

111.- Siguen a i b dos enters positius. Demostreu que l'equació $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2ab - 1$ no té arrels racionals. Oposicions Madrid 2006.

Solució:

a) Vegem que no té solució entera per reducció a l'absurd.

Siga $x = p \in \mathbb{Z}$ solució de l'equació:

$$(p - a)^2 + (p - b)^2 = 2ab - 1.$$

$$2(p^2 - p(a + b)) = -1 - (a + b)^2.$$

Aleshores, $a + b$ és imparell, $a + b = 2n + 1$. Substituint:

$$2(p^2 - p(2n + 1)) = -1 - (2n + 1)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$p^2 - 2pn - p = -1 - 2n^2 - 2n.$$

$$p^2 - p = -1 - 2n^2 - 2n + 2pn.$$

$$p(p - 1) = -1 + 2(n^2 - n + p).$$

La qual cosa és absurda ja que $p(p - 1)$ és parell i $-1 + 2(n^2 - n + p)$ imparell.

b) Vegem que no té solució racional.

Siga $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $q > 1$, irreductible, solució de l'equació:

$$\left(\frac{p}{q} - a\right)^2 + \left(\frac{p}{q} - b\right)^2 = 2ab - 1. \text{ Efectuant operacions:}$$

$$2(p^2 - pq(a + b)) = q^2(-1 - (a + b)^2).$$

Suposem que $a + b$ és parell, aleshores, q és parell, $q = 2k$

$$2(p^2 - pq(a + b)) = 4k^2(-1 - (a + b)^2). \text{ Simplificant:}$$

$$p^2 = pq(a + b) + 2k^2(-1 - (a + b)^2).$$

Aleshores, p^2 és parell, per tant p és parell. La qual cosa és absurda ja que $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

és irreductible.

Suposem que $a + b$ és imparell, aleshores, $a + b = 2n + 1$.

$$2(p^2 - pq(2n + 1)) = q^2(-1 - (2n + 1)^2). \text{ Simplificant:}$$

$$p^2 - 2pqn - pq = q^2(-2(n^2 + n) - 1).$$

Aleshores, q divideix a p o bé divideix a $p - 2qn - q$.

En tots dos casos q divideix a p . La qual cosa és absurda ja que $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ és

irreductible.

112.- Determineu totes les solucions en nombres enters de l'equació:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8.$$

Oposicions Balears 2006.

Solució:

Suposem que existeix una solució $x_i = r_i \in \mathbb{Z}$ tal que $r_i > 1$ o $r_i < 0$.

En tots dos casos $r_i^2 > r_i$

Siguen $x_j = s_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, 8$, $x_i = r_i$ solució de l'equació:

$$s_j^2 \geq s_j.$$

Aleshores, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i s_j^2 + r_i^2 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^i s_j^2 + r_i^2$. La qual cosa és una contradicció.

Aleshores, $x_i = \{0, 1\} \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Aleshores hi ha 2^8 solucions distintes de l'equació.

113.- Siguen a, b, c, d nombres enters qualssevol. Proveu que $abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$ és divisible per 7.
Oposicions Balears 2006.

Solució:

$$N = abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2) = \\ = abcd(a + b)(a - b)(a + c)(a - c)(a + d)(a - d)(b + c)(b - c)(b + d)(b - d)(c + d)(c - d)$$

Notem que si a, b, c o d és múltiple de 7, aleshores N és múltiple de 7.

Siga $a = 7n_1 + k_1$, $b = 7n_2 + k_2$, $c = 7n_3 + k_3$, $d = 7n_4 + k_4$, $k_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Notem que N està format pel producte 12 dels factors del qual és la suma i diferència de a, b, c, d .

Si existeixen dos nombres amb la mateixa congruència mòdul 7, la seua diferència és múltiple de 7.

Si a, b, c, d tots tenen distinta congruència mòdul 7 sempre hi ha dos que la seua congruència suma 7. Aleshores N és divisible per 7.

