

Problemes Àlgebra 10

91.- Siga la matriu d'elements complexos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^n .

92.- Siguen r, s, t les tres arrels de l'equació $x(x-2)(3x-7) = 2$.

a) Proveu que les tres arrels són positives.

b) Calculeu $\arctg r + \arctg s + \arctg t$. Oposicions Agregats València.

93.- Demostreu que si l'equació $x^3 + x + p = 0$, on $p \in \mathbb{R}$ té dues arrels complexos z_1, z_2 i una arrel positiva x_0 , aleshores es verifica $|z_1| = |z_2| \geq x_0$. Oposicions Conca 98.

94.- Siga $f(x)$ un polinomi de tercer grau. Siga $p(x) = f'(x)^2 - 2f(x) \cdot f''(x)$. Determineu les arrels de $p(x)$ si:

a) $f(x)$ té 3 arrels reals distintes.

b) $f(x)$ té una arrel triple. Oposicions Agregats València.

95.- Siga l'equació $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$.

a) Determineu el paràmetre m a fi que l'equació tinga 4 arrels reals en progressió aritmètica.

b) Estudieu el caràcter real o complex de les arrels de l'equació segons el valor del paràmetre m .

Oposicions Agregats València.

96.-

a) els zeros del polinomi $p(x) = x^2 - 5x + 2$ donen en centímetres les dimensions d'un rectangle. Determineu el perímetre i l'àrea del rectangle.

b) Els zeros del polinomi $q(x) = x^3 - 70x^2 + 1629x - 12600$ donen les dimensions en metres d'una habitació rectangular. Determineu la superfície total i el volum de l'habitació.

97. Proveu que si $a, b > 0$, $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

98.- Siga x la mesura de l'angle d'un triangle no degenerat.

Determineu x tal que $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x}$.

99.- Siga el polinomi $p(x) = x^3 - (2k+3)x^2 + hx - 4$ tal que té 3 arrels distintes i $p(k) = p(k+1) = 0$.

Determineu els valors de h i k .

100.- Determineu les solucions complexos del sistema:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0 \\ xy + zt + (x+y)(z+t) = 0 \\ xyzt = 3 \end{cases}$$