

1.- Demostreu que la relació $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ es verifica si i només si dos d'aquests nombres són oposats.

Solució:

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(bc + ac + ab)(a + b + c) = abc$$

$$bc(a + b + c) + a(b + c)(a + b + c) = abc$$

$$bc(b + c) + a(b + c)(a + b + c) = 0$$

$$(b + c)(bc + a(a + b + c)) = 0$$

$$(b + c)(bc + a^2 + ab + ac) = 0$$

$$(b + c)(b(a + c) + a(a + c)) = 0$$

$$(b + c)(a + c)(a + b) = 0.$$

$$b + c = 0 \quad \text{o} \quad a + c = 0 \quad \text{o} \quad a + b = 0.$$

És a dir la igualtat es verifica si dos d'aquests nombres són oposats.

2.- Calculeu la suma $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n$.

Solució:

$$\text{Siga } S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n$$

$$\text{Si } x = 0, \text{ aleshores, } S = 1$$

$$\text{Suposem } x = 1$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)$$

La suma d'una progressió aritmètica de diferència 1, primer terme 1, i darrer terme $n+1$.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{1 + (n+1)}{2} (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Suposem que $x \neq 0,1$

$$x \cdot S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n + (n+1)x^{n+1}.$$

$$S - xS = 1 + x + x^2 + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

$$(1-x)S = (1 + x + x^2 + \dots + x^n) - (n+1)x^{n+1}.$$

$1 + x + x^2 + \dots + x^n$ és la suma d'una progressió geomètrica de raó x :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$$(1-x)S = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - (n+1)x^{n+1}. \text{ Aleshores,}$$

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}.$$

3.- Demostreu que si $a, b, c > 0$ formen un progressió aritmètica (en aquest ordre)

aleshores, $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ formen una progressió aritmètica.

Solució:

Suposem que a, b, c formen una progressió aritmètica de diferència d ,

$a, b = a + d, c = a + 2d$.

Calculem les diferències de $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a+2d} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+d} + \sqrt{a+2d}} =$$

$$\frac{\sqrt{a+2d} - \sqrt{a}}{2d} - \frac{\sqrt{a+2d} - \sqrt{a+d}}{d} = \frac{-\sqrt{a} + 2\sqrt{a+d} - \sqrt{a+2d}}{2d}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+d}} - \frac{1}{\sqrt{a+2d} + \sqrt{a}} =$$

$$\frac{\sqrt{a+d} - \sqrt{a}}{2d} - \frac{\sqrt{a+2d} - \sqrt{a}}{d} = \frac{-\sqrt{a} + 2\sqrt{a+d} - \sqrt{a+2d}}{2d}.$$

Per tant, $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ formen una progressió aritmètica de diferència,

$$\frac{-\sqrt{a} + 2\sqrt{a+d} - \sqrt{a+2d}}{2d}.$$

4.-

a) Si a, b són dos nombres reals tals que $ab > 0$ aleshores, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geq 2$ si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

c) Si a, b, c són nombres reals positius demostreu la desigualtat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Solució:

a)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

La igualtat es dóna quan $a = b$.

b)

Aplicant l'apartat a) per $a = \sin \alpha$, $b = \cos \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$ab = \sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ ja que si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ aleshores, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq 2.$$

La igualtat es dóna quan $a = b$, $\sin \alpha = \cos \alpha$, és a dir, quan $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

c)

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} =$$

$$= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

La igualtat és dóna quan $a = b = c$.

5.- Si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Calculeu $\alpha + 2\beta$.

Solució:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}, \quad 0^\circ < \alpha < 45^\circ.$$

$$\text{Si } \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad 0^\circ < \beta < 45^\circ, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}.$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{3}{4}, \quad 0 < 2\beta < 90^\circ \text{ aleshores, } 0^\circ < 2\beta < 45^\circ.$$

Calculem $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1, \quad 0^\circ < \alpha + 2\beta < 90^\circ.$$

Aleshores, $\alpha + 2\beta = 45^\circ$.

6.-

a) Si $a \geq 0, b \geq 0$, aleshores, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (la mitjana aritmètica és major que la mitjana geomètrica). aquesta desigualtat també s'anomena desigualtat de Cauchy.

b) Siga $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ Determineu el nombre més gran entre $\ln^2(n)$, $\ln(n-1) \cdot \ln(n+1)$.

