121.- Siga M una matriu quadrada d'ordre 2 i coeficients reals, verificant la igualtat:
$M^2-2M-3I=0$ (1) on I és la matriu unitat d'ordre 2.
Siga $M_2(R)$ l'espai vectorial sobre el cos R format per totes les matrius quadrades d'ordre 2. Siga V el subespai engendrat per M i I.
a) Determineu totes les matrius que verifiquen la relació (1) i tals que la dimensió de V siga 1.
b) Determineu totes les solucions de l'equació (1) de la forma $M=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.
c) Es suposa que M verifica (1) i és distinta de les matrius de l'apartat a).
Determineu en V totes les matrius que verifiquen $P^2=P$.
Oposicions Cantàbria 2006.

Solució:
Siga $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M^2-2M-3I=0$. Aleshores:
$\begin{pmatrix} a^2+bc-2a-3 & ab+bd-2b \\ ac+cd-2c & bc+d^2-2d-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Igualant els elements:
$$\begin{cases} a^2+bc-2a-3=0 \\ b(a+d-2)=0 \\ c(a+d-2)=0 \\ bc+d^2-2d-3=0 \end{cases}$$
Si $b=c=0$.
$a=-1,3$, $d=-1,3$. Aleshores:
$M_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Restant la primera i quarta equació del sistema:
a^2-2a-d^2+2d.
$(a+d-2)(a-d)=0$

Si $a-d=0$, $a=d$
Substituint en la 2ª i 3 ª equació:
$b(2a-2)=0$, $c(2a-2)=0$.
Aleshores, $a=1$ o bé $b=c=0$.
Si $a=1$, aleshores, $d=1$, $bc=4$. Per tant:
$M_5=\begin{pmatrix} 1 & b \\ \frac{4}{b} & 1 \end{pmatrix}$, $b\neq 0$.

Si $a+d-2=0$, $d=2-a$.
Resolent la primera equació en la incògnita a:
$a=1\pm\sqrt{4-bc}$, $4-bc\geq 0$. Per tant:
$M_6=\begin{pmatrix} 1+\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1-\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc>0$.
$M_7=\begin{pmatrix} 1-\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1+\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc>0$.

a)

$< M_1, I >=< I >$, $\dim < M_1, I >= 1$, $< M_4, I >=< I >$, $\dim < M_4, I >= 1$,

$\{M_2, I\}$ són L.I. , $\dim < M_2, I >= 2$

$\{M_3, I\}$ són L.I. , $\dim < M_3, I >= 2$

$\{M_5, I\}$ són L.I. , $\dim < M_5, I >= 2$

$\{M_6, I\}$ són L.I. , $\dim < M_6, I >= 2$

$\{M_7, I\}$ són L.I. , $\dim < M_7, I >= 2$

b)

Siga $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, resolem $M^2 - 2M - 3I = 0$:

$\begin{pmatrix} p^2 + q^2 - 2p - 3 & 2pq - 2q \\ 2pq - 2q & p^2 + q^2 - 2p - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Igualant els elements:

$\begin{cases} p^2 + q^2 - p - 3 = 0 \\ 2q(p-1) = 0 \end{cases}$ Resolent el sistema: $\begin{cases} p = -1 \\ q = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} p = 3 \\ q = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}$.

Les solucions són:

$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c)

Siga l'expai vectorial $< M, I >$ tal que $M^2 - 2M - 3I = 0$.

Siga $P \in < M, I >$, tal que $P^2 = P$

$P = a \cdot M + b \cdot I$, $a, b \in R$

$(a \cdot M + b \cdot I)^2 = a \cdot M + b \cdot I$

$a^2 \cdot M^2 + 2ab \cdot M + b^2 \cdot I = a \cdot M + b \cdot I$

Com que $M^2 = 2M + 3I$

$a^2 (2M + 3I) + 2ab \cdot M + b^2 \cdot I - a \cdot M - b \cdot I = 0$

$(2a^2 + 2ab - a)M + (3 + a^2 + b^2 - b)I = 0$

Per ser $\{M, I\}$ linealment independents:

$\begin{cases} 2a^2 + 2ab - a = 0 \\ 3a^2 + b^2 - b = 0 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} a = \frac{-1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$

Siga $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Siga $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Siga $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \frac{4}{b} & 1 \end{pmatrix}$ aleshores:

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{b}{4} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-b}{4} \\ \frac{-1}{b} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Siga $M_6 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1-\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc > 0$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$,

$P_8 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{-1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$

Siga $M_7 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{4-bc} & b \\ c & 1+\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$, $4-bc > 0$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_9 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$,

$P_{10} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}c & \frac{-1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{4-bc} \end{pmatrix}$

122.- En l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 2 considerem els subespais:

$L=\left\{\begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} / \ a,b,c\in R\right\}$, $\quad M=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$.

a) Determineu el subespai $L\cap M$ i comproveu que $L=L+M$ decidint, a més a més, si es tracta d'una suma directa.

b) Siga $B_L=\left\{u=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ una base de L i considerem l'aplicació $f:L\to L$ tal que $f(u)=v, f(v)=u, f(w)=w$. Determineu la matriu de f respecte de la base B_L i els subespais Ker f i Im f.

