

101.- Demostreu que l'expressió  $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$  no és negativa per a qualsevol  $x, y$  reals distints de zero.  
Lidski 97.

Solució:

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 = 3\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}}\right) + 10$$

Siga  $A = \frac{x}{y}$ .

L'expressió inicial quedaria:

$$3\left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right) - 8\left(A + \frac{1}{A}\right) + 10 = \frac{3A^4 - 8A^3 + 10A^2 - 8A - 3}{A^2}$$

Considerem la funció  $f(A) = 3A^4 - 8A^3 + 10A^2 - 8A - 3$ .

$$f'(A) = 12A^3 - 24A^2 + 20A - 8.$$

$$f'(A) = 0 \text{ si i només si } A = 1.$$

$$f''(A) = 36A^2 - 48A + 20.$$

$$f''(1) = 8 > 0.$$

Aleshores  $A = 1$  és un mínim de la funció.

La funció és decreixent en  $]-\infty, 1[$ . La funció és creixent en  $]1, +\infty[$

$$f(1) = 10 > 0.$$

Aleshores,  $f(A) \geq 10, \forall A \in \mathbb{R}$ .

$$A^2 > 0, \forall A \in \mathbb{R}.$$

Per tant:

$$\frac{3A^4 - 8A^3 + 10A^2 - 8A - 3}{A^2} > 0.$$

$$\text{Aleshores: } 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 > 0.$$

102.-

a) Proveu que  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ , per a tot natural  $n$ ,  $n > 1$ .

Lidski 102.

b) Proveu que  $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2m+1} > 1$  per a tot natural  $m$ .

Lidski 103.

a)

Solució 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln(2) > \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$4 > e$ , aleshores,  $2 > \sqrt{e}$

Solució 2:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

b)

Solució 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2m+1} &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2m} + \frac{1}{m+2m+1} = \\ &= \frac{1}{2m} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2m}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2m}} \right) + \frac{1}{m+2m+1} = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{2}+x} dx + \frac{1}{m+2m+1} = \ln(3) + \frac{1}{m+2m+1} > 1. \end{aligned}$$

Solució 2 (per inducció completa).

$$\text{Si } m=1, \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2 \cdot 1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Suposem la propietat certa per a  $m=k$ ,  $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+2k+1} > 1$ .

Demostrem la propietat per a  $m=k+1$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{k+1+2(k+1)+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} = \\ &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} = \\ &= \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} \right) + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ &= \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} \right) + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1 + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)} > 1. \end{aligned}$$

103.- Per a quins valors de  $a$  es satisfà el sistema de desigualtats:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2.$$

Lidski 98

Solució:

Notem que  $x^2 - x + 1 > 0$  ja que el coeficient de segon grau és positiu i el seu discriminant és negatiu.

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

$$-3(x^2 - x + 1) < x^2 + ax - 2 < 2(x^2 - x + 1)$$

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2$$

El sistema és equivalent:

$$\begin{cases} 4x^2 + (a-3)x + 1 > 0 \\ x^2 + (-a-2)x + 4 > 0 \end{cases}$$

Els dos polinomis tenen els coeficients de segon grau positius, els polinomis són positius si els discriminants són negatius:

$$\begin{cases} (a-3)^2 - 16 < 0 \\ (a-2)^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

La solució de la primera inequació és:  $a \in ]-1, 7[$ .

La solució de la segona inequació és:  $a \in ]-6, 2[$ .

La solució del sistema és la intersecció d'ambdues solucions, és a dir:  
 $a \in ]-1, 2[$ .

104.-

a) Resoleu la següent equació:  $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$

Lidski 127

b) Quines condicions han d'acomplir els nombres reals  $a$  i  $b$  a fi que l'equació:

$$1 + \log_b(2\log a - x) \log_x b = \frac{2}{\log_b x}$$

tinga solució. Determineu les solucions.