Solució:

a)

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

El signe de la igualtat s'assoleix quan $a = b$.

b)

Si $n \geq 3$ $\ln(n-1) > 0$, $\ln(n+1) > 0$. Com que la mitjana aritmètica entre dos nombres positius és major que la mitjana geomètrica:

$$\sqrt{\ln(n-1) \cdot \ln(n+1)} < \frac{\ln(n-1) + \ln(n+1)}{2} = \frac{\ln(n^2 - 1)}{2} < \frac{\ln(n^2)}{2} = \ln(n).$$

Aleshores,

$$\ln(n-1) \cdot \ln(n+1) < \ln^2 n.$$

7.- Demostrem que si $a + b + c > 0$ aleshores, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Solució:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc = \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c). \end{aligned}$$

Descomponem la suma $(a+b)^3 + c^3$ en factors:

$$(a+b)^3 + c^3 = ((a+b)+c)((a+b)^2 - (a+b)c + c^2), \text{ aleshores,}$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= ((a+b)+c)((a+b)^2 - (a+b)c + c^2) - 3ab(a+b+c) = \\ &= (a+b+c)((a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab) = \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) = \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

La igualtat s'assoleix quan $a + b + c = 0$ o bé quan $a = b = c$.

8.- Demostreu que $\cos 36^\circ > \operatorname{tg}36^\circ$.

Solució 1:

Demostració per reducció a l'absurd, suposem que $\cos 36^\circ \leq \operatorname{tg}36^\circ$.

$$\cos 36^\circ \leq \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}.$$

$$\cos^2 36^\circ \leq \sin 36^\circ.$$

Aplicant relacions de l'angle doble:

$$\frac{1 + \cos 72^\circ}{2} \leq \sin 36^\circ$$

$$1 + \cos 72^\circ \leq 2 \cdot \sin 36^\circ$$

$$1 + \cos(90^\circ - 18^\circ) \leq 2 \sin(30^\circ + 6^\circ)$$

$$1 + \sin 18^\circ \leq 2(\sin 30^\circ \cos 6^\circ + \sin 6^\circ \cos 30^\circ)$$

$$1 + 2 \sin 9^\circ \cos 9^\circ \leq \cos 6^\circ + 2 \sin 6^\circ \cos 30^\circ$$

La qual cosa és falsa ja que $1 > \cos 6^\circ$, $\sin 9^\circ > \sin 6^\circ$, $\cos 9^\circ > \cos 30^\circ$.

Per tant, $\cos 36^\circ > \operatorname{tg}36^\circ$.

Solució 2:

Considerem el triangle auri $\triangle ABC$:

$$\angle BAC = 36^\circ, \angle ABC = \angle ACB = 72^\circ.$$

$$\text{Si } \overline{BC} = 1, \text{ aleshores, } \overline{AB} = \overline{AC} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad \Phi^2 = 1 + \Phi.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle:

$$\frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{\Phi}{\sin 72^\circ} = \frac{\Phi}{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}.$$

$$\text{Simplificant: } \cos 36^\circ = \frac{\Phi}{2}.$$

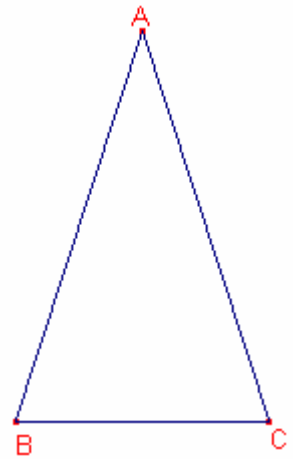
$$\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4 - \Phi^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 - (1 + \Phi)}}{2} = \frac{\sqrt{3 - \Phi}}{2}. \text{ Aleshores, } \operatorname{tg}36^\circ = \sqrt{\frac{3 - \Phi}{\Phi^2}}.$$

Calculem $\frac{\cos^2 36^\circ}{\operatorname{tg}^2 36^\circ}$.

$$\frac{\cos^2 36^\circ}{\operatorname{tg}^2 36^\circ} = \frac{\frac{\Phi^2}{4}}{\frac{3 - \Phi}{\Phi^2}} = \frac{\Phi^4}{4(3 - \Phi)} = \frac{(1 + \Phi)^2}{4(3 - \Phi)} = \frac{2 + 3\Phi}{4(3 - \Phi)} =$$

$$= \frac{2 + 3 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}{4 \left(3 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{4(5 - \sqrt{5})} = \frac{50 + 22\sqrt{5}}{80} > \frac{50 + 22 \cdot 2}{80} > 1.$$

Aleshores, $\cos 36^\circ > \operatorname{tg}36^\circ$.



9.- Proveu que per a tot n natural $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Solució:

Ho demostrarem per inducció completa.

Siga $n = 2$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}.$$

Suposem la propietat certa per a $n = k$.

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Provem la propietat per a $n = k+1$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \frac{1}{(k+1)+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} = \\ &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} > \\ &= \frac{13}{24} + \frac{2}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Aleshores, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ per a $n \geq 2$.

10.- Proveu que si $a + b = 1$, $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Solució:

És suficient provar el cas que a i b són del mateix signe (és a dir positius), ja que en cas contrari un d'ells és major que 1 i la desigualtat és evident.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1^2 - 2ab = 1 - 2ab .$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (1 - 2ab)^2 - 2a^2b^2$$

Si $a \geq 0, b \geq 0$, aleshores, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab .$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq ab .$$

$$a^4 + b^4 = (1 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 \geq \left(1 - 2\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} .$$