Oposicions de València 2005.

1.- Una línia d'autobusos té longitud L. La probabilitat que un passatger puge a l'autobús en les proximitats del punt x és proporcional a $x(x-L)^2$ i la probabilitat que un passatger que va pujar en el punt x, baixe en el punt y és proporcional a $(y-x)^h$ $h>0$.

Calculeu:

a) Les constants de proporcionalitat d'ambdues probabilitats.

b) La probabilitat que un passatger no puge a l'autobús abans del punt z del recorregut de l'autobús.

c) La probabilitat que un passatger que va pujar en el punt x baixe després de z (punt del recorregut de l'autobús).

2.- Siga $\alpha=\frac{2004}{2005}$, demostreu que per a qualsevol enter positiu n se verifica la següent desigualtat:

$$\frac{1}{2005}\left[\sqrt{1-(1-\alpha)^2}+\alpha\sqrt{1-\left(1-\alpha^2\right)^2}+\ldots+\alpha^{n-1}\sqrt{1-\left(1-\alpha^n\right)^2}\right]<\frac{\pi}{4}.$$

3.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=90^o$, siga $\overline{AD}$ l'altura, siga $\overline{BF}$ la bisectriu i E la intersecció de $\overline{AD}$, $\overline{BF}$. Proveu que:

a) El triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.

b) $\overline{DC}>2\cdot\overline{EF}$.

4.- Donats els nombres $u=1+\sqrt{2}$, $v=1-\sqrt{2}$, construïm les successions $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tals que verifiquen per a $n=1,2,3,....$ les relacions:

$u^n=a_n+b_n\sqrt{2}$. $v^n=a_n-b_n\sqrt{2}$.

1.-

a) Demostreu que les successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són creixents.

b) Demostreu que $\frac{a_n}{b_n}$ és una fracció irreductible.

c) Determineu el límit: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

2.-

a) Calculeu les següents sumes:

$S_n=u+u^2+u^3+....+u^n$

$S'_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n$

$S''_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n$

b) Determineu el límit: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S'_n}{S''_n}$

3.-

a) Demostreu que existeixen dos nombres fixos α i β tals que:

$a_{n+2}=\alpha\cdot a_{n+1}+\beta\cdot a_n$

$b_{n+2}=\alpha\cdot b_{n+1}+\beta\cdot b_n$

i determineu el nombres α i β.

b) Calculeu les arrels de l'equació $x^2=\alpha x+\beta$. Expliqueu el resultat obtingut.

1.- Una línia d'autobusos té longitud L. La probabilitat que un passatger puge a l'autobús en les proximitats del punt x és proporcional a $x(x-L)^2$ i la probabilitat que un passatger que va pujar en el punt x, baixe en el punt y és proporcional a $(y-x)^h$ $h>0$.
Calculeu:
a) Les constants de proporcionalitat d'ambdues probabilitats.
b) La probabilitat que un passatger no puge a l'autobús abans del punt z del recorregut de l'autobús.
c) La probabilitat que un passatger que va pujar en el punt x baixe després de z (punt del recorregut de l'autobús).

Solució:
a)
Siga X la variable que ens dóna el punt on puja un passatger.
Siga Y la variable que ens dóna el punt on baixa un passatger.

La probabilitat que un passatger baixe en $Y=z$ depén del punt x on ha pujat.

La funció de densitat de la variable X és $f(x)=kx(x-L)^2$, $0\le x\le L$.
Per a ser una funció de densitat ha d'acomplir $\int_0^L f(x)dx=1$.

$$1=\int_0^L kx(x-L)^2dx=k\int_0^L\left(x^3-2Lx^2+L^2x\right)dx=k\left.\left(\frac{x^4}{4}-2L\frac{x^3}{3}+L^2\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^L=\frac{1}{12}kL^4.$$

Per tant, $k=\frac{12}{L^4}$. Per tant la funció de densitat és:

$f(x)=\frac{12}{L^4}x(x-L)^2$, $0\le x\le L$, $f(x)=0$ per a la resta de valors.