Les possibles combinacions són:

k_1	k_2	k_3	k_4	Sumes de dos que donen 7
1	2	3	4	$k_3 + k_4 = 7$
1	2	3	5	$k_2 + k_4 = 7$
1	2	3	6	$k_1 + k_4 = 7$
1	2	4	5	$k_2 + k_4 = 7$
1	2	4	6	$k_1 + k_4 = 7$
1	2	5	6	$k_1 + k_4 = 7$
1	3	4	5	$k_2 + k_3 = 7$
1	3	4	6	$k_1 + k_4 = 7$
1	3	5	6	$k_1 + k_4 = 7$
1	4	5	6	$k_1 + k_4 = 7$
2	3	4	5	$k_2 + k_3 = 7$
2	3	4	6	$k_2 + k_3 = 7$
2	3	5	6	$k_1 + k_3 = 7$
2	4	5	6	$k_1 + k_3 = 7$
3	4	5	6	$k_1 + k_2 = 7$

114.- Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$?_n = \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix}$$

Oposicions La Rioja 2006.

Solució:

$$?_2 = \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 \\ x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} = x^8 + x^4 + 1.$$

$$\begin{aligned} ?_3 &= \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} = (1+x^4) \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 \\ x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 0 & 1+x^4 \end{vmatrix} = (1+x^4)?_2 - x^4?_1 = \\ &= (1+x^4)(x^8 + x^4 + 1) - x^4(1+x^2) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1 \end{aligned}$$

Provem per inducció completa que $?_n = x^{4n} + x^{4(n-1)} + \dots + x^8 + x^4 + 1$

Per a $n = 2$ la propietat és vàlida.

Suposem que per a $n = k$, $?_k = x^{4k} + x^{4(k-1)} + \dots + x^8 + x^4 + 1$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$.

Desenvolupem el determinant per la primera fila:

$$\begin{aligned} ?_{k+1} &= \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} = \\ &= (1+x^4) \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (1+x^4)?_k - x^2 \cdot x^2?_{k-1} =$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$= (1+x^4)(x^{4k} + x^{4(k-1)} + \dots + x^4 + 1) - x^4(x^{4(k-1)} + x^{4(k-2)} + \dots + x^4 + 1) =$$

$$= x^{4(k+1)} + x^{4k} + x^{4(k-1)} + \dots + x^4 + 1.$$

Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Oposicions Andalusia 2006.

Solució:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = x^4 + x^2 + 1.$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x \\ 0 & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)\Delta_2 - x^2\Delta_1 = \\ &= (1+x^2)(x^4 + x^2 + 1) - x^2(1+x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Provem per inducció completa que $\Delta_n = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \dots + x^4 + x^2 + 1$

Per a $n = 2$ la propietat és vàlida.

Suposem que per a $n = k$, $\Delta_k = x^{2k} + x^{2(k-1)} + \dots + x^4 + x^2 + 1$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$.

Desenvolupem el determinant per la primera fila:

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \\ &= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (1+x^2)\Delta_k - x^2 \cdot \Delta_{k-1} =$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$= (1+x^2)(x^{2k} + x^{2(k-1)} + \dots + x^2 + 1) - x^2(x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \dots + x^2 + 1) =$$

$$= x^{2(k+1)} + x^{2k} + x^{2(k-1)} + \dots + x^2 + 1.$$

115.- Siga la matriu $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ amb $x \in \mathbb{R}$. Siga A el conjunt de matrius

d'aquesta forma. Demostreu que A amb el producte de matrius té estructura de grup commutatiu.

Oposicions Andalusia 2006.

Solució:

$A \neq \emptyset$, ja que $M(0) = I_3$ matriu unitat de les matrius quadrades d'ordre 3.

L'operació és una llei de composició interna:

$$M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x+y) \in A$$

L'operació és associativa, ja que el producte de matrius és associatiu.

