Siga z_4 l’afix del punt D, siga z l’afix del punt P.
$z_4-z=2_{30º-270º}$
Aleshores, $B\left(1,3+\sqrt{3}\right)$.

2.-
a) Determineu el lloc geomètric dels punts del plànol el producte de distàncies dels quals a dos punts fixos F i F' situats entre si a una distància 2a, és constant i igual a a^2.
Identifiqueu la corba.
b) Calculeu l'àrea del recinte afitat per la corba anterior.
Oposicions Extremadura 2006.

Solució:
Siga $F(a,0)$, $F'(-a,0)$.
Siga $P(x,y)$ un punt del lloc geomètric.

$d(P,F)\cdot d(P,F') = a^2$.

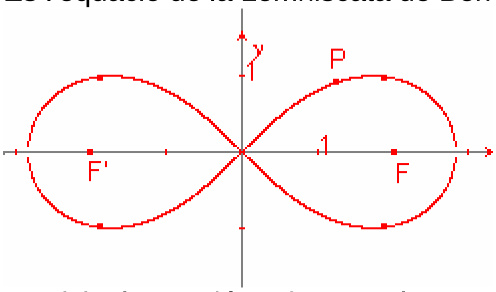
$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2$.

Elevant al quadrat:

$\left((x-a)^2+y^2\right)\left((x-a)^2+y^2\right) = a^4$.

$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$

És l'equació de la Lemniscata de Bernoulli.



Escrivim l'equació en forma polar:
Efectuem el canvi $x = \rho\cdot\cos\theta$, $y = \rho\cdot\sin\theta$.

$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\theta = 0$.

$\rho^2 = 2a^2\cdot\cos 2\theta$.

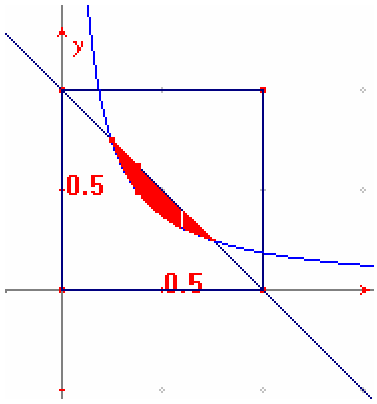
L'àrea del recinte afitat per la corba és:

$$4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\, d\theta\right) = 4a^2\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

3.- S'escullen dos punts x, y, en l'interval $[0,1]$. Determineu la probabilitat que és verifique simultàniament que la seua suma siga menor que 1 i que el seu producte siga major que $\frac{3}{16}$.
Oposicions Extemadura 2006.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 1 tal que verifiquen

$$\begin{cases} x+y<1 \\ xy>\frac{3}{16} \end{cases}.$$



Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la recta $x+y=1$ i la hipèrbola $xy=\frac{3}{16}$.
Calculem l'àrea.

La intersecció de la recta i la hipèrbola ve donada per la solució del sistema:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{3}{16} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{4} \\ x=\frac{3}{4},\ y=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

L'àrea factible és:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(1-x-\frac{3}{16x}\right)dx = \frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}.$$

La probabilitat p de l'experiment és:

$$p=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}}{1^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}.$$

4.- Siguen a i b dos nombres enters.
Demostreu que l'equació $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$ no admet més d'una solució entera.
Oposicions Extremadura 2006.

Solució:
$(x-a)(x-b)(x-3)=-1$.

El producte de dos enters és -1 si un és 1 i l'altre menys 1.
Si les tres solucions foren enteres aleshores cadascun dels tres factors és:
$\begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=-1, \\ x-3=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-a=1 \\ x-b=1\ , \\ x-3=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-a=1 \\ x-b=-1, \\ x-3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=1\ . \\ x-3=1 \end{cases}$

Si $\begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=-1, \\ x-3=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ x=2 \end{cases}$. Aleshores l'equació seria:
$(x-3)(x-3)(x-3)+1=0$
Té una solució entera $x=2$ i dues complexes.

Si $\begin{cases} x-a=1 \\ x-b=1\ , \\ x-3=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ x=2 \end{cases}$. Aleshores l'equació seria:
$(x-1)(x-1)(x-3)+1=0$.
$x^3-5x^2+7x-2=0$.
$(x-2)(x^2-3x+1)=0$. L'única solució entera és $x=2$.

Si $\begin{cases} x-a=1 \\ x-b=-1, \\ x-3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ x=4 \end{cases}$. Aleshores l'equació seria:
$(x-3)(x-5)(x-3)+1=0$.
$x^3-11x^2+39x-44=0$.
$(x-4)(x^2-7x+11)=0$. L'única solució entera és $x=4$.

Anàlogament si $\begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=1 \\ x-3=1 \end{cases}$ l'única solució entera seria $x=4$.

Si equació de tercer grau amb coeficients enters té dos solucions enteres la tercera també és entera.
$x^3+cx^2+dx+e=0$ $c,e,f\in Z$.
Si les arrels són $m,n\in Z$, $q\in Q$
Per les fórmules de Cardano Vieta:
$-(m+n+q)=c$
Aleshores, $q\in Z$.

