

131.- Si $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a - b = 1$, aleshores, $a^3 - b^3 \geq \frac{1}{4}$.

Solució:

Aplicant que $a - b = 1$:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 1(a^2 + ab + b^2) = a^2 + ab + b^2$$

$$a = 1 + b.$$

$$a^2 + ab + b^2 = (1 + b)^2 + (1 + b)b + b^2 = 3b^2 + 3b + 1 = 3\left(b^2 + b + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 3\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Aleshores, } a^3 - b^3 = a^2 + ab + b^2 \geq \frac{1}{4}.$$

132.- Proveu que $10a + b$ és múltiple de 7 si i només si $a - 2b$ és múltiple de 7.

Solució:

(\Rightarrow)

Si $10a + b$ és múltiple de 7 aleshores, $3a + b$ és múltiple de 7.

Aleshores $3(3a + b)$ és múltiple de 7.

$10a + b - 3(3a + b)$ és múltiple de 7.

$a - 2b$ és múltiple de 7.

(\Leftarrow)

Si $a - 2b$ és múltiple de 7, aleshores, $a - 2b = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$a = 2b + 7k$.

$10a + b = 10(2b + 7k) + b = 21b + 70k = 7(3b + 10k)$.

Aleshores, $10a + b$ és múltiple de 7.

133.- Discussiu i resoleu el següent sistema (en els nombres reals) segons els valors del nombre real a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Solució:

Factoritzant la primera equació:

$$\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Un producte és zero si algun dels factors és zero. La solució del sistema es transforma en les possibles solucions de dos sistemes:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x - y = 0 \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Considerem el primer sistema. Aïllant la incògnita y i substituint en la segona equació:

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La solució de la segona equació depèn del signe del discriminant de l'equació:

$$\Delta = 8 - 4a^2$$

Si $\Delta > 0$ té dues solucions reals distintes, $8 - 4a^2 > 0$ resolent la inequació, si $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

En aquest cas les solucions són:

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \\ y = -\frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2} \\ y = -\frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2} \end{cases}$$

Si $\Delta = 0$ té una solució real doble distintes, $8 - 4a^2 = 0$ resolent l'equació, si $a = \sqrt{2}$ o bé $a = -\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

Si $\Delta < 0$ no té solució real, $8 - 4a^2 < 0$ resolent la inequació, quan $a > \sqrt{2}$ o bé quan $a < -\sqrt{2}$.

Considerem el segon sistema. Aïllant la incògnita y i substituint en la segona equació:

$$\begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La solució de la segona equació depèn del signe del discriminant de l'equació:

$$\Delta = 8 - 4a^2$$

Si $\Delta > 0$ té dues solucions reals distintes, $8 - 4a^2 > 0$ resolent la inequació, si $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

En aquest cas les solucions són:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \\ y = \frac{a + \sqrt{2 - a^2}}{2} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2} \\ y = \frac{a - \sqrt{2 - a^2}}{2} \end{array} \right\}.$$

Si $\Delta = 0$ té una solució real doble distintes, $8 - 4a^2 = 0$ resolent l'equació, si $a = \sqrt{2}$ o bé $a = -\sqrt{2}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \end{array} \right\}.$$

Si $\Delta < 0$ no té solució real, $8 - 4a^2 < 0$ resolent la inequació, quan $a > \sqrt{2}$ o bé quan $a < -\sqrt{2}$.

Notem que la primera equació és la cònica degenerada formada per les rectes $y = x$, $y = -x$. Les dues rectes són perpendiculars i simètriques respecte de l'eix d'abscisses.

La segona equació és una circumferència de centre $C(a, 0)$ i radi 1. La circumferència és simètrica respecte de l'eix d'abscisses.

El sistema no té solució si la circumferència no talla les rectes, és a dir, si la distància del centre C a les dues rectes és major que 1.