Lidski 130

Solució:

a)

Efectuant el canvi de base:

$$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3(3x)} + (\log_3 x)^2 = 1.$$

$$\frac{\log_3 3 - \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + (\log_3 x)^2 = 1.$$

$$\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + (\log_3 x)^2 = 1.$$

Efectuem el canvi,  $A = \log_3 x$ .

$$\frac{1 - A}{1 + A} + A^2 = 1.$$

$$A(A^2 + A + 2) = 0.$$

Aleshores,  $A = 0, -2, 1$ .Si  $\log_3 x = 0$ , aleshores,  $x = 1$  que satisfà l'equació inicial.Si  $\log_3 x = -2$ , aleshores,  $x = \frac{1}{9}$  que satisfà l'equació inicial.Si  $\log_3 x = 1$ , aleshores,  $x = 3$  que satisfà l'equació inicial.

b)

En principi  $a, b > 0, x > 0$ .

Llevant denominadors en l'equació:

$$\log_b x + \log_b(2\log a - x) \cdot \log_x b \cdot \log_b x = 2.$$

$$\log_b x + \log_b(2\log a - x) = 2.$$

$$\log_b(2\log a \cdot x - x^2) = 2.$$

$$\text{Aleshores, } 2\log a \cdot x - x^2 = b^2.$$

$$x^2 - 2\log a + b^2 = 0.$$

$$x = \begin{cases} \log a + \sqrt{\log^2 a - b^2} \\ \log a - \sqrt{\log^2 a - b^2} \end{cases}.$$

L'equació té dues solucions distintes si  $\log^2 a - b^2 > 0$  és a dir si  $a > 10^b$ .Notem que en aquest cas  $x > 0$ .L'equació té una solució doble si  $\log a = b$ .L'equació no té solució real si  $\log^2 a - b^2 < 0$ , és a dir si,  $a < 10^b$ .

105.- Les arrels  $r$  i  $s$  de l'equació  $x^3 - 3ax + a^2 = 0$  compleixen  $r^2 + s^2 = 175$ .  
Determineu  $a$ .  
Lidski 238.

Solució:

Aplicant les fórmules de Cardano Vieta:

$$\begin{cases} r + s = 3a \\ rs = a^2 \end{cases}$$

$$9a^2 = (r + s)^2 = r^2 + s^2 + 2rs = 175 + 2a^2.$$

$$7a^2 = 175.$$

$$a = \pm \frac{1}{2}.$$

106.- Demostreu que per a tots els valors admissibles de  $x$  s'acompleix la igualtat:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + x \right).$$

Lidski 536.

Solució:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + x \right) &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x}.$$

La igualtat no és vàlida quan:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{6} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

107.- Resoleu l'equació  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ .

Lidski 562.

Solució:

Utilitzarem la igualtat  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$(\sin x + \cos x) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$(\sin x + \cos x - 1) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 0.$$

Aleshores:

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0, \text{ o bé, } \sin x + \cos x - 1 = 0.$$

$$\text{Si } 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0, \sin 2x = 2, \text{ aquesta equació no té solució.}$$

Si  $\sin x + \cos x - 1 = 0$ :

$$\cos x = 1 - \sin x$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$1 - \sin^2 x = 1 - 2 \sin x + \sin^2 x.$$

$$\sin x(\sin x - 1) = 0.$$

Aleshores,  $\sin x = 0$ , o bé  $\sin x = 1$ .

Les solucions són:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

108.- Resoleu l'equació  $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$ .

Lidski 562.

Solució:

Utilitzarem la igualtat  $A^4 + B^4 = (A^2 + B^2)^2 - 2A^2B^2$

$$\left(\sin^2 \frac{x}{3} + \cos^2 \frac{x}{3}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{5}{8}.$$

$$\sin^2 \frac{2x}{3} = \frac{3}{4}.$$

$$\sin \frac{2x}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aleshores:

$$\frac{2x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{2x}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \text{ Les solucions són:}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

109.- Siguen a i b dos nombres enters.