La funció de densitat de la variable Y és:
$g(y)=m(y-x)^h$, $h>0$, $0\le x\le y\le L$.
Per a ser una funció de densitat ha d'acomplir $\int_x^L g(y)dy=1$.

$$1=\int_x^L m(y-x)^h dy=m\left.\left(\frac{(y-x)^{h+1}}{h+1}\right)\right]_x^L=m\frac{(L-x)^{h+1}}{h+1}.$$

Per tant, $m=\frac{h+1}{(L-x)^{h+1}}$.
Per tant la funció de densitat de la variable Y és:
$g(y)=\frac{h+1}{(L-x)^{h+1}}(y-x)^h$, $h>0$, $0\le x\le y\le L$, $g(y)=0$ en la resta de valors.

b)
La probabilitat buscada és:

$$P(z\le X\le L)=\int_z^L\frac{12}{L^4}x(x-L)^2dx=\frac{1}{L^4}\left.\left(3x^4-8Lx^3+6L^2x^2\right)\right]_z^L=$$

$$=\frac{1}{L^4}\left(L^4-\left(3z^4-8Lz^3+6L^2z^2\right)\right).$$

c)

La probabilitat buscada és:

$$P\left(z \le Y \le L \mid X = x\right) = \int_z^L \frac{h+1}{(L-x)^{h+1}}(y-x)^h dy =$$

$$= \frac{h+1}{(L-x)^{h+1}}\left(\frac{(y-x)^{h+1}}{h+1}\right)\Bigg]_z^L = \frac{h+1}{(L-x)^{h+1}}\left(\frac{(L-x)^{h+1}}{h+1} - \frac{(z-x)^{h+1}}{h+1}\right) =$$

$$= \frac{(L-x)^{h+1} - (z-x)^{h+1}}{(L-x)^{h+1}} = 1 - \left(\frac{z-x}{L-x}\right)^{h+1}.$$

2.- Siga $\alpha=\frac{2004}{2005}$, demostreu que per a qualsevol enter positiu n se verifica la següent desigualtat:

$$\frac{1}{2005}\left[\sqrt{1-(1-\alpha)^2}+\alpha\sqrt{1-\left(1-\alpha^2\right)^2}+\ldots+\alpha^{n-1}\sqrt{1-\left(1-\alpha^n\right)^2}\right]<\frac{\pi}{4}.$$

Solució:
Per a demostrar que la desigualtat anterior es verifica per a qualsevol enter positiu n és suficient provar que la suma dels infinits sumands és menor que $\frac{\pi}{4}$, és a dir,

$$\frac{1}{2005}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{k-1}\sqrt{\left(1-\left(1-\alpha^k\right)^2\right)}<\frac{\pi}{4}.$$

Vegem primer que els sumands existeixen provant que $1-\left(1-\alpha^k\right)^2>0$

$\alpha=\frac{2004}{2005}<1.$

$1-\left(1-\alpha^k\right)^2=(1+1-\alpha^k)\alpha^k=(2-\alpha^k)\alpha^k>0$.

Considerem la progressió geomètrica $\left\{\frac{\alpha^{n-1}}{2005}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Calculem la suma dels infinits termes:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{2005}=\frac{\frac{1}{2005}}{1-\alpha}=\frac{\frac{1}{2005}}{1-\frac{2004}{2005}}=1$$

Per tant, podem obtenir una partició de l'interval $[0,1]$ on cada segment tinga la amplitud el terme corresponent a la suma de la progressió geomètrica anterior. Els elements a_n de la partició són de la forma:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{k-1}}{2005}=\frac{\frac{1}{2005}-\frac{\alpha^{n-1}}{2005}\alpha}{1-\alpha}=\frac{\frac{1-\alpha^n}{2005}}{1-\frac{2004}{2005}}=1-\alpha^n.$$

Considerem la funció $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ en l'interval $[0,1]$.
La funció és un arc de circumferència de centre l'origen i radi la unitat, que es troba en el primer quadrant.

Calculem el valor de la funció en cada extrem de la partició a_n

$$f(a_n)=\sqrt{1-(1-\alpha^n)^2}$$

Considerem el rectangle d'altura $f(a_n)$ i base $\frac{\alpha^{n-1}}{2005}$

La seua àrea és:

$$A_n=f(a_n)\frac{\alpha^{n-1}}{2005}=\sqrt{1-\left(1-\alpha^n\right)^2}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{2005}.$$

Deduïm que $\frac{1}{2005}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{k-1}\sqrt{\left(1-\left(1-\alpha^{k}\right)^{2}\right)}$ és la suma de les àrees de tots els rectangles disjunts i inscrits en el primer quadrant de la circumferència $x^2+y^2=1$.