Oposicions Càceres 2002.

Solució:

$$L\cap M=\left\{A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in M_{2\times 2} \ / \ A\in L, A\in M\right\}$$

Si $A\in L$, $\begin{cases} x=a-b+2c \\ y=b-2c \\ z=0 \\ t=2c \end{cases}$ $\quad a,b,c\in R$.

Si $A\in M$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=d\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Aleshores:

$\begin{cases} x=d+e \\ y=-d+f \\ z=0 \\ t=-3-f \end{cases}$ $\quad a,b,c\in R$.

Eliminant els paràmetres a, b, c, d, e, f del sistema format per les 8 equacions:

$$\begin{cases} x+y+t=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$L\cap M=\left\{A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in M_{2\times 2} \ / \ \begin{cases} x+y+t=0 \\ z=0 \end{cases}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} -y-t & y \\ 0 & t \end{pmatrix} / \ y,t\in R\right\}$$

$\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de $L\cap M$, $\dim L\cap M=2$.

Provem que $L=L+M$.

$L\subset L+M$

Vegem que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\in L$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$ igualant els elements i resolent el sistema: $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$ igualant els elements i resolent el sistema: $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \\ c=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$ igualant els elements i resolent el sistema: $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$.

Aleshores. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in L$, per tant, $M \subset L$.

Aleshores, $L+M \subset L$.

$L = L+M$ no és suma directa ja que $L \cap M \neq \varnothing$.

b)

La matriu de l'aplicació lineal és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in L \;/\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\operatorname{Ker} f = \varnothing$.

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in L \;/\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in L \;/\; \begin{cases} a=y \\ b=x \\ c=z \end{cases} \right\}.$$

$\operatorname{Im} f = L$.

Aleshores l'aplicació f és un isomorfisme.

123.- Resoleu l'equació:
$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$.

Solució:

$\sin(x+y)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ (relacions dels angles dobles)

$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ (transformació de sumes en productes).

Aleshores:

$$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)=0.$$

Aleshores:

$\sin\frac{x+y}{2}=0$, $\frac{x+y}{2}=k\pi$, $k\in Z$. $x+y=2k\pi$, $k\in Z$.

O bé:

$\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}$. Per tant:

$\frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. $y=2k\pi$ $\forall x\in R$, $k\in Z$.

$\frac{x+y}{2}=-\frac{x-y}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. $x=2k\pi$ $\forall y\in R$, $k\in Z$.

124.- Proveu que si $a \geq b > 0$ i $\lambda > 0$

Aleshores es verifica: $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$

Quan s'assoleix la igualtat?.

Revista OIM problema 133.

Solució:

Provem que $\lambda ab \leq \lambda a^2$.

$\lambda a^2 - \lambda ab = \lambda a(a-b) \geq 0$.

Ja que si $a \geq b > 0$ i $\lambda > 0$ aleshores, $a - b \geq 0$.

Aleshores, $\lambda ab \leq \lambda a^2$.

La igualtat s'assoleix quan $a - b = 0$ ja que $a > 0$, i $\lambda > 0$

Provem que $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab$.

$\lambda ab - (\lambda+1)b^2 + a^2 = \lambda b(a-b) + (a+b)(a-b) = (a-b)(\lambda b + a + b) \geq 0$.

Ja que si $a \geq b > 0$ i $\lambda > 0$ aleshores, $a - b \geq 0$, $\lambda b + a + b > 0$.

Aleshores: $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab$.

La igualtat s'assoleix quan $a - b = 0$ ja que $\lambda b + a + b > 0$.

125.- Demostreu que $cx^2 - ax + b$ és un divisor comú de $ax^3 - bx^2 + c$ i $bx^3 - cx + a$ si divideix a un d'aquests dos polinomis.
Revista OIM problema 135.

Solució:
Amb les condicions del problema $a, b, c \neq 0$.