$I_3 \in A$. Aleshores el conjunt A té element neutre,

$$M(x) \cdot I_3 = I_3 \cdot M(x) = M(x).$$

Vegem que tota matriu $M(x) \in A$ té inversa.

La seua inversa és $M(-x)$ ja que:

$$M(x) \cdot M(-x) = M(-x) \cdot M(x) = M(0) = I_3 \in A$$

Vegem que té la propietat commutativa:

$$M(x) \cdot M(y) = M(x+y) = M(y+x) = M(y) \cdot M(x).$$

116.- Discuti les arrels de l'equació $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$ segons els valors de m i obteniu-les.
Oposicions d'Astúries 2006.

Solució:

$$\text{Siga } f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24.$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = 1, 2, 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44.$$

$$f''(1) = 8 > 0, \text{ aleshores, } f(x) \text{ té un mínim en } x = 1, f(1) = -9 + m.$$

$$f''(2) = -4 < 0, \text{ aleshores, } f(x) \text{ té un màxim en } x = 2, f(2) = m - 8.$$

$$f''(3) = 8 > 0, \text{ aleshores, } f(x) \text{ té un mínim en } x = 3, f(3) = -9 + m.$$

Si $m > 9$ l'equació té 4 arrels complexes distintes conjugades 2 a 2.

Si $8 < m < 9$ l'equació té 4 arrels reals distintes.

Si $m < 8$ l'equació té dos arrels reals distintes i 2 arrels complexes conjugades.

Si $m = 9$ té 2 arrels reals dobles, $x = 1, 3$

Si $m = 8$ té 4 arrels real $x = 2, 2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$ (notem que 1 d'elles és doble)

Vegem que la funció és simètrica respecte de la recta $x = 2$.

Traslladem la funció $f(x)$ 2 unitats a l'esquerra:

$$g(x) = f(x+2) = (x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 22(x+2)^2 - 24(x+2) + m.$$

$$g(x) = x^4 - 2x^2 + m - 8.$$

La funció $g(x)$ és parella, simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Aleshores la funció $f(x)$ és simètrica respecte de la recta $x = 2$.

Si una arrel de $g(x)$ és $x = r$, aleshores una arrel de $f(x)$ és $x = 2 + r$.

Calculem les solucions de l'equació $g(x) = 0$.

$$x^4 - 2x^2 + m - 8 = 0.$$

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{36 - 4m}}{2} = 1 \pm \sqrt{9 - m}.$$

$$x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{9 - m}}.$$

Aleshores les arrels de $f(x)$ són:

$$x = 2 \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{9 - m}}.$$

117.- Calculeu el determinant d'ordre n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Solució:

Desenvolupant el determinant per la primera fila:

$$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 6 \cdot D_{n-2}.$$

És una successió recurrent.

L'equació característica de la successió és:

$$q^2 = 5q - 6, \text{ les solucions són: } q = 2, q = 3$$

Aleshores el terme general de la successió és:

$$D_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

Calculem A i B utilitzant el primer i segon termes de la successió:

$$\begin{cases} 5 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \\ 19 = A \cdot 2^2 + B \cdot 3^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2A + 3B = 5 \\ 4A + 9B = 19 \end{cases}. \text{ Resolent el sistema:}$$

$$\begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}. \text{ Aleshores, el terme general de la successió és:}$$

$$D_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = -2^{n+1} + 3^{n+1}.$$

118.- Siga $0 < x_1 < y_1$ i definim per recurrència, $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$,

$\forall n \geq 1$.

Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú.

Oposicions Andalusia 2006.

Solució:

a) Demostrem que $x_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n < \dots < y_2 < y_1$.

Ho provarem amb 4 passos:

a1) Demostrem per inducció que $x_n > 0$, $y_n > 0$.

Si $n = 1$, per hipòtesi $0 < x_1 < y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k > 0$, $y_k > 0$.

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k \cdot y_k} > 0, \quad y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} > 0.$$

a2) Demostrem $x_n < y_n$.

Per a1) $x_n > 0$, $y_n > 0$. La mitjana geomètrica és menor que la mitjana aritmètica.

