Problemes àlgebra 16

151.- Resoleu l'equació $\left(10^{2009}+25\right)^2-\left(10^{2009}-25\right)^2=10^x$.
Crux Mathematicorum M376

Solució:

$\left(10^{2009}+25\right)^2-\left(10^{2009}-25\right)^2=10^x$.

$\left(10^{2009}+25+10^{2009}-25\right)\left(10^{2009}+25-\left(10^{2009}-25\right)\right)=10^x$.

$\left(2\cdot 10^{2009}\right)50=10^x$.

$100\cdot 10^{2009}=10^x$.

$10^{2011}=10^x$.

Per tant, $x=2011$.

152.- Resoleu l'equació $x^2 - y^4 = 2009$ en els nombres enters.
Olimpíada espanyola 2009.

Solució.
$(x+y^2)(x-y^2) = 7^2 \cdot 41$

Notem que $x+y^2 \geq x-y^2$.

Per ser els dos factors enters, poden passar els següents casos:
$\begin{cases} x-y^2 = 1 \\ x+y^2 = 2009 \end{cases}$, que no té solució entera, $\begin{cases} x = 1005 \\ y^2 = 1004 \end{cases}$.
$\begin{cases} x-y^2 = 7 \\ x+y^2 = 287 \end{cases}$, que no té solució entera, $\begin{cases} x = 147 \\ y^2 = 140 \end{cases}$.
$\begin{cases} x-y^2 = 41 \\ x+y^2 = 49 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 45 \\ y^2 = 4 \end{cases}$, aleshores, les solucions són: $\begin{cases} x = 45 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 45 \\ y = -2 \end{cases}$.

$\begin{cases} x-y^2 = -2009 \\ x+y^2 = -1 \end{cases}$, que no té solució entera, $\begin{cases} x = -1005 \\ y^2 = 1004 \end{cases}$.
$\begin{cases} x-y^2 = -287 \\ x+y^2 = -7 \end{cases}$, que no té solució entera, $\begin{cases} x = -147 \\ y^2 = 140 \end{cases}$.
$\begin{cases} x-y^2 = -49 \\ x+y^2 = -41 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -45 \\ y^2 = 4 \end{cases}$, aleshores, les solucions són: $\begin{cases} x = -45 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -45 \\ y = -2 \end{cases}$.

153.- Resoleu el següent sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2-y^2-z^2=2 \\ x-3y^2+z=0 \end{cases}.$$

Solució:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2-y^2-z^2=2 \\ x-3y^2+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=2-y \\ x^2-y^2-z^2=2 \\ -3y^2-y+2=0 \end{cases}.$$

Resolent l'última equació: $y=-1$, $y=\frac{2}{3}$.

Primer cas

$$\begin{cases} x+z=3 \\ x^2-z^2=3 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=3 \\ (x+z)(x-z)=3 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=3 \\ x-z=1 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Segon cas

$$\begin{cases} x+z=\frac{4}{3} \\ x^2-z^2=\frac{22}{9} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=\frac{4}{3} \\ (x+z)(x-z)=\frac{22}{9} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+z=\frac{4}{3} \\ x-z=\frac{11}{6} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{19}{12} \\ z=\frac{-1}{4} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}.$$

154.- Determineu els parells (x, y) d'enters tals que $4x^2 - y^2 = 480$.
Crux Mathematicorum M382.

Solució:

$4x^2 - y^2 = 480$.

$y^2 = 4x^2 - 480$.

Per tant, y^2 és múltiple de 4. Per tant y és múltiple de 2.

$y = 2k$.

$4x^2 - (2k)^2 = 480$. Simplificant:

$x^2 - k^2 = 120$

$(x+y)(x-y) = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

$x+k, x-k$ tenen la mateixa congruència mòdul 2, i el seu producte és parell aleshores, $x+k, x-k$ els dos són parells.

Els possibles resultats són:

a) $\begin{cases} x+k=2 \\ x-k=60 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=31 \\ k=-29 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=31 \\ y=-58 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x+k=-2 \\ x-k=-60 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-31 \\ k=29 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-31 \\ y=58 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x+k=4 \\ x-k=30 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=17 \\ k=-13 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=17 \\ y=-26 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x+k=-4 \\ x-k=-30 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-17 \\ k=13 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-17 \\ y=26 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} x+k=60 \\ x-k=2 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=31 \\ k=29 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=31 \\ y=58 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x+k=-60 \\ x-k=-2 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-31 \\ k=-29 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-31 \\ y=-58 \end{cases}$.

g) $\begin{cases} x+k=30 \\ x-k=4 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=17 \\ k=13 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=17 \\ y=26 \end{cases}$.

h) $\begin{cases} x+k=-30 \\ x-k=-4 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-17 \\ k=-13 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-17 \\ y=-26 \end{cases}$.

i) $\begin{cases} x+k=6 \\ x-k=20 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=13 \\ k=-7 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=13 \\ y=-14 \end{cases}$.

j) $\begin{cases} x+k=-6 \\ x-k=-20 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-13 \\ k=7 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-13 \\ y=14 \end{cases}$.

k) $\begin{cases} x+k=10 \\ x-k=12 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=11 \\ k=-1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=11 \\ y=-2 \end{cases}$.

l) $\begin{cases} x+k=-10 \\ x-k=-12 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=-11 \\ k=1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=-11 \\ y=2 \end{cases}$.