Demostreu que l'equació  $(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$  no admet més d'una solució entera.

Oposicions Extremadura 2006.

Solució:

$$(x-a)(x-b)(x-3) = -1.$$

El producte de dos enters és  $-1$  si un és  $1$  i l'altre menys  $1$ .

Si les tres solucions foren enters aleshores cadascun dels tres factors és:

$$\begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=-1 \\ x-3=-1 \end{cases}, \begin{cases} x-a=1 \\ x-b=1 \\ x-3=-1 \end{cases}, \begin{cases} x-a=1 \\ x-b=-1 \\ x-3=1 \end{cases}, \begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=1 \\ x-3=1 \end{cases}.$$

$$\text{Si } \begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=-1 \\ x-3=-1 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ x=2 \end{cases} \text{ Aleshores l'equació seria:}$$

$$(x-3)(x-3)(x-3)+1=0$$

Té una solució entera  $x=2$  i dues complexes.

$$\text{Si } \begin{cases} x-a=1 \\ x-b=1 \\ x-3=-1 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ x=2 \end{cases} \text{ Aleshores l'equació seria:}$$

$$(x-1)(x-1)(x-3)+1=0.$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0.$$

$$(x-2)(x^2 - 3x + 1) = 0. \text{ L'única solució entera és } x = 2.$$

$$\text{Si } \begin{cases} x-a=1 \\ x-b=-1 \\ x-3=1 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ x=4 \end{cases} \text{ Aleshores l'equació seria:}$$

$$(x-3)(x-5)(x-3)+1=0.$$

$$x^3 - 11x^2 + 39x - 44 = 0.$$

$$(x-4)(x^2 - 7x + 11) = 0. \text{ L'única solució entera és } x = 4.$$

$$\text{Anàlogament si } \begin{cases} x-a=-1 \\ x-b=1 \\ x-3=1 \end{cases} \text{ l'única solució entera seria } x = 4.$$

Si equació de tercer grau amb coeficients enters té dos solucions enters la tercera també és entera.

$$x^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad c, e, f \in \mathbb{Z}.$$

Si les arrels són  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Q}$

Per les fórmules de Cardano Vieta:

$$-(m+n+q) = c$$

Aleshores,  $q \in \mathbb{Z}$ .

110.- Determineu a i b a fi que les arrels del polinomi

$p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$  estiguen en progressió aritmètica i calculeu les arrels.

Oposicions Galícia 2006.

Solució:

Siguen les arrels  $x = m, m + d, m + 2d, m + 3d$ , les arrels del polinomi en progressió aritmètica.

Aplicant les fórmules de Cardano Vieta:

$$8 = 4m + 6d$$

$$14 = m(m + d) + m(m + 2d) + m(m + 3d) + (m + d)(m + 2d) + (m + d)(m + 3d) + (m + 2d)(m + 3d)$$

Efectuant operacions:

$$\begin{cases} 2m + 3d = 8 \\ 6m^2 + 18md + 11d^2 = 14 \end{cases} \cdot \text{Resolent el sistema:}$$

$$\begin{cases} m = 5 \\ d = -2 \end{cases} \text{ o bé } \begin{cases} m = -1 \\ d = 2 \end{cases} \cdot$$

En tots dos casos les arrels de l'equació són:

$$x = 5, 3, 1, -2 \cdot$$

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax + b = (x - 5)(x - 3)(x - 1)(x + 1)$$

Aplicant el teorema del residu:

$$p(1) = 0, p(-1) = 0 :$$

$$\begin{cases} 1 - 8 + 14 + a + b = 0 \\ 1 + 8 + 14 - a + b = 0 \end{cases} \cdot$$

$$\begin{cases} a + b = -7 \\ -a + b = -23 \end{cases} \cdot \text{Resolent el sistema: } \begin{cases} a = 8 \\ b = -15 \end{cases} \cdot$$