5.- Siga $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$, $n \in N$.
a) Demostreu que $\forall n \in N$, a_{n+3} és congruent a_n mòdul 7.
b) Determineu els valors de n que verifiquen que a_n és divisible per 7. Apliqueu el resultat obtingut per esbrinar si els nombres que en sistema de numeració de base 2 s'escriuen $1110_{(2}$, $1010100_{(2}$, i $1001001000_{(2}$ són divisibles per 7.
Oposicions Extremadura 2006.

Solució:
a)

$$a_{n+3} - a_n = 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9} - \left(2^n + 2^{2n} + 2^{3n}\right) =$$
$$= 7 \cdot 2^n + 63 \cdot 2^{2n} + 511 \cdot 2^{3n} = 7\left(2^n + 9 \cdot 2^{2n} + 73 \cdot 2^{3n}\right) \equiv 0(\text{mòd}7).$$

Aleshores, a_{n+3} és congruent a_n mòdul 7.

b)
Aplicarem el teorema de Fermat: (si p és primer, $a^{p-1} \equiv 1(\text{mòd p})$):

Siga $n = 6k$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 + \left(2^{2k}\right)^6 + \left(2^{3k}\right)^6 \equiv 1+1+1(\text{mòd}7) \equiv 3(\text{mòd}7).$$

Siga $n = 6k+1$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 2 + \left(2^{2k}\right)^6 2^2 + \left(2^{3k}\right)^6 2^3 \equiv 2+4+8(\text{mòd}7) \equiv 0(\text{mòd}7).$$

Siga $n = 6k+2$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 2^2 + \left(2^{2k}\right)^6 2^4 + \left(2^{3k}\right)^6 2^6 \equiv 4+16+1(\text{mòd}7) \equiv 0(\text{mòd}7).$$

Siga $n = 6k+3$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 2^3 + \left(2^{2k}\right)^6 2^6 + \left(2^{3k}\right)^6 2^9 \equiv 8+1+8(\text{mòd}7) \equiv 3(\text{mòd}7).$$

Siga $n = 6k+4$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 2^4 + \left(2^{2k}\right)^6 2^8 + \left(2^{3k}\right)^6 2^{12} \equiv 16+4+1(\text{mòd}7) \equiv 0(\text{mòd}7).$$

Siga $n = 6k+5$:
$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = \left(2^k\right)^6 2^5 + \left(2^{2k}\right)^6 2^{10} + \left(2^{3k}\right)^6 2^{15} \equiv 32+16+8(\text{mòd}7) \equiv 0(\text{mòd}7).$$

Aleshores a_n és divisible per 7 quan $n = 6k+1$, $n = 6k+2$, $n = 6k+4$, $n = 6k+5$.

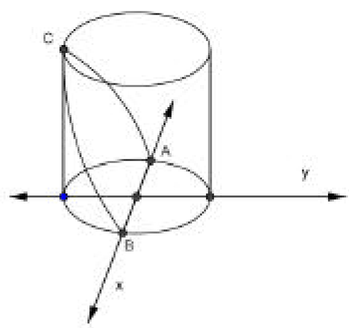
$1110_{(2} = 2^1 + 2^2 + 2^3$ en aquest cas $n = 1$, aleshores $1110_{(2}$ és múltiple de 7.

$1010100_{(2} = 2^2 + 2^4 + 2^6$, en aquest cas $n = 2$, aleshores $1010100_{(2}$ és múltiple de 7.

$1001001000_{(2} = 2^3 + 2^6 + 2^9$, en aquest cas $n = 3$, aleshores $1001001000_{(2}$ no és múltiple de 7.

6.-Un got cilíndric de radi a i altura h està inclinat de forma que l’aigua de l’interior bisecta la base i toca la vora superior del got. Determineu el volum de l’aigua continguda en el got.
Oposicions d’Extremadura.

Solució (Dani de la Paz):
Considerem el cilindre $x^2+y^2=a^2$ de radi a i altura h.
L’aigua bisecta a la base en els punts $A(-a,0,0)$, $B(a,0,0)$ i la vora del got és el punt $C(0,-a,h)$.
Determinem el plànol Π que passa pels punts A, B, C que talla el cilindre formant mitja el·lipse.
$\vec{CA}=(-a,a,-h)$, $\vec{CB}=(a,a,-h)$.
L’equació del plànol és:



$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y+a & z-h \\ -a & a & -h \\ a & a & -h \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Pi \equiv (x-0)(-ah+ah)-(y+a)(ah+ah)+(z-h)(-a^2-a^2)=0.$$

$$\Pi \equiv az+hy=0.$$

El volum V del cilindroide limitat en la seua part superior per la superfície $z=f(x,y)$; en la part inferior pel plànol $z=0$ i lateralment per la superfície cilíndrica recta que talla $z=0$ en el recinte R és:

$$V=\iint_R f(x,y)dy\cdot dx.$$

La superfície R és mitja circumferència de radi a:
$-a\le y\le 0$, $x^2+y^2=a^2$

$$\int_{-a}^{0}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\left(\frac{-h}{a}y\right)dx\cdot dy=\int_{-a}^{0}\left(\frac{-h}{a}yx\right)\Bigg]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy=\frac{h}{a}\int_{-a}^{0}-2y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=$$

$$=\frac{h}{a}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\left(a^2-y^2\right)^3}\right)\Bigg]_{-a}^{0}=\frac{2}{3}ha^2.$$