155.- Determineu tots els nombres reals pels quals
$\sqrt{2+4x-2x^2}+\sqrt{6+6x-3x^2}=x^2-2x+6$
Crux Mathematicorum M386

Solució:
$f(x)=\sqrt{2+4x-2x^2}$ està definida en $x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$ és convexa i té un màxim en $x=1$.
Aleshores, $\sqrt{2+4x-2x^2}\leq\sqrt{2+4\cdot 1-2\cdot 1^2}=2$.

$g(x)=\sqrt{6+6x-3x^2}$ està definida en $x\in\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]$ és convexa i té un màxim en $x=1$.
Aleshores, $\sqrt{6+6x-3x^2}\leq\sqrt{6+6\cdot 1-3\cdot 1^2}=3$.

Les solucions de l'equació estan en $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]\cap\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]=\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$.

Considerem la funció $h(x)=x^2-2x+6$ és una paràbola còncava, té un mínim en $x=1$.
$x^2-2x+6\geq 1^2-2\cdot 1+6=5$.
Siga l'equació $f(x)+g(x)=h(x)$, $x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$.
$f(x)+g(x)\leq 5$, $\forall\ x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$, $f(1)+g(1)=5$,
$f(x)+g(x)<5$, $\forall\ x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]\sim\{1\}$.

$h(x)\geq 5$, $\forall\ x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$, $h(1)=5$.
$h(x)>5$, $\forall\ x\in\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]\sim\{1\}$.

Per tant l'única solució de l'equacióés $x=1$.

156.- Determineu totes les solucions de l'equació:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x-6}+\frac{7}{x-7}=x^2-4x-4$$

Crux Mathematicorum M381.

Solució:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x-6}+\frac{7}{x-7}=x^2-4x-4.$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x-6}+\frac{7}{x-7}+4=x^2-4x.$$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-6}+\frac{x}{x-7}=x^2-4x.$$

$$x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-7}\right)-x(x-4)=0$$

$$x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-7}-(x-4)\right)=0.$$

Aleshores, $x=0$.

O bé:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-7}-(x-4)=0.$$

Efectuem el canvi $x-4=t$:

$$\frac{1}{t+3}+\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t-3}-t=0.$$

$$\frac{2t}{(t+3)(t-3)}+\frac{2t}{(t+2)(t-2)}-t=0.$$

$$t\left(\frac{2}{(t+3)(t-3)}+\frac{2}{(t+2)(t-2)}-1\right)=0.$$

Aleshores, $t=0$, és a dir, $x=4$.

O bé:

$$\frac{2}{(t+3)(t-3)}+\frac{2}{(t+2)(t-2)}-1=0$$

$$\frac{t^4-17t^2+62}{(t+3)(t-3)(t+2)(t-2)}=0$$

Aleshores, $t^4-17t^2+62=0$, resolent l'equació biquadrada:

$$t=\pm\sqrt{\frac{17\pm\sqrt{41}}{2}}.$$

Desfent el canvi, l'equació inicial té 6 solucions:

$x=0$, $x=4$, $x=4+\sqrt{\frac{17+\sqrt{41}}{2}}$, $x=4-\sqrt{\frac{17+\sqrt{41}}{2}}$, $x=4+\sqrt{\frac{17-\sqrt{41}}{2}}$,

$x=4-\sqrt{\frac{17-\sqrt{41}}{2}}$.

157.- Si a, b, c són tres reals positius, demostreu que $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$.

Solució

$\frac{a+b}{c},\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b}>0$, aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}}$$

La igualtat s'assoleix quan:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b},\quad a(a+b)=c(b+c),\quad a(a+b)=c(c+a).$$

Dividint les expressions:

$$\frac{a}{b}=\frac{b+c}{a+c},\quad \frac{a}{b}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1,\ a=b$$

Per tant, la igualtat s'assoleix quan $a=b=c$.

$\frac{a}{c},\frac{b}{c}>0$, aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c^2}}$, la igualtat s'assoleix quan $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, és a dir, quan $a=b$.

Anàlogament, $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}}$, $\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{ac}{b^2}}$, Les igualtats s'assoleixen quan $a=b=c$.

