

91.- Siga la matriu d'elements complexos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculeu A^n .

Solució:

$$A^2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = (-4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suposem 4 casos:

$n = 4k$

$$A^{4k} = (A^4)^k = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 4k + 1$

$$A^{4k+1} = (A^4)^k A = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot A = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 4k + 2$

$$A^{4k+2} = (A^4)^k A^2 = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot A^2 = (-4)^k \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 4k + 3$

$$A^{4k+3} = (A^4)^k A^3 = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot A^3 = (-4)^k \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

92.- Siguen r, s, t les tres arrels de l'equació $x(x-2)(3x-7) = 2$.

a) Proveu que les tres arrels són positives.

b) Calculeu $\arctg r + \arctg s + \arctg t$.

Oposicions Agregats València.

Solució:

Siga $f(x) = x(x-2)(3x-7) - 2$.

$$f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 14x - 2.$$

Estudiem la monotonia de la funció.

$$f'(x) = 9x^2 - 26x + 14.$$

Si $f'(x) > 0$ la funció és estrictament creixent.

$$9x^2 - 26x + 14 > 0, \quad x \in \left] -\infty, \frac{13 - \sqrt{43}}{9} \right[\cup \left] \frac{13 + \sqrt{43}}{9}, +\infty \right[$$

Si $f'(x) < 0$ la funció és estrictament decreixent.

$$9x^2 - 26x + 14 < 0, \quad x \in \left] \frac{13 - \sqrt{43}}{9}, \frac{13 + \sqrt{43}}{9} \right[$$

Notem que $0 < \frac{13 - \sqrt{43}}{9}$

Si $x \leq 0$, $f(x) \leq f(0) = -2$.

Aleshores, $r, s, t > 0$.

b)

$3x^3 - 13x^2 + 14x - 2 = 0$, r, s, t son les arrels.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} -3rst = -2 \\ 3(rs + rt + ts) = 14 \\ -3(r + s + t) = -13 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\arctg r + \arctg s + \arctg t) = \frac{\operatorname{tg}(\arctg r + \arctg s) + t}{1 - \operatorname{tg}(\arctg r + \arctg s) \cdot t} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{r+s}{1-rs} + t}{1 - \left(\frac{r+s}{1-rs} \right) t} = \\ &= \frac{r+s+t-rst}{1-rs-rt-ts} = \\ &= \frac{\frac{13}{3} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{14}{3}} = \\ &= \frac{11}{-11} = -1. \end{aligned}$$

Aleshores, $\arctg r + \arctg s + \arctg t = \arctg(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

93.- Demostreu que si l'equació $x^3 + x + p = 0$, on $p \in \mathbb{R}$ té dues arrels complexes z_1, z_2 i una arrel positiva x_0 , aleshores es verifica $|z_1| = |z_2| \geq x_0$.

Oposicions Conca 98.

Solució:

Si l'equació en coeficient reals té dues solucions complexes, aquestes són conjugades, aleshores:

$$|z_1| = |z_2|, \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2.$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases} x_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = p \\ x_0 z_1 + x_0 z_2 + z_1 \cdot z_2 = 1 \\ x_0 + z_1 + z_2 = 0 \end{cases}$$

De la segona equació:

$$x_0(z_1 + z_2) + |z_1|^2 = 1 \quad (1)$$

De la tercera equació:

$$z_1 + z_2 = -x_0 \quad (2)$$

Substituint l'equació (2) en l'equació (1):

$$-x_0^2 + |z_1|^2 = 1.$$

$$|z_1|^2 = 1 + x_0^2 \geq x_0^2$$

Com $x_0 > 0$.

$$|z_1| \geq x_0.$$

94.- Siga $f(x)$ un polinomi de tercer grau. Siga $p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$. Determineu les arrels de $p(x)$ si:

- a) $f(x)$ té 3 arrels reals distintes.
 b) $f(x)$ té una arrel triple.

Oposicions Agregats València.

Solució:

a)

Siga $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Siguen $x_1 < x_2 < x_3$ les tres arrels reals i distintes de $f(x)$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $f'(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ per ser arrels distintes de $f(x)$.

$f''(x) = 6ax + 2b$

$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x) = -3a^2x^4 - 4abx^3 - 6acx^2 - 12adx + c^2 - 4bd$.

Estudiem la monotonia de $p(x)$.

$p'(x) = -12a^2x^3 - 12abx^2 - 12acx - 12ad = -12a \cdot f(x)$

$p'(x) = 0$ si $x = x_i$, $i = 1, 2, 3$.

La funció és creixent en $]-\infty, x_1[\cup]x_2, x_3[$.

La funció és decreixent en $]x_1, x_2[\cup]x_3, +\infty[$.

$p(x_i) = f'(x_i)^2 - 2f(x_i) \cdot f''(x_i) = f'(x_i)^2 > 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, $p(x_1) > 0$

Per ser $p(x)$ contínua i monòtona creixent en $]-\infty, x_1[$, existeix un únic $r \in]-\infty, x_1[$ tal que $p(r) = 0$

Per ser $p(x)$ contínua i monòtona decreixent en $]x_1, x_2[$, $f(x_1), f(x_2) > 0$.

