Problemes Àlgebra 12

111.- Siguen a i b dos enters positius. Demostreu que l'equació
$(x-a)^2+(x-b)^2=2ab-1$ no té arrels racionals.
Oposicions Madrid 2006.

112.- Determineu totes les solucions en nombres enters de l'equació:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$.
Oposicions Balears 2006.

113.- Siguen a, b, c, d nombres enters qualssevol. Proveu que
$abcd(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-d^2)(b^2-c^2)(b^2-d^2)(c^2-d^2)$ és divisible per 7.
Oposicions Balears 2006.

114.- Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$?_n=\begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix}$$

Oposicions La Rioja 2006.

Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Oposicions Andalusia 2006.

115.- Siga la matriu $M(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ amb $x\in R$. Siga A el conjunt de matrius d'aquesta forma. Demostreu que A amb el producte de matrius té estructura de grup commutatiu.
Oposicions Andalusia 2006.

116.- Discutiu les arrels de l'equació $x^4-8x^3+22x^2-24x+m=0$ segons els valors de m i obteniu-les.
Oposicions d'Astúries 2006.

117.- Calculeu el determinant d'ordre n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & .... & 0 & 0 & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

118.- Siga $0 < x_1 < y_1$ i definim per recurrència, $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $\forall n \geq 1$.
Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú.
Oposicions Andalusia 2006.

119.- Siga $P_3(x)$ l'espai vectorial real de polinomis amb coeficients reals, de grau menor o igual a tres amb la indeterminada x.
a) Demostreu que $V = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ és una base de $P_3(x)$.
b) Determineu, respecte de V, la matriu de l'endomorfisme f definit en $P_3(x)$ que a cada polinomi li fa correspondre la segona derivada.
c) Calculeu el nucli i la imatge de l'endomorfisme, Aixa com les seues dimensions.
d) Resoleu $f(q(x)) = 6x + 8$, on $q(x) \in P_3(x)$.
Oposicions Cantàbria 2004.

120.-
a) El polinomi $p(x) = x^n + a \cdot x^{n-m} + b$ no pot tenir arrels, distintes de zero, d'ordre superior a 2.
b) Determineu la condició a fi que el polinomi $p(x)$ tinga una arrel doble distinta de zero.