

Problemes d'Àlgebra 15

141.- Demostreu que no existeixen enters a, b, c, d tal que el polinomi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) compleixca $P(4) = 1$ i $P(7) = 2$.
Olimpíada espanyola 2008 fase local.

Solució:

$$P(4) = 1, \text{ aleshores, } 64a + 16b + 4c + d = 1 \quad (1)$$

$$P(7) = 2, \text{ aleshores, } 343a + 49b + 7c + d = 2 \quad (2)$$

Restant ambdues expressions:

$$279a + 33b + 3c = 1.$$

$$3(93a + 11b + c) = 1.$$

Aleshores, $93a + 11b + c = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, la qual cosa és absurda ja que $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

142.- Determineu el parell (x, y) de nombres tal que $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$.

Crux Mathematicorum M353.

Solució:

$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$$

Notem que $x, y \neq 0$.

Eliminant els denominadors:

$$x^2y^2 + y + x = 1 + x^2y + xy^2$$

$$x^2(y^2 - y) + y - 1 - x(y^2 - 1) = 0$$

$$x^2(y - 1)y + y - 1 - x(y + 1)(y - 1) = 0$$

$$(y - 1)(yx^2 - (y + 1)x + 1) = 0$$

Per tant, $y - 1 = 0$, o bé, $yx^2 - (y + 1)x + 1 = 0$

Si $y - 1 = 0$, aleshores, la solució és $y = 1$, $x = \alpha$.

Si $yx^2 - (y + 1)x + 1 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita x :

$$x = \frac{y + 1 + \sqrt{(y + 1)^2 - 4y}}{2y} = 1, \text{ aleshores, la solució és } x = 1 \text{ y } y = \alpha.$$

$$x = \frac{y + 1 - \sqrt{(y + 1)^2 - 4y}}{2y} = \frac{1}{y}$$

Les solucions són:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha \right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\},$$

$$(x, y) = (1, \alpha), \quad (x, y) = \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\},$$

$$(x, y) = (\alpha, 1), \quad (x, y) = \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\}$$

143.- Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:
 $ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) \geq 3abc$.

Crux Mathematicorum M361.

Solució:

$$\begin{aligned} ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) &= abc \frac{a+b-c}{c} + abc \frac{b+c-a}{a} + abc \frac{c+a-b}{b} = \\ &= abc \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} - 1 \right) = \\ &= abc \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 3 \right) \geq abc(2 + 2 + 2 - 3) = 3abc \end{aligned}$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

Nota:

Si $a, c > 0$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ i la igualtat s'assoleix quan $a = c$.

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{ac} = \frac{(a - c)^2}{ac} \geq 0, \text{ i la igualtat s'assoleix si } a - c = 0.$$

Aleshores, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$.

144.- Siguen p, q, r les arrels de l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Trobeu una equació quadràtica que les arrels siguin $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Crux Mathematicorum M366.

Solució:

Aplicant las fórmules de Cardano-Vieta a l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$pqr = -d$$

$$pq + pr + qr = c \quad (1)$$

$$p + q + r = -b \quad (2)$$

Siga $x^2 + mx + n = 0$ l'equació de segon grau que té per arrels $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Determinem m, n en funció de b, c, d .

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-m = (p^2 + q^2 + r^2) + (p + q + r) \quad (3)$$

$$n = (p^2 + q^2 + r^2)(p + q + r) \quad (4)$$

$$(-b)^2 = (p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + pr + qr)$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = b^2 - 2(pq + pr + qr).$$

Per tant,

$$p^2 + q^2 + r^2 = b^2 - 2c \quad (5)$$

Substituint les expressions (2) i (5) en les expressions (3) i (4):

$$-m = (p^2 + q^2 + r^2) + (p + q + r) = b^2 - 2c - b$$

$$n = (p^2 + q^2 + r^2)(p + q + r) = (b^2 - 2c)(-b)$$

Per tant:

$$m = -b^2 + 2c + b.$$

$$n = -b^3 + 2bc.$$

L'equació que cerquem és:

$$x^2 + (-b^2 + 2c + b)x - b^3 + 2bc = 0.$$

145.- Siguen a, b, c tres nombres reals positius tal que $a + b + c = 6$.

Determineu el valor màxim possible de $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

Crux Mathematicorum M367.

Solució:

Nota 1 Desigualtat entre la mitjana aritmètica y geomètrica:

Si $x, y > 0$, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ i la igualtat s'assoleix quan $x = y$.

Aplicant la nota 1:

$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq a\frac{b+c}{2} + b\frac{a+c}{2} + c\frac{a+b}{2}$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq ab + ac + bc \quad (1)$$

Aplicant la nota 1:

$$a^2 + b^2 \leq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

$$a^2 + c^2 \leq 2ac$$

$$b^2 + c^2 \leq 2bc$$

Sumant la tres desigualtats:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \leq 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + ac + bc \quad (2)$$

$$6^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Aplicant l'expressió (2):

$$36 \leq 3(ab + ac + bc)$$

$ab + ac + bc \leq 12$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

Per tant, $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq ab + ac + bc \leq 12$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c = 2$.

146.- Determineu totes les ternes de nombres reals (x, y, z) tal que

$$\begin{cases} x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 3 \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3 \\ x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} = 3 \end{cases}$$

Gaceta matemática 120.