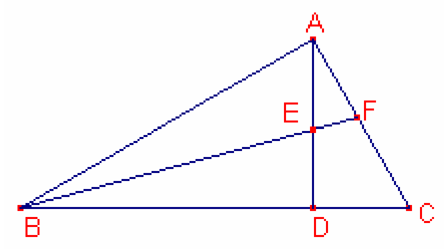
Com l'àrea del sector circular és $\frac{\pi}{4}$ s'obté la desigualtat demanada.

$$\frac{1}{2005}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{k-1}\sqrt{\left(1-\left(1-\alpha^{k}\right)^{2}\right)}<\frac{\pi}{4}.$$

3.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, siga $\overline{AD}$ l'altura, siga $\overline{BF}$ la bisectriu i E la intersecció de $\overline{AD}$, $\overline{BF}$. Proveu que:

c) El triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.

d) $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.



Solució:

a)

$\angle EBD = \frac{B}{2}$, $\angle BED = 90º - \frac{B}{2}$.

$\angle AEF = \angle BED = 90º - \frac{B}{2}$ (angles oposats pel vèrtex).

$\angle DAC = B$. $\angle AFE = 180º - \left(B + 90º - \frac{B}{2}\right) = 90º - \frac{B}{2}$.

Aleshores, $\angle AFE = \angle AEF$, per tant, $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{AE}$.

b)

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{CD} = b \cdot \sin B = \frac{b^2}{a}$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{\overline{AF}}{c} = \frac{b - \overline{AF}}{a}$, aleshores, $\overline{AF} = \frac{bc}{a+c}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AE} \cdot \cos B$.

$\overline{EF}^2 = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} - 2\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}\frac{c}{a}$. $\overline{EF}^2 = \frac{2b^2c^2}{(a+c)^2}\left(\frac{a-c}{a}\right)$.

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{\frac{2b^2c^2}{(a+c)^2}\left(\frac{a-c}{a}\right)}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{2c^2(a-c)a}{b^2(a+c)} = \frac{2c^2(a-c)a}{(a^2-c^2)(a+c)} = \frac{2ac^2}{(a+c)^3}.$$

Vegem que $\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} < \frac{1}{4}$.

Siga la funció, $f(x) = \frac{2ax^2}{(a+x)^3}$ tal que $a > 0$, $x \in [0, a]$.

Vegem que la funció $f(x)$ és creixent en aquest interval.

$f'(x) = \frac{2ax(-x+2a)}{(a+x)^4}$, $f'(x) > 0$ quan $x \in \left]0, a\right[$.

El màxim s'assoleix quan $x = a$.

$f(x) < f(a) = \frac{2a^3}{(2a)^3} = \frac{1}{4}$.

Aleshores, $\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} < \frac{1}{4}$. Per tant, $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.

4.- Donats els nombres $u=1+\sqrt{2}$, $v=1-\sqrt{2}$, construïm les successions $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tals que verifiquen per a $n=1,2,3,....$ les relacions:

$u^n=a_n+b_n\sqrt{2} \quad v^n=a_n-b_n\sqrt{2}$.

1.-

a) Demostreu que les successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són creixents.

b) Demostreu que $\dfrac{a_n}{b_n}$ és una fracció irreductible.

c) Determineu el límit: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$

2.-

a) Calculeu les següents sumes:

$S_n=u+u^2+u^3+....+u^n$

$S'_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n$

$S''_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n$

b) Determineu el límit: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S'_n}{S''_n}$.

3.-

a) Demostreu que existeixen dos nombres fixos α i β tals que:

$a_{n+2}=\alpha\cdot a_{n+1}+\beta\cdot a_n$

$b_{n+2}=\alpha\cdot b_{n+1}+\beta\cdot b_n$

i determineu el nombres α i β.

b) Calculeu les arrels de l'equació $x^2=\alpha x+\beta$. Expliqueu el resultat obtingut.

Solució:

1a)

$$\begin{cases} u^n=a_n+b_n\sqrt{2} \\ v^n=a_n-b_n\sqrt{2} \end{cases}$$ resolent el sistema en les incògnites a_n, b_n

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{u^n+v^n}{2} \\ b_n=\dfrac{u^n-v^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$u^n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\sqrt{2}+\binom{n}{1}\left(\sqrt{2}\right)^2+.....+\binom{n}{n}\left(\sqrt{2}\right)^n$$

$$v^n=\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\sqrt{2}+\binom{n}{1}\left(\sqrt{2}\right)^2+.....+(-1)^n\binom{n}{n}\left(\sqrt{2}\right)^n$$

