

Problemes àlgebra 13

121.- Siga M una matriu quadrada d'ordre 2 i coeficients reals, verificant la igualtat:

$$M^2 - 2M - 3I = 0 \quad (1) \text{ on } I \text{ és la matriu unitat d'ordre 2.}$$

Siga $M_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial sobre el cos \mathbb{R} format per totes les matrius quadrades d'ordre 2. Siga V el subespai engendrat per M i I .

a) Determineu totes les matrius que verifiquen la relació (1) i tals que la dimensió de V siga 1.

b) Determineu totes les solucions de l'equació (1) de la forma $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

c) Es suposa que M verifica (1) i és distinta de les matrius de l'apartat a).

Determineu en V totes les matrius que verifiquen $P^2 = P$.

Oposicions Cantàbria 2006.

122.- En l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 2 considerem els subespais:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Determineu el subespai $L \cap M$ i comproveu que $L = L + M$ decidint, a més a més, si es tracta d'una suma directa.

b) Siga $B_L = \left\{ u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de L i considerem

l'aplicació $f: L \rightarrow L$ tal que $f(u) = v$, $f(v) = u$, $f(w) = w$. Determineu la matriu de f respecte de la base B_L i els subespais $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

Oposicions Càceres 2002.

123.- Resoleu l'equació:

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y.$$

124.- Proveu que si $a \geq b > 0$ i $\lambda > 0$

$$\text{Aleshores es verifica: } (\lambda + 1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$$

Quan s'assoleix la igualtat?.

Revista OIM problema 133.

125.- Demostreu que $cx^2 - ax + b$ és un divisor comú de $ax^3 - bx^2 + c$ i $bx^3 - cx + a$ si divideix a un d'aquests dos polinomis.

Revista OIM problema 135.

126.- Siga p un nombre real i les arrels del polinomi $x^3 + 2px^2 - px + 10$ estan en progressió aritmètica. Determineu les arrels.

127.- Demostreu:

$$\text{a) } \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{b) } \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{1}{13} = \frac{\pi}{4}.$$

128.- Si $xy + yz + zx = 1$, demostreu que:

a)
$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{2}{x+y+z-xyz}.$$

b)
$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}.$$

129.- Determineu la relació entre x i u si:

$x^2 + y \cos^2 \alpha = x \sin \alpha \cos \alpha$ i $x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha = 0$ (es suposa que si y són no nuls).

130.- Siga x un nombre tal que $x + \frac{1}{x} = -1$.

Calculeu $x^{1994} + \frac{-1}{x^{1994}}$.

Olimpiada de Xile 1994-95.