Al dividir $ax^3 - bx^2 + c$ entre $cx^2 - ax + b$ el quocient és $\frac{a}{c}x + \frac{a^2}{c^2} - \frac{b}{c}$ i el residu és:

$$r_1 = \left(\frac{a^3 - 2abc}{c^2}\right)x + \frac{c^3 - a^2b + b^2c}{c^2}.$$

Al dividir $bx^3 - cx + a$ entre $cx^2 - ax + b$ el quocient és $\frac{b}{c}x + \frac{ab}{c^2}$ i el residu és:

$$r_2 = -\left(\frac{c^3 - a^2b + b^2c}{c^2}\right)x + \frac{ac^2 - ab^2}{c^2}.$$

Si $ax^3 - bx^2 + c$ és múltiple de $cx^2 - ax + b$ el residu r_1 és 0, aleshores,

$$\begin{array}{l} \frac{a^3 - 2abc}{c^2} = 0 \\ \frac{c^3 - a^2b + b^2c}{c^2} = 0 \end{array} \quad \text{per tant,} \quad \begin{cases} a^2 - 2bc = 0 \\ c^3 - a^2b + b^2c = 0 \end{cases}.$$

Si $bx^3 - cx + a$ és múltiple de $cx^2 - ax + b$ el residu r_2 és 0, aleshores,

$$\begin{array}{l} -\frac{c^3 - a^2b + b^2c}{c^2} = 0 \\ \frac{ac^2 - ab^2}{c^2} = 0 \end{array} \quad \text{per tant,} \quad \begin{cases} c^2 - b^2 = 0 \\ c^3 - a^2b + b^2c = 0 \end{cases}.$$

Vegem que si $a^2 - 2bc = 0$ aleshores $c^2 - b^2 = 0$ i viceversa.

$c(c^2 - b^2) = c^3 - b^2c = a^2b - 2b^2c = b(a^2 - 2bc)$.
Com que $b, c \neq 0$,
$a^2 - 2bc = 0$ si i només si $c^2 - b^2 = 0$.

126.- Siga p un nombre real i les arrels del polinomi $x^3+2px^2-px+10$ estan en progressió aritmètica. Determineu les arrels.

Solució 1:
Siga $q(x)=x^3+2px^2-px+10$
Siguen $a-d, a, a+d$ les arrels del polinomi.
Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:
$3a=-2p$, aleshores, $a=\frac{-2p}{3}$
Com a és arrel del polinomi, $q(a)=0$, aleshores:

$$\left(\frac{-2p}{3}\right)^3+2p\left(\frac{-2p}{3}\right)^2-p\left(\frac{-2p}{3}\right)+10=0.$$

Simplificant:
$8p^3+9p^2+135=0$.
Aplicant la regla de Ruffini i factoritzant:
$(p+3)(8p^2-15p+45)=0$
Aleshores l'única solució d'aquesta equació és $p=-3$
Per tant, $q(x)=x^3-6x^2+3x+10$ i una solució d'aquesta és $a=\frac{-2p}{3}=2$.
Aplicant la Regla de Ruffini:
$q(x)=x^3-6x^2+3x+10=(x-2)(x+1)(x-5)$
Aleshores les arrels del polinomi inicial són:
$x=2, -1, 5$.

Solució 2:
Siga $q(x)=x^3+2px^2-px+10$
Siguen $a-d, a, a+d$ les arrels del polinomi.
Com el terme independent és distint de zero cap de les arrels pot ser zero, $a\neq 0$.
Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$\begin{cases}3a=-2p\\ a(a+d)(a-d)=-10\\ a(a+d)+a(a-d)+(a+d)(a-d)=-p\end{cases}$$

$$\begin{cases}3a=-2p\\ a(a^2-d^2)=-10\\ 3a^2-d^2=-p\end{cases}$$

De la segona equació: $d^2=a^2-\frac{10}{a}$ (1)
De la primera equació, $p=\frac{-3}{2}a$ (2)
Substituint les expressions (1) i (2) en la tercera equació del sistema:
$3a^2-a^2+\frac{10}{a}=\frac{3}{2}a$.
$4a^4-3a^2-20=0$.
Resolent l'equació amb la Regla de Ruffini:
$a=2, -1, 5$, les tres solucions arrels del polinomi q(x)

127.- Demostreu:

a) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$.

Solució:

a)

Siguen $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

$\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\beta<\frac{\pi}{4}$. Aleshores, $\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}=1.$$

$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ ja que $\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$.

b)

Siguen $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$, $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$.

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

$\alpha<\frac{\pi}{4}$, $\beta<\frac{\pi}{4}$, $\gamma<\frac{\pi}{4}$. Aleshores, $\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\operatorname{tg}\gamma}{1-\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\operatorname{tg}\gamma}=$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{4}}+\frac{1}{13}}{1-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{4}}\frac{1}{13}}=\frac{\frac{6}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{6}{7}\frac{1}{13}}=1.$$

$\alpha+\beta+\gamma=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$ ja que $\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{4}\pi$.