Aleshores, $f(x) \neq 0$, $\forall x \in]x_1, x_2[$.

Per ser $p(x)$ contínua i monòtona creixent en $]x_2, x_3[$, $f(x_2), f(x_3) > 0$.

Aleshores, $f(x) \neq 0$, $\forall x \in]x_2, x_3[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$, $p(x_3) > 0$

Per ser $p(x)$ contínua i monòtona decreixent en $]x_3, +\infty[$, existeix un únic tal que $s \in]x_3, +\infty[$ $p(s) = 0$.

Aleshores, $p(x)$ té 2 arrels reals distintes i dos arrels complexos conjugades.

b)

Siga $f(x) = a(x-b)^3$ té 1 arrel real múltiple.

$f'(x) = 3a(x-b)^2$.

$f''(x) = 6a(x-b)$.

$p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x) = 9a^2(x-b)^4 - 2a(x-b)^3 \cdot 6a(x-b) = -3a^2(x-b)^4$.

Aleshores, $p(x)$ té 1 arrels de multiplicitat 4, $x = b$.

95.- Siga l'equació $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$.

- a) Determineu el paràmetre m a fi que l'equació tinga 4 arrels reals en progressió aritmètica.
 b) Estudieu el caràcter real o complex de les arrels de l'equació segons el valor del paràmetre m .

Oposicions Agregats València.

Solució:

a)

Siguen $r, r + d, r + 2d, r + 3d$ les arrels reals en progressió aritmètica.

Aplicant les fórmules de Cardano-vieta:

$$r + r + d + r + 2d + r + 3d = 0 \quad (1)$$

$$r(r + d)(r + 2d)(r + 3d) = m^2 \quad (2)$$

$$r(r + d) + r(r + 2d) + r(r + 3d) + (r + d)(r + 2d) + (r + d)(r + 3d) + (r + 2d)(r + 3d) = -(3m + 2) \quad (3)$$

$$\text{Simplificant (1), } d = \frac{-2}{3}r \quad (4)$$

Substituint (4) en (2) i simplificant:

$$r^4 = 9m^2 \quad (5)$$

Substituint (4) en (3) i simplificant:

$$\frac{10}{9}r^2 = 3m + 2 \quad (6)$$

$$\text{Elevant al quadrat l'expressió (6): } r^4 = \frac{81}{100}(3m + 2)^2 \quad (7)$$

Igulant les expressions (5) i (7):

$$9m^2 = \frac{81}{100}(3m + 2)^2. \text{ Resolent l'equació, } m = 6, \frac{6}{19}.$$

b)

$$\text{Resolent l'equació en la incògnita } x^2, x^2 = \frac{3m + 2 \pm \sqrt{5m^2 + 12m + 4}}{2}$$

Si $3m + 2 = 0$, l'equació queda: $x^4 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = 0$ que té 4 arrels complexes distintes.

Siga $\Delta = 5m^2 + 12m + 4$.

$$\Delta = 0 \text{ si } m = -2, \frac{-2}{5}. \quad \Delta > 0 \text{ si } m \in]-\infty, -2[\cup \left] \frac{-2}{5}, +\infty \right[. \quad \Delta > 0 \text{ si } m \in \left] -2, \frac{-2}{5} \right[.$$

Si $3m + 2 > 0$, $3m + 2 > \sqrt{5m^2 + 12m + 4}$.

Si $m > \frac{-2}{3}$, $m > \frac{-2}{5}$. L'equació té 4 arrels reals simples.

Si $m = \frac{-2}{5}$. L'equació té 2 arrels reals de multiplicitat 2 cadascuna d'elles.

Si $-\frac{2}{3} < m < \frac{-2}{5}$. L'equació té 4 arrels complexes distintes.

Si $-2 < m < \frac{-2}{3}$. L'equació té 4 arrels complexes distintes.

Si $m = -2$. L'equació té 2 arrels reals de multiplicitat 2 cadascuna d'elles.

Si $m < -2$, $x^2 = \frac{3m + 2 \pm \sqrt{5m^2 + 12m + 4}}{2} < 0$. L'equació té 4 arrels complexes distintes.

96.-

a) els zeros del polinomi $p(x) = x^2 - 5x + 2$ donen en centímetres les dimensions d'un rectangle. Determineu el perímetre i l'àrea del rectangle.

b) Els zeros del polinomi $q(x) = x^3 - 70x^2 + 1629x - 12600$ donen les dimensions en metres d'una habitació rectangular. Determineu la superfície total i el volum de l'habitació.

Solució:

a)

Siguen a, b els zeros del polinomi $p(x)$, dimensions del rectangle.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-(a + b) = -5$$

$$ab = 2$$

El perímetre del rectangle és:

$$2(a + b) = 2 \cdot 5 = 10\text{cm}.$$

L'àrea del rectangle és:

$$ab = 2\text{cm}^2.$$

b)

Siguen a, b, c els zeros del polinomi $q(x)$, dimensions de l'ortocedre que forma l'habitació.