Aleshores:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}$$

Aleshores, $x_{k+1} < y_{k+1}$.

a3) Demostrem per inducció que $x_n < x_{n+1}$.

Si $n = 1$, $x_2 = \sqrt{x_1 y_1} > \sqrt{x_1 x_1} = x_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $x_k < x_{k+1}$

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k \cdot y_k} \stackrel{(a2)}{>} \sqrt{x_k x_k} > x_n.$$

a4) Demostrem per inducció que $y_n > y_{n+1}$.

Si $n = 1$, $y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} < \frac{y_1 + y_1}{2} = y_1$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $y_k > y_{k+1}$

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$y_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2} \stackrel{(a2)}{<} \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

b)

La successió $\{x_n\}$ és monòtona creixent i afitada superiorment, aleshores és convergent. Siga $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $a > 0$.

La successió $\{y_n\}$ és monòtona decreixent i afitada inferiorment, aleshores és convergent. Siga $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, $b > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + y_n}{2}, \text{ aleshores, } b = \frac{a+b}{2}. \quad (1)$$

Aleshores, $a = b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n \cdot y_n}, \text{ aleshores, } a = \sqrt{ab} \quad (2)$$

El sistema format per les expressions (1) (2) és compatible indeterminat $a = b$.

119.- Siga $P_3(x)$ l'espai vectorial real de polinomis amb coeficients reals, de grau menor o igual a tres amb la indeterminada x .

- a) Demostreu que $V = \{1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ és una base de $P_3(x)$.
 b) Determineu, respecte de V , la matriu de l'endomorfisme f definit en $P_3(x)$ que a cada polinomi li fa correspondre la segona derivada.
 c) Calculeu el nucli i la imatge de l'endomorfisme, Així com les seues dimensions.
 d) Resoleu $f(q(x)) = 6x + 8$, on $q(x) \in P_3(x)$.

Oposicions Cantàbria 2004.

Solució:

$(P_3(x), +, \cdot)$ és un espai vectorial de dimensió 4 la base canònica és:

$$B = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3\}.$$

a)

$$\text{Siga } V = \{u_1 = 1, u_2 = 1+x, u_3 = 1+x+x^2, u_4 = 1+x+x^2+x^3\}.$$

Vejam que el conjunt és linealment independent:

Siga $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$. Hem de demostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x+x^2) + \alpha_4(1+x+x^2+x^3) = 0$$

$$\alpha_4 x^3 + (\alpha_3 + \alpha_4)x^2 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0.$$

Dos polinomis són iguals si són del mateix grau i els coeficients són iguals.

Aleshores:

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad . \text{ Resolent el sistema } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Un sistema linealment independent de dimensió 4 d'una base de dimensió 4 (sistema lineal independent maximal) és base de l'espai vectorial.

b)

Definim $f : P_3(x) \rightarrow P_3(x)$, $f(p(x)) = p''(x)$, $p(x) \in P_3(x)$.

f és una aplicació lineal ja que per la linealitat de la derivada:

$$f(\alpha \cdot p(x) + \beta \cdot q(x)) = \alpha \cdot f(p(x)) + \beta \cdot f(q(x)).$$

Calculem la matriu de l'endomorfisme:

$$f(u_1) = 0 = (0,0,0,0)$$

$$f(u_2) = 0 = (0,0,0,0)$$

$$f(u_3) = 2 = (2,0,0,0)$$

$$f(u_4) = 2 + 6x = -4 + 6(1+x) = (-4,6,0,0)$$

Aleshores la matriu de l'endomorfisme és:

$$\begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

c)

Determinem el nucli Ker f:

$$\text{Ker } f = \{(a, b, c, d) \in P_3 / f(a, b, c, d) = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2c - 4d \quad 6d \quad 0 \quad 0) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Aleshores:

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \{(a, b, c, d) \in P_3 / f(a, b, c, d) = 0\} = \{(a, b, 0, 0) \in P_3\}$$

$$\text{Ker } f = \{a + b(1+x) \quad / a, b \in \mathbb{R}\}$$

Una base d'aquest subespai vectorial és:

$$\{1, 1+x\}, \quad \dim \text{Ker } f = 2$$

És a dir qualsevol polinomi de grau dos.