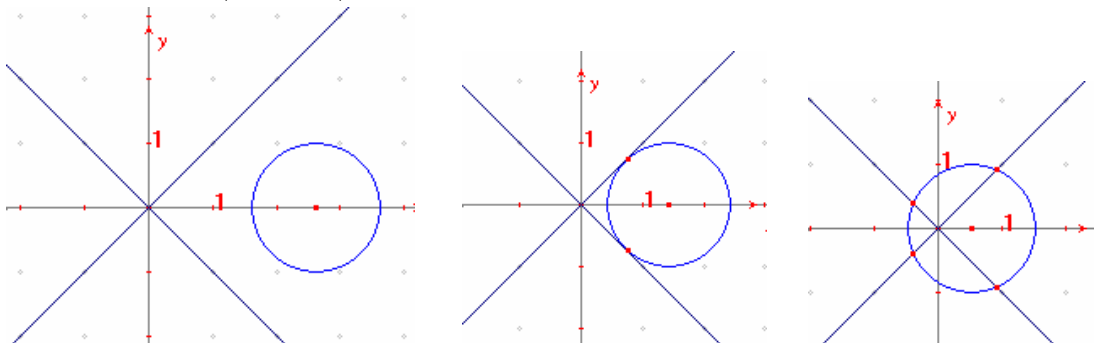
S'assoleix quan $\left| \frac{a \pm 0}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| > 1$ és a dir quan $a > \sqrt{2}$ o bé quan $a < -\sqrt{2}$.

El sistema té dues solucions quan la circumferència és tangent a les dues rectes, és a dir, si la distància del centre C a les dues rectes és igual a 1.

S'assoleix quan $\left| \frac{a \pm 0}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = 1$ és a dir quan $a = \sqrt{2}$ o bé quan $a = -\sqrt{2}$.

El sistema té 4 solucions si la circumferència és secant a les 2 rectes, és a dir, si la distància del centre C a les dues rectes és menor que 1.

S'assoleix quan $\left| \frac{a \pm 0}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| < 1$ és a dir quan $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.



134.- Siguen a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 , cinc nombres positius en progressió aritmètica de raó d .

Proveu que:

$$a_2^3 \leq \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

Olimpíada espanyola 2007.

Solució:

$$a_0 = a_2 - 2d, \quad a_1 = a_2 - d, \quad a_2, \quad a_3 = a_2 + d, \quad a_4 = a_2 + 2d$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3) &= \frac{1}{10}((a_2 - 2d)^3 + 4(a_2 - d)^3 + 4(a_2 + d)^3 + (a_2 + 2d)^3) = \\ &= \frac{1}{10}(10a_2^3 + 48a_2d^2) \geq \frac{1}{10}10a_2^3 = a_2^3 \quad \text{ja que per hipòtesi } a_2 > 0 \text{ i tenim que } d^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Aleshores, } a_2^3 \leq \frac{1}{10}(a_0^3 + 4a_1^3 + 4a_3^3 + a_4^3).$$

135.- Resoleu en els nombres reals l'equació:

$$\log\left(x + \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right) = -\log\left(x - \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right).$$

Crux Mathematicorum 33, 3.

Solució:

$$\log\left(x + \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right) + \log\left(x - \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right) = 0$$

$$\log\left(\left(x + \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right)\left(x - \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right)\right) = 0$$

$$\left(x + \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right)\left(x - \sqrt{5x - \frac{13}{4}}\right) = 1$$

$$x^2 - \left(5x - \frac{13}{4}\right) = 1.$$

Simplificant:

$$4x^2 - 20x + 9 = 0.$$

Resolent l'equació: $x = \frac{9}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

Vegem si són solucions de l'equació inicial:

$$\text{Si } x = \frac{9}{2}, \quad \frac{9}{2} + \sqrt{5\frac{9}{2} - \frac{13}{4}} = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{77}{4}} > 0, \quad \frac{9}{2} - \sqrt{5\frac{9}{2} - \frac{13}{4}} = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{77}{4}} > 0.$$

Aleshores, $x = \frac{9}{2}$ és solució:

$$\text{Si } x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{2} - \frac{13}{4}} = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}} \notin \mathbb{R}.$$

Aleshores, $x = \frac{1}{2}$ no és solució.

136.- Demostreu que $\operatorname{ctg}70^\circ + 4 \cos 70^\circ = \operatorname{tg}60^\circ$.

Solució:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg}70^\circ + 4 \cos 70^\circ &= \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} + 4 \cos 70^\circ = \\
 &= \frac{\cos 70^\circ + 4 \sin 70^\circ \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 70^\circ + 2 \sin 140^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 70^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 70^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 70^\circ + \cos 50^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 50^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= \frac{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \\
 &= 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} = \operatorname{tg}60^\circ
 \end{aligned}$$

137.- Resoleu el sistema en els nombres reals:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} = 3 \\ x^2\sqrt{x} + y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} = 3 \end{cases} .$$

Crux Mathematicorum M305.

Solució:

Notem que $x, y, z > 0$. Si $x = 0$ el sistema $\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ y\sqrt{y} + z\sqrt{z} = 3 \\ y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} = 3 \end{cases}$ no té solució real.