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-(a + b + c) = -70$$

$$ab + ac + cb = 1629.$$

$$-abc = -12600$$

La superfície total de l'habitació és:

$$2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 1629 = 3259\text{m}^2.$$

El volum de l'habitació és:

$$abc = 12600\text{m}^3.$$

97. Proveu que si $a, b > 0$, $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Solució 1:

Siga $a, b > 0$.

La mitjana aritmètica és major o igual que la mitjana geomètrica, aleshores,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}}{ab}.$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Solució 2:

$a^3b, a^2b^2, a^2b^2, ab^3 > 0$.

La mitjana aritmètica és major o igual que la mitjana geomètrica, aleshores,

$$\frac{a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 + ab^3}{4} \geq \sqrt[4]{a^3b \cdot a^2b^2 \cdot a^2b^2 \cdot ab^3}$$

$$ab \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq \sqrt[4]{a^8b^8}.$$

$$ab(a+b)^2 \geq 4a^2b^2.$$

$a, b > 0$, calculant l'arrel quadrada a ambdues parts de la inequació:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b$.

98.- Siga x la mesura de l'angle d'un triangle no degenerat.

Determineu x tal que $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x}$.

Solució:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin 2x \cdot \sin 3x}$$

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \sin x(\sin 2x + \sin 3x)$$

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin 3x = \sin x(\sin 2x + \sin 3x)$$

Si $\sin x \neq 0$ ja que el triangle és no degenerat, $0 < x < \pi$.

$$2 \cos x \cdot \sin 3x = \sin 2x + \sin 3x$$

transformant productes en sumes:

$$\sin 4x + \sin 2x = \sin 2x + \sin 3x.$$

$$\sin 4x = \sin 3x$$

Aleshores:

$$4x = 3x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{o bé, } 4x = \pi - 3x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } 4x = 3x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < x < \pi$, aleshores, $x = 0$. El triangle seria degenerat:

$$\text{Si } 4x = \pi - 3x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < x < \pi.$$

Les solucions són: $x = \frac{\pi}{7}, \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}, \quad x = \frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}$.

99.- Siga el polinomi $p(x) = x^3 - (2k + 3)x^2 + hx - 4$ tal que té 3 arrels distintes i $p(k) = p(k + 1) = 0$.
 Determineu els valors de h i k .

Solució:

Com que $p(k) = p(k + 1) = 0$

$$k^3 - (2k + 3)k^2 + hk - 4 = (k + 1)^3 - (2k + 3)(k + 1)^2 + h(k + 1) - 4$$

$$-k^3 - 3k^2 + hk - 4 = -k^3 - 4k^2 - 5k + hk + h - 6.$$

Simplificant:

$$h = k^2 + 5k + 2.$$

Aleshores el polinomi quedaria:

$$p(x) = x^3 - (2k + 3)x^2 + (k^2 + 5k + 2)x - 4.$$

Com que $p(k) = 0$:

$$k^3 - (2k + 3)k^2 + (k^2 + 5k + 2)k - 4 = 0.$$

Simplificant:

$$2(k^2 + k - 2) = 0.$$

Aleshores, $k = 1, -2$.

Suposem que $k = 1$.

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$

Factoritzant amb la regla de Ruffini:

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2$ que contradia la hipòtesi que les tres arrels han de ser distintes:

Suposem que $k = -2$.

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x + 2)(x + 1)(x - 2).$$

Aleshores, $k = -2$, $h = k^2 + 5k + 2 = -4$.

100.- Determineu les solucions complexes del sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \\ xy + zt + (x + y)(z + t) = 0 \\ xyzt = 3 \end{cases} .$$

Solució:

Calculem $x + y + z + t$.

$$\begin{aligned} (x + y + z + t)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(xy + zt + (x + y)(z + t)) = 0 + 2 \cdot 0 = 0 . \end{aligned}$$

Aleshores:

$$x + y + z + t = 0$$

Calculem $xyz + xyt + xzt + yzt$.

$$(x + y + z + t)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - xy - xz - xt - yx - yt - zt) = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 3(xyz + xyt + xzt + yzt) = 0$$

$$12 - 3(xyz + xyt + xzt + yzt) = 0$$

$$\text{Aleshores: } xyz + xyt + xzt + yzt = 4$$

El sistema quedaria:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt = 0 \\ xyz + xyt + xzt + yzt = 4 \\ xyzt = 3 \end{cases} .$$

Aleshores aplicant les fórmules de Cardano-Vieta x, y, z, t són les solucions de l'equació:

$$r^4 - 0r^3 + 0r^2 - 4r + 3 = 0 .$$

$$r^4 - 4r + 3 = 0 .$$

Factoritzant am la regla de Ruffini:

$$(r - 1)^2 (r^2 + 2r + 3) = 0$$

Les solucions de l'equació són, $r = 1, 1, -1 + i\sqrt{2}, -1 - i\sqrt{2}$.

Les solucions del sistema són les permutacions d'aquestes solucions.