128.- Si $xy+yz+zx=1$, demostreu que:

a) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{2}{x+y+z-xyz}$.

b) $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$.

Demostració:

Si $xy+yz+zx=1$ aleshores, $z=\frac{1-xy}{x+y}$.

a)

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{\frac{1-xy}{x+y}}{1+\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2}=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{(1-xy)(x+y)}{(x+y)^2+(1-xy)^2}=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{x+y-x^2y-xy^2}{x^2+y^2+1+x^2y^2}=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{x+y-x^2y-xy^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{2(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$\frac{2}{x+y+z-xyz}=\frac{2}{x+y+\frac{1-xy}{x+y}-xy\frac{1-xy}{x+y}}=\frac{2(x+y)}{(x+y)^2+1-xy-xy(1-xy)}=$$

$$=\frac{2(x+y)}{x^2+y^2+1+x^2y^2}=\frac{2(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Per tant tenim la igualtat.

b)

$$\left(\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}\right)^2=\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=$$

$$=\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}=\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)\left(1+\left(\frac{1-xy}{x+y}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{4(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)\left((x+y)^2+(1-xy)^2\right)}=\frac{4(x+y)^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}=\sqrt{\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}=\sqrt{\frac{4(x+y)^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}}=$$

$$=\frac{2(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

129.- Determineu la relació entre x i u si:
$x^2 + y\cos^2\alpha = x\sin\alpha\cos\alpha$ i $x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = 0$ (es suposa que si y són no nuls).

Solució:

De la segona relació: $tg2\alpha = \frac{-x}{y}$, $\sin 2\alpha = \frac{-x}{y}\cos 2\alpha$.

Com que $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ i $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, $\cos x = \frac{1+`\cos 2\beta}{2}$.

La primera relació quedaria:

$x^2 + y\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}x\sin 2\alpha$.

$2x^2 + y + y\cos 2\alpha = x\sin 2\alpha$. Substituint, $\sin 2\alpha = \frac{-x}{y}\cos 2\alpha$:

$2x^2 + y + y\cos 2\alpha = \frac{-x^2}{y}\cos 2\alpha$.

$2x^2y + y^2 + y^2\cos 2\alpha = -x^2\cos 2\alpha$.

$(2x^2 + y)y = -(x^2 + y^2)\cos 2\alpha$.

Elevant al quadrat:

$(2x^2 + y)^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2\cos^2 2\alpha$.

Tenint en compte que $\cos^2\beta = \frac{1}{1+tg^2\beta}$:

$(2x^2 + y)^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 \frac{1}{1+tg^2 2\alpha}$.

Tenint en compte que $tg2\alpha = \frac{-x}{y}$:

$(2x^2 + y)^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 \frac{1}{1+\left(\frac{-x}{y}\right)^2}$.

$(2x^2 + y)^2 = x^2 + y^2$.

$4x^4 + 4x^2y + y^2 = x^2 + y^2$.

$4x^2 + 4y = 1$.

130.- Siga x un nombre tal que $x+\frac{1}{x}=-1$.

Calculeu $x^{1994}+\frac{-1}{x^{1994}}$.

Olimpíada de Xile 1994-95.

Solució:

Resolem l'equació $x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2+x+1=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Les solucions complexes en forma polar són: $x=1_{120^\circ}$, $x=1_{240^\circ}$

Siga $x=1_{120^\circ}$.

$x^{1994}+\frac{-1}{x^{1994}}=(1_{120^\circ})^{1994}-\frac{1}{(1_{120^\circ})^{1994}}=1_{120^\circ\cdot 1994}-1_{-120^\circ\cdot 1994}=$

$=1_{240^\circ}-1_{-240^\circ}=\cos 240^\circ+i\cdot\sin 240^\circ-(\cos(-240^\circ)+i\cdot\sin(-240^\circ))=$

$=2\sin 240^\circ\cdot i=-\sqrt{3}i$.

Siga $x=1_{240^\circ}$.

$x^{1994}+\frac{-1}{x^{1994}}=(1_{240^\circ})^{1994}-\frac{1}{(1_{-240^\circ})^{1994}}=1_{240^\circ\cdot 1994}-1_{-240^\circ\cdot 1994}=$

$=1_{120^\circ}-1_{-120^\circ}=\cos 120^\circ+i\cdot\sin 120^\circ-(\cos(-120^\circ)+i\cdot\sin(-120^\circ))=$

$=2\sin 120^\circ\cdot i=\sqrt{3}i$.