Siguen $a = \sqrt{x} > 0$, $b = \sqrt{y} > 0$, $c = \sqrt{z} > 0$.

Els sistema quedaria: $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \\ a^5 + b^5 + c^5 = 3 \end{cases}$.

Efectuem el canvi $u = a + b$, $v = ab$. $u > 0$, $v > 0$.

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Aleshores $a^3 + b^3 = u^3 - 3uv$

$c = 3 - u$. Aleshores, $c^3 = -u^3 + 9u^2 - 27u + 27$

$(a + b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a^3 + b^3) + 10(ab)^2(a + b)$. Aleshores

$a^5 + b^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$

$c = 3 - u$. Aleshores, $c^5 = -u^5 + 15u^4 - 90u^3 + 270u^2 - 405u + 243$

Substituint en la segona i tercera equació:

$$\begin{cases} 3u^2 - 9u - uv = -8 \\ 3u^4 - 18u^3 + 54u^2 - 81u + uv^2 - u^3v = -48 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ 3u^4 - 18u^3 + 54u^2 - 81u + u\left(\frac{3u^2 - 9u + 8}{u}\right)^2 - u^3\left(\frac{3u^2 - 9u + 8}{u}\right) = -48 \end{cases} .$$

Simplificant:

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ u^3 - 6u^2 + 12u - 8 = 0 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ (u - 2)^3 = 0 \end{cases} . \text{ Resolent el sistema: } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} .$$

Aleshores: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1, \text{ Per tant,} \\ c = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

138.- Calcular $\sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$.

Crux Mathematicorum M316.

Solució:

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k}}{(k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k})(k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k})} = \frac{-k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}{(k+1)k}.$$

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}.$$

$$\sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \sum_{1 \leq k \leq 99} \left(\frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} \right) = \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k}}{k} - \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k}}{k} - \sum_{2 \leq k \leq 100} \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{100}}{100} = \frac{9}{10}.$$

139.- Siguen x, y, z tres nombres reals positius tals que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Proveu que $x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$.

Solució:

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica dels nombres positius x^2, y^2, z^2 :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2}. \text{ Aleshores, } \sqrt[3]{(xyz)^2} \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Aleshores, } xyz \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica dels nombres positius x^2, y^2 :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2}, \text{ aleshores, } x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ anàlogament,}$$

$$x^2 + z^2 \geq 2xz, \quad y^2 + z^2 \geq 2yz.$$

Sumant les tres desigualtats:

$$2 \geq 2(xy + xz + yz)$$

$$xy + xz + yz \leq 1$$

$$(x + y + z)^2 = 1 + 2(xy + xz + yz) \leq 3$$

$$\text{Aleshores, } x + y + z \leq \sqrt{3} \quad (2)$$

Aplicant les desigualtats (1) i (2):

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz(x + y + z) \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{3} = \frac{1}{3}.$$

140.- Determineu les solucions reals (x,y) de l'equació

$$20 \sin x - 21 \cos x = 81y^2 - 18y + 30.$$

Crux Mathematicorum M323.

Solució:

Considerem la funció $f(y) = 81y - 18y + 30$.

La funció és una paràbola el seu valor mínim és el vèrtex, que es troba en

$$y = \frac{18}{2 \cdot 81} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Aleshores, } f(y) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = 29.$$

Considerem la funció $g(x) = 20 \sin x - 21 \cos x$.

Determinem els màxims de la funció:

$$g'(x) = 20 \cos x + 21 \sin x.$$

$$g'(x) = 0.$$

$$20 \cos x + 21 \sin x = 0.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-20}{21}.$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{-20}{21}\right) = \frac{-20}{29}, \quad \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{-20}{21}\right) = \frac{21}{29}$$

$$g''(x) = -20 \sin x + 21 \cos x$$

$$g''\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + 2k\pi\right) = -20 \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right)\right) + 21 \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right)\right) > 0$$

Aleshores, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + 2k\pi$ és un mínim.

$$g''\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi\right) = -20 \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi\right) + 21 \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi\right) < 0$$

Aleshores, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi$ és un màxim.

$$g\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi\right) = 29$$

Per tant, $g(x) \leq 29$.

L'equació $20 \sin x - 21 \cos x = 81y^2 - 18y + 30$ té solució quan $g(x) = 29$, $f(y) = 29$.

És a dir, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi$, $y = \frac{1}{9}$.

$$(x, y) = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + (2k+1)\pi, \frac{1}{9}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$