Aleshores,

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}\cdot\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}}\geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{\frac{ab}{c^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{ac}{b^2}}}\geq 3\sqrt[3]{8}=6.$$

La igualtat s'assoleix quan $a=b=c$.

158.- Siguen a, b, x, y, z nombres reals que compleixen:

$$a+b=6$$
$$ax+by=10$$
$$ax^2+by^2=24$$
$$ax^3+by^3=62$$

Determineu el valor de ax^4+by^4.

Mathscope 235.1

Solució:

$$ax^3+by^3=62$$
$$\left(ax^3+by^3\right)(x+y)=62(x+y)$$
$$ax^4+by^4+ax^3y+bxy^2=62(x+y)$$
$$ax^4+by^4=62(x+y)-xy\left(ax^2+by^2\right)$$
$$ax^4+by^4=62(x+y)-12xy \qquad (1)$$

$$ax+by=10$$
$$(ax+by)(x+y)=10(x+y)$$
$$ax^2+by^2+axy+bxy=10(x+y)$$
$$24+xy(a+b)=10(x+y)$$
$$24+6xy=10(x+y)$$
$$3xy-10(x+y)=-12 \qquad (2)$$

$$ax^2+by^2=24$$
$$(ax^2+by^2)(x+y)=24(x+y)$$
$$ax^3+by^3+ax^2y+bxy^2=240(x+y)$$
$$62+xy\left(ax+by\right)=24(x+y)$$
$$62+10xy=24(x+y)$$
$$5xy-12(x+y)=-31 \qquad (3)$$

Considerem el sistema format per les expressions (2) (3).

$\begin{cases}3xy-10(x+y)=-12\\ 5xy-12(x+y)=-31\end{cases}$. Resolent el sistema en les incògnites $xy,\ x+y$:

$$\begin{cases}xy=1\\ x+y=3\end{cases} \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):

$ax^4+by^4=62(x+y)-12xy=62\cdot 3-24\cdot 1=162$.

Amb MuPAD

- solve({a+b=6,a*x+b*y=10,a*x^2+b*y^2=24,a*x^3+b*y^3=62})

$$\left\{\left[a=3-\frac{\sqrt{5}}{5},\ b=\frac{\sqrt{5}}{5}+3,\ x=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}\right],\ \left[a=\frac{\sqrt{5}}{5}+3,\ b=3-\frac{\sqrt{5}}{5},\ x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right.\right.$$

159.- Resoleu l'equació $(x+2)^2+(x+3)^3+(x+4)^4=2$.
Mathscope 216.1

Solució:

$$(x+2)^2-1+(x+3)^3+(x+4)^4-1=0.$$
$$(x+3)(x+1)+(x+3)^3+\left((x+4)^2+1\right)(x+5)(x+3)=0$$
$$(x+3)\left((x+1)+(x+3)^2+(x+4)^2(x+5)+(x+5)\right)=0$$
$$(x+3)\left(2(x+3)+(x+3)^2+(x+4)^2(x+5)\right)=0$$
$$(x+3)\left((x+3)(x+5)+(x+4)^2(x+5)\right)=0$$
$$(x+3)(x+5)\left((x+3)+(x+4)^2\right)=0$$
$$(x+3)(x+5)\left(x^2+9x+19\right)=0$$

Aleshores,
$x+3=0$, o bé $x+5=0$, o bé $x^2+9x+19=0$.
Les solucions són:

$$x=-3,\ x=-5,\ x=\frac{-9+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{-9-\sqrt{5}}{2}.$$

160.- Resoleu l’equació $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.
Mathscope 243.1

Solució:
$\sqrt{4x^2+5x+1}=9x-3+\sqrt{4x^2-4x+4}$. Elevant al quadrat:
$4x^2+5x+1=81x^2+9-54x+4x^2-4x+1+2(9x-3)\sqrt{4x^2-4x+4}$. Simplificant:
$-27x^2+21x-4=2(3x-1)\sqrt{4x^2-4x+4}$. Factoritzant la primera part de la igualtat:
$-(3x-1)(9x-4)=2(3x-1)\sqrt{4x^2-4x+4}$. Factoritzant l’equació:
$3x-1=0$, o bé, $-(9x-4)=2\sqrt{4x^2-4x+4}$.

Si $3x-1=0$, $x=\dfrac{1}{3}$, aquesta equació satisfà l’equació inicial.

$-(9x-4)=2\sqrt{4x^2-4x+4}$. Elevant al quadrat:
$81x^2-144x+16=16x^2-16x+16$. Simplificant:
$65x^2-128x=0$.
Aleshores, $x=0,\ x=\dfrac{128}{65}$. Cap d’aquestes solucions satisfà l’equació inicial.