Determinem la imatge de l'endomorfisme Im f :

$$\dim P_3(x) = \dim \text{ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$\text{Aleshores, } \dim \text{Im } f = \dim P_3(x) - \dim \text{Ker } f = 4 - 2 = 2.$$

També $\dim \text{Im } f = \text{rang } A = 2$ on A és la matriu de l'endomorfisme.

$$\text{Im } f = \{(a, b, c, d) \in P_3(x) \quad / \text{ existeix } (x, y, z, t) \in P_3(x) \text{ amb } f(x, y, z, t) = (a, b, c, d)\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$(2z - 4t \quad 6t \quad 0 \quad 0) = (a \quad b \quad c \quad d)$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Im } f = \{(a, b, 0, 0) \in P_3\}$$

Una base de l'espai vectorial Im f és: $\{1, 1+x\}$.

d)

Siga $f(q(x)) = 6x + 8$, on $q(x) \in P_3(x)$.Siga $q(x) = (a \quad b \quad c \quad d) \in P_3(x)$ Notem que $6x + 8 = 2 + 6(1+x) = (2 \quad 6 \quad 0 \quad 0)$ pertany a Im f

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ resolent l'equació matricial:}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ d = 1 \end{cases}. \text{ Aleshores, } q(x) = a + b(1+x) + 3(1+x+x^2) + 1(1+x+x^2+x^3).$$

120.-

a) El polinomi $p(x) = x^n + a \cdot x^{n-m} + b$ no pot tenir arrels, distintes de zero, d'ordre superior a 2.

b) Determineu la condició a fi que el polinomi $p(x)$ tinga una arrel doble distinta de zero.

Solució:

a)

Derivem el polinomi

$$p'(x) = n \cdot x^{n-1} + a(n-m) \cdot x^{n-m-1} = x^{n-m-1}(n \cdot x^m + a(n-m))$$

$$p'(x) = 0 \text{ si } x^{n-m-1} = 0 \text{ o bé, } n \cdot x^m + a(n-m) = 0$$

La segona equació té arrels complexes simples distintes de zero, o totes les arrels són zero.

Aleshores, $p(x)$ no pot tenir arrels reals, distintes de zero, d'ordre superior a 2.

b)

$$n \cdot x^m + a(n-m) = 0$$

$$x^m = \frac{-a(n-m)}{n}$$

$$x = \sqrt[m]{\frac{-a(n-m)}{n}} \text{ seria una arrel de } p(x).$$

$$p\left(\sqrt[m]{\frac{-a(n-m)}{n}}\right) = 0.$$

$$p(x) = x^{n-m}(x^m + a) + b.$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{-a(n-m)}{n}\right)^{n-m}} \left(\frac{-a(n-m)}{n} + a\right) = -b$$

Siga $d = \text{mcd}(n, m)$, aleshores, $m = d \cdot m_1$, $n = d \cdot n_1$.

$$\sqrt[m_1]{\left(\frac{-a(n-m)}{n}\right)^{n_1-m_1}} \left(\frac{am}{n}\right) = -b$$

Elevant a m_1 ambdues parts:

$$\left(\frac{-a(n-m)}{n}\right)^{n_1-m_1} \left(\frac{am}{n}\right)^{m_1} = (-1)^{m_1} b^{m_1}$$

$$(-1)^{n_1-m_1} a^{n_1} (n-m)^{n_1-m_1} (m)^{m_1} = (-1)^{m_1} b^{m_1} n^{n_1}$$

$$(-1)^{n_1} a^{n_1} (n-m)^{n_1-m_1} (m)^{m_1} = b^{m_1} n^{n_1}.$$