Solució:

Restant la segona menys la primera equació:

$$x^{2008}(x-1) + y^{2008}(y-1) + z^{2008}(z-1) = 0 \quad (1)$$

Restant la tercera menys la segona equació:

$$x^{2009}(x-1) + y^{2009}(y-1) + z^{2009}(z-1) = 0 \quad (2)$$

Restant l'expressió (2) menys l'expressió (1):

$$x^{2008}(x-1)^2 + y^{2008}(y-1)^2 + z^{2008}(z-1)^2 = 0 \quad (3)$$

Notem que els sumands de l'expressió (3) són positius o zero.

Aleshores tots els sumands són zero.

Les possibles solucions per als valors de les incògnites són 0 o bé 1.

Si $x = 0, y = 0, z = 0$ aquesta solució no satisfà el sistema inicial.

Si $x = 0, y = 0, z = 1$ aquesta solució no satisfà el sistema inicial. Qualsevol altra solució amb dues solucions 0 i una 1, no satisfà el sistema inicial.

Si $x = 0, y = 1, z = 1$ aquesta solució no satisfà el sistema inicial. Qualsevol altra solució amb dues solucions 1 i una 0, no satisfà el sistema inicial.

Si $x = 1, y = 1, z = 1$ aquesta solució satisfà el sistema inicial.

147.- Siguen a, b, c nombres reals. Demostreu que

$V = 4(a^2 + b^2 + c^2) - ((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2)$ és sempre no negatiu i determineu tots els valors de a, b, c per als quals $V = 0$.

Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

Solució:

$$\begin{aligned} V &= 4(a^2 + b^2 + c^2) - ((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2) = \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2bc + c^2 + a^2 + 2ac) = \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - (2ab + 2bc + 2ac) = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + a^2 + c^2 - 2ac = \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$V = 0$ si $a = b = c$.

148.- Determineu totes les solucions reals del sistema d'equacions

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad xyz = \frac{9}{2}.$$

Crux Mathematicorum M375.

Solució:

Si $xyz = \frac{9}{2}$ aleshores, $x, y, z \neq 0$.

Multiplicant la primera expressió per $x^2 y^2 z^2 \neq 0$.

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4x^2 y^2 z^2.$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 81 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2 z^2}{81} - \frac{2}{27}xyz \quad (2)$$

$$\left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 = \frac{y^2}{9} + \frac{4x^2 z^2}{81} - \frac{4}{27}xyz \quad (3)$$

$$\left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{z^2}{9} + \frac{9y^2 x^2}{81} - \frac{6}{27}xyz \quad (4)$$

Sumant les expressions (2) (3) (4):

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{81}(9x^2 y^2 + 4x^2 z^2 + y^2 z^2) - \frac{12}{27}xyz$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}9 + \frac{1}{81}81 - \frac{12}{27} \frac{9}{2}$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = 0$$

Aleshores els tres sumands són zero:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{yz}{9} = 0 \\ \frac{y}{3} - \frac{2xz}{9} = 0. \\ \frac{z}{3} - \frac{3xy}{9} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - yz = 0 \\ 3y - 2xz = 0. \\ z - xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = xy \\ 3x - xy^2 = 0 \end{cases} \text{ . Com } x, y, z \neq 0, \text{ aleshores:} \\ 3y - 2x^2y = 0$$

$$\begin{cases} z = xy \\ 3 - y^2 = 0 \end{cases} \text{ . Aleshores les solucions del sistema són:} \\ 3 - 2x^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = \sqrt{3} \\ z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = \sqrt{3} \\ z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} .$$

149.- Siguen a, b, c tres nombres positius tal que $abc = 1$. Proveu que
 $2(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c \geq 6 + ab + bc + ca$.
 Excalibur 12, 2.

Solució:

Aplicat la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

$$a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{a^2c^2} = 2ac$$

$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2c^2} = 2bc$$

Sumant les tres expressions:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (1)$$

Aplicat la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3\sqrt[3]{1^2} = 3 \quad (2)$$

Aplicat la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{1} = 3 \quad (3)$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c = (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c).$$

Aplicant (1) (2) i (3):

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + a + b + c \geq 3 + ab + bc + ca + 3 = 6 + ab + bc + ca.$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c = 1$.

150.- Si a, b, c son nombres reals positius proveu:

$$a) \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c.$$

$$b) \frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc.$$

Solució:

$\frac{a^3}{b^2}, b, b$ són positius. Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}bb} = 3a.$$

Anàlogament, $\frac{b^3}{c^2} + c + c \geq 3b$, $\frac{c^3}{a^2} + a + a \geq 3c$.

Sumant les tres desigualtats:

$$\frac{a^3}{b^2} + 2b + \frac{b^3}{c^2} + 2c + \frac{c^3}{a^2} + 2a \geq 3(a + b + c).$$

Aleshores, $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$.

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

b)

$a^3, a^3, b^2, b^2, b^2, c^6$ són positius. Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^6}{6} = \frac{a^3 + a^3 + b^2 + b^2 + b^2 + c^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^3 a^3 b^2 b^2 b^2 c^6} = abc.$$

Aleshores, $\frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$.

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.