

## Problemes Àlgebra 11

101.- Demostreu que l'expressió  $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$  no és negativa per a qualsevol  $x, y$  reals distints de zero. Lidski 97.

102.-

a) Proveu que  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ , per a tot natural  $n, n > 1$ .

Lidski 102.

b) Proveu que  $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2m+1} > 1$  per a tot natural  $m$ .

Lidski 103.

103.- Per a quins valors de  $a$  es satisfà el sistema de desigualtats:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2. \text{ Lidski 98}$$

104.-

a) Resoleu la següent equació:  $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$

Lidski 127

b) Quines condicions han d'acomplir els nombres reals  $a$  i  $b$  a fi que l'equació:

$$1 + \log_b(2\log_a - x)\log_x b = \frac{2}{\log_b x} \text{ tinga solució. Determineu les solucions.}$$

Lidski 130

105.- Les arrels  $r$  i  $s$  de l'equació  $x^3 - 3ax + a^2 = 0$  compleixen  $r^2 + s^2 = 175$ . Determineu  $a$ . Lidski 238.

106.- Demostreu que per a tots els valors admissibles de  $x$  s'acompleix la igualtat:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right). \text{ Lidski 536.}$$

107.- Resoleu l'equació  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ .

Lidski 562.

108.- Resoleu l'equació  $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$ .

Lidski 562.

109.- Siguen  $a$  i  $b$  dos nombres enters.

Demostreu que l'equació  $(x-a)(x-b)(x-3) + 1 = 0$  no admet més d'una solució entera.

Oposicions Extremadura 2006.

110.- Determineu  $a$  i  $b$  a fi que les arrels del polinomi

$p(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$  estiguen en progressió aritmètica i calculeu les arrels.

Oposicions Galícia 2006.