Aleshores les successions $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

$$a_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}2+\binom{n}{4}2^2+.....+R_n \text{ on } R_n=\begin{cases}\binom{n}{n}2^{\frac{n}{2}} & \text{si n és parell} \\ \binom{n}{n-1}2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si n és imparell}\end{cases}$$

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}2 + \binom{n}{5}2^2 + \ldots.. + S_n \text{ on } S_n = \begin{cases} \binom{n}{n-1}2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si n és parell} \\ \binom{n}{n}2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si n és imparell} \end{cases}$$

Notem que $a_n > 0$, $b_n > 0$ i enters.

$$u^{n+1} = u^n(1+\sqrt{2}) = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

$$u^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

Per tant per a tot $n = 1,2,3,\ldots.$:

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n$$

$a_{n+1} - a_n = 2b_n > 0$, per tant la successió $\{a_n\}$ és creixent.
$b_{b+1} - b_n = a_n > 0$, tant la successió $\{b_n\}$ és creixent.

1b)
Vegem que a_n, b_n són primers entre si.

$$u^n \cdot v^n = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = a_n{}^2 - 2b_n{}^2$$

$$u^n \cdot v^n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n.$$

Aleshores $a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = (-1)^n$

Provem que a_n, b_n són primers entre si per reducció a l'absurd.
Suposem que $a_n = p \cdot a'_n$, $b_n = p \cdot b'_n$.

$$(-1)^n = a_n{}^2 - 2b_n{}^2 = p^2(a'_n{}^2 - b'_n{}^2)$$

Aleshores p divideix a 1.
Per tant, són primers entre si.

1c)

$\lim\limits_{n\to\infty} v^n = 0$ ja que $v = 1-\sqrt{2}$, $-1 < v < 0$.

$$0 = \lim_{n\to\infty} v^n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)$$

Com $b_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}.$$

2a)
Aplicant la fórmula de la suma dels n termes d'una progressió geomètrica de raó u tenim:

$$S_n = u + u^2 + u^3 + \ldots. + u^n = \frac{u - u^n u}{1-u} = \frac{u(u^n - 1)}{u-1} = \frac{u(u^n - 1)}{\sqrt{2}}$$

Anàlogament $v + v^2 + v^3 + \ldots. + v^n = \dfrac{v - v^n v}{1-v} = \dfrac{v(v^n - v)}{v-1} = \dfrac{u(u^n - 1)}{-\sqrt{2}}$.

2b)

$$S'_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k + v^k}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u(u^n - 1)}{\sqrt{2}} - \frac{v(v^n - 1)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$S''_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k - v^k}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{u(u^n - 1)}{\sqrt{2}} + \frac{v(v^n - 1)}{\sqrt{2}}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u^n = +\infty$ ja que $u = 1 + \sqrt{2} > 1$. $\lim\limits_{n\to\infty} v^n = 0$ ja que $v = 1 - \sqrt{2}$, $-1 < v < 0$.

$$\frac{S'_n}{S''_n} = \sqrt{2}\,\frac{u^{n+1} - u - v^{n+1} + v}{u^{n+1} - u + v^{n+1} - v} = \sqrt{2}\,\frac{u^{n+1} - v^{n+1} - 2\sqrt{2}}{u^{n+1} + v^{n+1} - 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{S''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\,\frac{u^{n+1} - v^{n+1} - 2\sqrt{2}}{u^{n+1} + v^{n+1} - 2}\right) = \sqrt{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^{n+1} - \frac{2\sqrt{2}}{u^{n+1}}}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^{n+1} - \frac{2}{u^{n+1}}} = \sqrt{2}\,\frac{1 - 0 - 0}{1 + 0 - 0} = \sqrt{2}.$$

3a)

De l'apartat 1a)

$a_{n+1} = a_n + 2b_n$

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1}$

Restant les dues expressions:

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - a_n + 2a_n$

Per tant:

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

$b_{n+1} = a_n + b_n$

$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1}$

Restant les dues expressions:

$b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n + 2(a_{n+1} - a_n) = b_{n+1} - b_n + b_n$

Per tant:

$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$.

Per tant existeixen $\alpha = 2$, $\beta = 1$ tal que $a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_n$, $b_{n+2} = \alpha \cdot b_{n+1} + \beta \cdot b_n$.

3b)

Les successions anteriors són recurrents i el polinomi característic és en tots dos casos $x^2 = 2x - 1$, les solucions de l'equació són $x = 1 \pm \sqrt{2}$

És a dir, son u i v.